

动态大地网的参考基准和分析

陶 本 藻

摘 要

本文着重阐述动态大地网的参考基准问题。包括它和自由网平差法的联系、自由网任何参考基准坐标参数一般公式的导出以及从参考基准理论直观地导出坐标参数及其协因数阵的变换公式。本文还提出了一个位移分析程序，演算了实例，阐明不同参考基准对位移结果的影响。

一、引 言

用大地测量方法监测地表运动、断层位移和工程建筑物变形需布设动态大地网。动态大地网数据分析是当前国内外十分重视的课题。特别是对动态网的参考基准、平差方法以及统计检验问题更为注意，国内外有关这方面的主要成果，作者已汇集在小册子〔5〕中，本文是作者的新成果，主要是在动态网平差中引进任何参考基准约束（4）后导出了参数普遍估计公式（15）、（16）；从参考基准理论出发直接而简易地导出了普遍的S变换公式（30）（31）；在〔5〕的基础上，导出了在任何参考基准下，参数有约束的参数估计普遍公式。此外，本文参照〔1〕提出了一种位移分析程序，举例比较了各种参考基准的位移结果，这对解剖各种自由网平差的实质是有利的。

二、参考基准和自由网平差

1、一般公式

设网中全部 m 个点的坐标参数为 X ，观测值 L ，其权 $P=Q^{-1}$ ，误差方程

$$V = AX - l \quad (1)$$

$$l = L - A_0 - AX^0 \quad (2)$$

在 $V^T P V = \min$ 下组成法方程

$$NX = A^T P l \quad (3)$$

$N = A^T P A$ 奇异，最小二乘解不唯一。

为求定解，要引入参考基准，对参数 X 建立如下约束：

$$CX = O \quad (4)$$

C 属于一定参考基准的系数阵, 其行数等于 N 的秩亏数。

联合 (1)、(4) 可得法方程

$$\begin{aligned} NX + C^T K &= A^T P l \\ CX &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其解为

$$\begin{pmatrix} X \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & C^T \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^T P l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P l \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$X = Q_{11} A^T P l \quad (7)$$

$$K = Q_{21} A^T P l \quad (8)$$

由 (6) 知:

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} N + Q_{12} C &= I \\ Q_{11} C^T &= 0 \\ Q_{21} N + Q_{22} C &= 0 \\ Q_{21} C^T &= I \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

解得

$$Q_{12} = S (CS)^{-1} \quad (10)$$

$$Q_{11} N = I - S (CS)^{-1} C \quad (11)$$

$$Q_{11} C^T = 0 \quad (12)$$

$$Q_{22} = 0 \quad (13)$$

其中 S 为相似变换系数阵, 满足

$$AS = 0 \quad NS = 0 \quad (14)$$

于是有

$$X = Q_{11} A^T P l = Q_{xx} A^T P l \quad (15)$$

$$Q_{xx} = Q_{11} N Q_{11} = Q_{11} \quad (16)$$

和

$$K = 0 \quad (17)$$

(15)、(16) 是由一定参考基准系数阵 C 决定的自由网平差之一般公式。

(12) 表明, 任何自由网参考基准的系数阵 C 与所属法方程逆的主块 Q_{11} 之积为零, 这在究研自由网平差理论上是一个很重要的结果。

2、不同参考基准的具体形式

1)、重心参考基准

令 $C = S^T$, 则 (11) 为

$$Q_{11} N = I - S (S^T S)^{-1} S^T \quad (18)$$

容易得出

$$\left. \begin{aligned} N Q_{11} N &= N \\ Q_{11} N Q_{11} &= Q_{11} \\ (N Q_{11})^T &= N Q_{11} \\ (Q_{11} N)^T &= Q_{11} N \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

故有

$$Q_{11} = N^+ \quad (20)$$

此时的 (15)、(16) 为

$$X = N^+ A^T p l \quad (21)$$

$$Q_{xx} = N^+ \quad (22)$$

2)、拟稳参考基准

设参数 $X^T = (X_1^T \ X_2^T)$, X_2 为拟稳参数, 但并非固定不变, 其维数大于秩亏数, 相应的 $S^T = (S_1^T \ S_2^T)$, N 也分为 N_{11} 、 N_{12} 、 N_{21} 、 N_{22} 。令 $C = (O \ S_2^T)$, 称为拟稳参考系的系数阵, 则 (16) 中的 Q_{xx} 为^[5]

$$Q_{xx} = \begin{pmatrix} N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} N_{12} M^+ N_{21} N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1} N_{12} M^+ \\ -M^+ N_{21} N_{11}^{-1} & M^+ \end{pmatrix} \quad (23)$$

