# 地面网和卫星网联合平差的数学模型

周忠谟　晁定波


**摘　要**

通过地面网与卫星网的联合平差，以改善网的精度和建立高精度的地心坐标系统，是当前大地测量的一项重要任务。本文讨论了以两网单独平差的结果为基础，在三维空间直角坐标系统中施行联合平差的不同方法；并推荐了相应的转换模型。


## 引　言

目前，许多国家和地区都已建立了高精度的卫星网；在我国卫星多普勒网的布设工作也已完成。所以，综合利用高精度的卫星观测结果，以改善地面网的精度，分析网的系统误差和建立地心坐标系统已成为现代大地测量学的一项重要任务，受到广泛的重视[1～4]。

对于上述的联合平差，当前研究工作所涉及的主要问题有：

1、合理地组成地面网和卫星网之间的转换模型；

2、适当地选择联合平差方法；

3、可靠地确定观测量的方差——协方差。

为此，本文阐述了两种在三维直角坐标系统中，以两网单独平差结果为基础的联合平差方法，并推荐了相应的转换模型。

## 一、地面网和卫星网在三維直角坐标係統中的联合平差模型

若取符号

$N_T$——地面网单独平差时相应公共点的约化法方程系数阵

$N_S$——卫星网单独平差时相应公共点的约化法方程系数阵

B——坐标系统的转换阵

则由文献〔11〕已知，在三维直角坐标系统中两网联合平差的模型可表示为：

$$\begin{bmatrix} N_T+N_S & N_SB \\ B^TN_S & B^TN_SB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\hat{X}_T \\ \delta\hat{Y} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} N_Sl \\ B^TN_Sl \end{bmatrix}=O \qquad (1)$$

其中

$l=X_T+BY_O-X_S$

本文1984年12月收到

$\mathbf{X}_T$——地面网单独平差后的空间直角坐标向量

$\mathbf{X}_S$——卫星网单独平差后的空间直角坐标向量

$\mathbf{Y}_0$——转换参数的近似值

由此两网公共点坐标和转换参数的平差值为：

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_T &= \mathbf{X}_T + \delta\hat{\mathbf{X}}_T \\ \hat{\mathbf{X}}_S &= \mathbf{X}_S + \delta\hat{\mathbf{X}}_S \\ \hat{\mathbf{Y}} &= \mathbf{Y}_0 + \delta\hat{\mathbf{Y}} \\ \delta\hat{\mathbf{X}}_S &= \delta\hat{\mathbf{X}}_T + \mathbf{B}\delta\hat{\mathbf{Y}} + l \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

地面网的单独平差一般为天文大地网的整体平差，当平差前已考虑到与卫星网的联合平差时，应将公共点未知数作为全网未知数向量的后置分量，则在平差过程中可求出公共点的约化法方程系数阵 $\mathbf{N}_T$ 。

或者，若地面网平差后公共点未知数向量的方差——协方差阵已知或易于求得，则联合平差应按相关平差法进行，即把地面网和卫星网单独平差后的坐标值视为相关观测量，并假设各自的权矩阵分别为 $\mathbf{P}_T$ 和 $\mathbf{P}_S$ 由此相应的误差方程式为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_T \\ \mathbf{P}_S \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathbf{V}_T \\ \mathbf{V}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{X}}_T \\ \delta\hat{\mathbf{X}}_S \end{bmatrix} \tag{3}$$

应用条件式

$$\hat{\mathbf{X}}_S = \hat{\mathbf{X}}_T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{Y}} \tag{4}$$

可将式（3）中的 $\mathbf{V}_S$ 改写为以下线性形式：

$$\mathbf{V}_S = \delta\hat{\mathbf{X}}_T + \mathbf{B}\delta\hat{\mathbf{Y}} + l \tag{5}$$

由此，按式（3）并顾及式（5）便得相应法方程：

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{P}_T + \mathbf{P}_S) & \mathbf{P}_S\mathbf{B} \\ \mathbf{B}_T^T\mathbf{P}_S & \mathbf{B}^T\mathbf{P}_S\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{X}}_T \\ \delta\hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_S l \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P}_S l \end{bmatrix} = \mathbf{O} \tag{6}$$