式中 $M = N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}$, 并且 $Q_{xx} \in N_7^-$ 。

3)、固定参考基准

以 X_2 为固定参数, 维数等于秩亏数; 由 (23) 知

$$Q_{x_1 x_1} = N_{11}^{-1} \quad Q_{x_2 x_2} = O \quad (24)$$

综上所述, 不同的参考基准有相应的自由网平差方法。一旦确定了参考基准系数阵 C , 用大地网测定地表运动就有了共同的稳定基础。

3、自由网参考基准的变换

设有误差方程 (1), 相对某参考基准的约束条件 (4), 法方程则为 (5)。令 X' 为 (1) 的一个最小二乘解, 即

$$X' = N^- A^T p l \quad (25)$$

上述各种参考基准的解都满足 (25), 都是最小二乘解。假定所取参数的近似值 X^0 与参考基准无关, 属于某参考基准的解 (满足 (5)) 为

$$X = X' + \delta X \quad (26)$$

则有

$$\begin{aligned} N \delta X + C^T K &= O \\ C \delta X &= -C X' \end{aligned} \quad (27)$$

即

$$\begin{pmatrix} \delta X \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & C^T \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} O \\ -C X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \\ -C X' \end{pmatrix} \quad (28)$$

顾及 (9) 可得

$$\delta X = - (I - Q_{11} N) X' \quad (29)$$

或

$$X = (I - S(CS)^{-1}C) X' = H X' \quad (30)$$

及

$$Q_{xx} = H Q_{x' x'} H^T \quad (31)$$

上两式就是变换参考基准的参数估计公式。与熟知 S -变换结果同。但上述推导直接与参考基准联系更为直观, 公式形态更为普遍。

三、参数有约束的参考基准

测角大地网中要求基线固定或方位角固定，这是动态分析中遇到的实际问题。

数学模型是

$$V = AX - l \quad (32)$$

$$CX = O \quad (33)$$

$$BX = R \quad (34)$$

如果 (34) 是基线或方位固定的参数约束方程，(33) 是这类参考基准条件，对于基线不变的 C 阵应为

$$C = S^T W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -y_1^0 & x_1^0 & & -y_m^0 & x_m^0 \end{pmatrix} W \quad (35)$$

与方位不变相应的

$$C = S^T W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ x_1^0 & y_1^0 & & x_m^0 & y_m^0 \end{pmatrix} W \quad (36)$$

W 为仅取元素 1 和 0 的对角阵，行元素取 1 或 0 取决于所选的三类自由网平差方法。

由

$$\varphi = V^T P V + 2K_b^T (BX - R) + 2K_c^T (CX) = \min$$

得

$$\begin{pmatrix} X \\ K_b \\ K_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & B^T & C^T \\ B & O & O \\ C & O & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^T P l \\ R \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P l \\ R \\ O \end{pmatrix} \quad (37)$$

解得

$$X = Q_{11} A^T P l + Q_{12} R \quad (38)$$

$$K_b = Q_{21} A^T P l + Q_{22} R \quad (39)$$

$$K_c = Q_{31} A^T P l + Q_{32} R \quad (40)$$

由于基线或方位不变的 B 阵分别为

$$B = \left(\cdots - \frac{\Delta x_{ij}^0}{S_{ij}^0} \quad - \frac{\Delta y_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdots + \frac{\Delta x_{ij}^0}{S_{ij}^0} \quad + \frac{\Delta y_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdots \right)$$

或

$$B = (\cdots a_{ij} \quad b_{ij} \cdots -a_{ij} \quad -b_{ij} \cdots)$$

故有

$$BS = O \quad (41)$$

考虑 (41) 和 (14)，用 (9) 至 (16) 类似方法可得

$$X = Q_{xx} A^T P l + Q_{12} R \quad (42)$$

$$Q_{xx} = Q_{11} N Q_{11} = Q_{11} \quad (43)$$

另一种较好的计算方法是，先对测角网在考虑基线不变下作经典自由网平差，求出各点

坐标及其协因数阵, 即 (30)、(31) 中的 X' 和 $Q_{X'X'}$, 按参考基准变换公式 (30)、(31) 求出与 C 阵相应参考基准的平差结果。注意 C 阵必须由 (35) 或 (36) 确定。

四、不同参考基准的动态网位移

1、位移分析程序

所建议的如下程序是普遍适用任何监测网的, 不同具体问题应考虑统计检验中显著水平的选择。

1) 对两期大地网分别秩亏平差 (21), 计算各点的坐标差。

验前与验后方差因子的方差比检验, 查明平差模型是否正确。

探测观测数据中的粗差 (Baarda法)。

2) 各点平均位移显著性的检验 (pelzer法) 如位移不显著, 基本上就可采用 1) 的坐标差作为位移结果, 所采用的是重心参考基准。如位移显著, 结合地质构造等物理条件及 1) 中坐标差的大小, 选取若干坐标为拟稳参数。

3) 拟稳参数稳定性检验, 并用逐步坐标剔除或增加, 求出经检验通过的最多数目的稳定参数建立拟稳基准。

4) 拟稳平差, 计算两期各点坐标差。

5) 拟稳参数稳定性进一步检验, 如有改变再进行拟稳平差, 继而往复。

6) 以最后确定的拟稳基准求出各点位移值并画出该测区大地网位移矢量图, 并作出物理解释。

2、实例

例 1、图 1 是一个跨断层测边网。观测数据取自《地壳形变测量资料汇编》, 对 1970、1975 和 1976 三期观测成果进行分析。

1) 作秩亏平差

定权

$$P_i = \frac{\mu^2}{(a + bL_i)^2}$$

按不等权秩亏平差结果列于表 1。

平差模型检验和粗差检验均通过。

2) 平均位移显著性的检验

1970—1975, 计算的 $F = 1.13$

取 $\alpha = 0.05$ $F_{(\alpha, 17, 4)} = 5.8$

$\alpha = 0.25$ $F_{(\alpha, 17, 4)} = 2.08$

$F < F_{0.25}$, 平均位移很不显著。

再作单点 t 检验, 各参数所计算的 |t| 列于表 2。

取 $\alpha = 0.05$ $t_{(0.025, 4)} = 2.8$

$\alpha = 0.10$ $t_{(0.05, 4)} = 2.13$

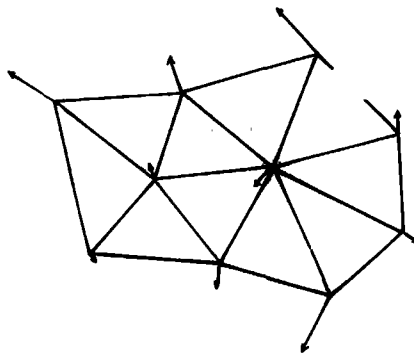


图 1

表中的 $|t|$ 均小于限值 $t_{(0.05, 4)}$

1970—1975的水平形变分析结束, 结果是此时间内该测区地表不存在水平形变, 处于稳定状态。

1970—1976, 计算的 $F=8.38$

$F > F_{(0.05, 17, 4)}$, 存在总体变形

3) 拟稳点选取和作拟稳平差。

从表1中看, 1970—1976的坐标差参差不齐, 存在拟稳点组。为进一步了解, 作单点t

表1 各种参考基准之坐标差

周 期	1970—1975	1970—1976	1970—1976	1970—1976
方 法	秩亏平差	秩亏平差	拟稳平差	拟稳平差
基 准	重 心	重 心	(点1,4,5,6,8,9)	(点1,2,3,5,6,8,9)
	cm			
x_1	-2.150	1.650	1.636	1.784
y_1	2.415	1.268	0.287	-0.463
x_2	-2.880	-2.917	-3.005	-2.649
y_2	3.684	0.740	-0.241	-0.992
x_3	-4.124	4.347	4.309	4.524
y_3	4.155	1.700	0.771	-0.123
x_4	3.611	3.300	3.345	3.325
y_4	-2.521	-3.515	-4.450	-5.328
x_5	0.956	-0.108	-0.076	-0.057
y_5	1.881	2.070	1.042	0.424
x_6	-0.372	-3.764	-3.794	-3.601
y_6	-2.325	1.235	0.197	-0.393
x_7	-1.772	-6.708	-6.793	-6.445
y_7	-3.921	-3.374	-4.431	-4.968
x_8	2.953	-1.792	-1.937	-1.423
y_8	-0.234	3.062	2.013	1.455
x_9	3.257	1.000	0.826	1.422
y_9	-0.752	1.867	0.911	0.091
x_{10}	0.521	4.994	4.912	5.250
y_{10}	-2.382	-5.054	-5.949	-6.940

检验, 结果 2, 3, 7, 10号点上有 $|t| > t_{(0.025, 4)}$ 认为是形变点 (此处有一坐标拒绝 t 检验就认为该点形变, 当然也可按单坐标为单位处理), 以其余的 1, 4, 5, 6, 8, 9号为相对稳定点组, 进行拟稳平差, 求出的两期坐标差列于表1。

4) 对拟稳平差结果作单点 t 检验。

计算的 $|t|$ 列于表2,发现4,7,10为形变点,而2,3两点可能不是形变点。

表2 $|t|$ 值 计 算

周期	1970-75	1970-76	1970-76	1970-76	周期	1970-75	1970-76	1970-76	1970-76
平差	秩亏	秩亏	拟稳	拟稳	平差	秩亏	秩亏	拟稳	拟稳
基准	重心	重心	1,4,5, 6,8,9	1,2,3, 5,6,8,9	基准	重心	重心	1,4,5, 6,8,9	1,2,3, 5,6,8,9
x_1	0.94	1.61	1.44		x_6	0.12	2.76	2.60	
y_1	0.98	1.15	0.27		y_6	0.99	1.19	0.19	
x_2	1.28	2.91	2.11		x_7	0.50	4.23	3.45	3.61
y_2	1.69	0.76	0.22		y_7	1.57	3.04	3.40	3.87
x_3	1.35	3.21	2.56	3.58	x_8	0.96	1.31	1.69	
y_3	1.62	1.49	0.55	0.10	y_8	0.08	2.27	1.42	
x_4	1.04	2.14	2.71	1.64	x_9	0.98	0.68	0.74	
y_4	0.74	2.32	3.00	2.95	y_9	0.22	1.22	0.59	
x_5	0.32	0.08	0.07		x_{10}	0.17	3.62	2.89	3.39
y_5	0.62	1.54	0.83		y_{10}	0.76	3.61	3.21	4.12

5) 以4,7,10为形变点,其余七个点为相对稳定点,进行第二次拟稳平差,求出各点坐标差列于表1中。

再作 t 检验, $|t|$ 值列于表2中。经检验,4,7,10为形变点可信,而点3中尚有一个 x 坐标也可能形变,分析至此结束。

6) 由第二次拟稳平差结果绘制位移矢量图(图1),表明地表有张性右旋运动。

此例仅用总体检验和 t 检验,程序编制较为有利和简单。计算在PC-1500机上完成,所编制的程序有自动寻找拟稳点和一次打印结果的功能。

以下两例的检验过程不仅用了单点 t 检验还用了整体稳定性检验或线性假设检验。

例2、图2为测角网,测量数据取自1971、1981两期。

方案I:点3,4为固定基准。

方案II:重心基准

方案III:点2,3,4,5为拟稳基准。

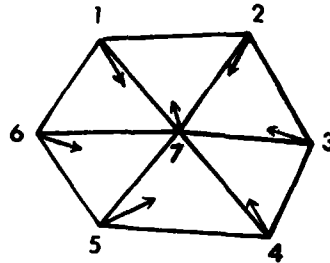


图2

经分析方案间最大位移差I-II: 34^m , I-III: 14, II-III: 44, 方案I和III不存在显著变形参数,而II中 y_1 , x_6 和 y_7 显著位移,矢量图见图2。

例3, 模拟跨断层边角网如图3。

模拟量: C、D点不动, A、B两点的y方向各位移4cm和5cm。

方案I: 重心基准

方案II: 拟稳基准 $x_C^2 + y_C^2 + x_D^2 + y_D^2 = \min$

方案III: 拟稳基准 $x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 = \min$

位移分析结果列于表3。

统计上述三例可以认为:

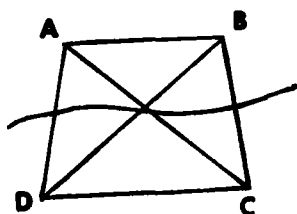


图3

表3

	I	II	III
	cm		
x_A	-0.89	0.37	0.17
y_A	1.12	4.09	1.71
x_B	1.13	0.22	0.11
y_B	1.41	4.82	2.32
x_C	1.00	-0.03	-0.10
y_C	-1.35	-0.09	-2.35
x_D	-1.24	0.03	-0.17
y_D	-1.18	0.09	2.22

各种参考基准求出的位移矢量不同, 尤其是位移长度差异较大, 而且在变形参数和位移模式方面都有差异。

由例3, 将表3数据绘制位移矢量图(图4), 其位移模式反映了各种参考基准特点。

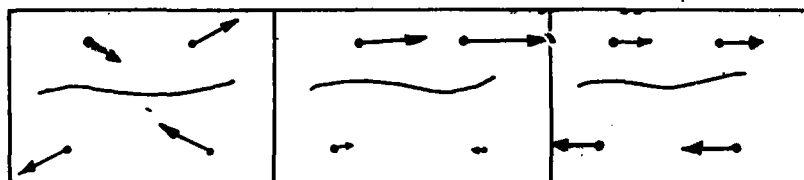


图4

重心基准(I), 大致在图中对角线方向呈张压模式, 断层右旋, 位移量几乎分布各个方向, 绝对值总和为9.32, 与给定的9cm接近。

以所有纵坐标为拟稳基准(III)呈现明显相对右旋模式, y方向位移绝对值之和8.5。

以C、D点为拟稳基准(II), 是C、D基本不动的上盘右旋模式, y坐标右旋分别为4.1和4.8与模拟基本符合。

3、参考基准的选取

参考基准的选取应符合实际的位移模式, 既是数学分析的结果又能作出物理解释。我们认为可作如下考虑。

监测网确实存在不动点, 毫无疑问应选固定基准, 用经典平差法确定位移。如能用这些不动点作为拟稳基准, 也可得出满意的结果(如例3)。

当取显著水平 $\alpha = 0.05$, 各点平均位移并不显著, 若加大显著水平, 如 $\alpha = 0.10$ 或更大

些, 平均位移显著, 表明了是均匀小位移情况, 宜采用重心参考基准(如例2), 一般小区域位移场的计算也能应用重心基准。

如果 $\alpha = 0.05$ 的平均位移显著, 位移大小参差不齐, 就应逐渐探求拟稳基准, 采用拟稳平差求位移量。

4、参考基准与平均位移显著性检验

两期坐标差

$$d = X_2 - X_1 \quad (44)$$

平均位移显著性检验统计量是

$$F = \frac{\tilde{\mu}_d^2}{\tilde{\mu}^2} = \frac{d^T Q_{dd}^{-1} d / f_d}{\frac{f_1 \tilde{\mu}_1^2 + f_2 \tilde{\mu}_2^2}{f_1 + f_2}} \quad (45)$$

坐标差 d 和 Q_{dd} 与所选参考基准有关, 但在自由网平差中, 对于上述的任一参考基准 $d^T Q_{dd}^{-1} d$ 为不变量, 即 F 不变, 检验结果相同。

事实上, 由 (30)、(31) 得

$$d = (I - S(CS)^{-1}C) d' = Hd' \quad (46)$$

$$Q_{dd} = HQ_{d', d'} H^T \quad (47)$$

作二次型

$$d^T Q_{dd}^{-1} d = d'^T H^T (HQ_{d', d'} H^T)^{-1} Hd' \quad (48)$$

因为

$$[H^T (HQ_{d', d'} H^T)^{-1} HQ_{d', d'}]^{-2} = H^T (HQ_{d', d'} H^T)^{-1} HQ_{d', d'}$$

$$\text{及 } R [H^T (HQ_{d', d'} H^T)^{-1} HQ_{d', d'}] = R (Q_{d', d'})$$

按广义逆如下定理 (Rao 1971[4]) : 若 $H = A^{-1}A$ 是幂等阵, 并且 $R(H) = R(A)$, 则 A^{-1} 为 A 的一个广义逆就有

$$H^T (HQ_{d', d'} H^T)^{-1} H = Q_{d', d'}^{-1} \quad (49)$$

代入 (48) 即得

$$d^T Q_{dd}^{-1} d = d'^T Q_{d', d'}^{-1} d' \quad (50)$$

这就证明了上述检验与自由网参考基准无关。

参 考 文 献

[1] A. Chrzanowski, A Comparison of different approaches into the analysis of defor-

- mation measurements, With contributions by members of the FIG "ADHOC" committee 1981.
- [2] W.Welsch, 对变形和控制网进行监视和分析的若干技术问题, 武汉测绘学院, 1981.
- [3] W.M.威尔施、张琰, 控制网及部分控制网的图形一致性与仿射性, 武汉测绘学院学报 1, 1984.
- [4] C.R.Rao, S.K.Mitra, Generalized Inverse of Matrices and its applications, 1971.
- [5] 陶本藻, 自由网平差与变形分析, 测绘出版社, 1984.

Reference Datum and Analysis of the Dynamic Geodetic Network

Tao Benzao

Abstract

This paper lays emphasis upon reference datum of dynamic geodetic network. Included in this paper are the discussion of the relation between the adjustment of free network and reference datum, the derivation of a general estimation formula of the coordinate parameters of arbitrary reference datum of free network, and the derivation of the transformation formula of the coordinate parameters and its cofactor matrix from the theory of reference datum. In addition, a procedure for analysis of displacement has been proposed, a practical example has been illustrated and the influence of different reference datum to the solution of displacement has been explained.