若取

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_T &= \mathbf{N}_T \\ \mathbf{P}_S &= \mathbf{N}_S \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

则式（6）与式（1）完全一致。因此，在（7）式的条件下，联合平差模型（6）与两网整体平差模型是等价的。

很明显，对于上述的联合平差方法，必须可靠地确定权矩阵 $\mathbf{P}_T$ 和 $\mathbf{P}_S$ 。如果通过卫星网单独平差，相应网点坐标的方差——协方差矩阵 $\mathbf{D}_S$ ，或相应的协因子阵 $\mathbf{Q}_S$ 已经给出，则

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_S &= \sigma_S^2\mathbf{D}_S^{-1} \\ \text{或}\quad \mathbf{P}_S &= \mathbf{Q}_S^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$\sigma_S$——卫星网的单位权中误差

而对于地面网来说，假定单独平差是在三维大地坐标系（B，L，H）中进行，并已知网点坐标平差值的方差——协方差阵 $\mathbf{D}_E$ 或协因子阵 $\mathbf{Q}_E$，同时取：

$$\mathbf{Q}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_G & \mathbf{Q}_{GH} \\ \mathbf{Q}_{HG} & \mathbf{Q}_H \end{pmatrix} \tag{9}$$

其中

$$\mathbf{Q}_E = \frac{1}{\sigma_E^2}\mathbf{D}_E$$

$\mathbf{Q}_G$——大地纬度 B 与大地经度 L 的协因子阵

$\mathbf{Q}_H$——大地高 H 的协因子阵

$\mathbf{Q}_{GH} = \mathbf{Q}_{HG}^T$——B，L 和 H 之间的相关协因子阵

$\sigma_E$——地面网的单位权中误差

则有

$$\mathbf{P}_T^{-1} = \mathbf{C}_G\mathbf{Q}_G\mathbf{C}_G^T + \mathbf{C}_H\mathbf{Q}_H\mathbf{C}_H^T + (\mathbf{C}_G\mathbf{Q}_{GH}\mathbf{C}_H^T + \mathbf{C}_H\mathbf{Q}_{HG}\mathbf{C}_G^T) \tag{10}$$

其中

$$\mathbf{C}_G = \mathrm{diag}\,[\mathbf{C}_{G1}, \mathbf{C}_{G2}, \cdots\mathbf{C}_{Gi}\cdots\mathbf{C}_{Gn}]$$

$$\mathbf{C}_H = \mathrm{diag}\,[\mathbf{C}_{H1}, \mathbf{C}_{H2}, \cdots\mathbf{C}_{Hi}\cdots\mathbf{C}_{Hn}]$$

$$\mathbf{C}_{Gi} = \begin{pmatrix} -(M+H)\sin B\cos L & -(N+H)\cos B\sin L \\ -(M+H)\sin B\sin L & (N+H)\cos B\cos L \\ (M+H)\cos B & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{Hi} = \begin{pmatrix} \cos B\cos L \\ \cos B\sin L \\ \sin B \end{pmatrix}$$

M——椭球的子午圈曲率半径

N——椭球的卯酉圈曲率半径

如果地面网的单独平差是在二维大地坐标系统中进行的，则此时可假定式（9）中（B，L）与 H 的相关协因子阵为零，而 $Q_H$ 可根据 H 的先验方差来确定。

## 二、关于地面网和卫星网之间的轉换模型

由式（1）或式（6）不难理解，转换模型的类型不同，不仅会影响所求转换参数的数值，同时对联合平差的坐标值也会产生影响。因此，这方面的研究工作一直受到广泛的重视[5,6]。

目前，对转换模型的研究主要在于合理地引入描述网的系统误差的参数。为了表达地面网与卫星网之间的相对尺度变化，在已有的模型中（如 VEIS 模型，BURSA—WOLF 模型，MOLODENSKY—BADEKAS 模型，VANICEK—WELLS 模型以及 KRAKIWSKY—THOMSOM模型等）均引入了一个尺度因子[6]。不过，由于地面网和卫星网的尺度因子在地心（或

参心）空间直角坐标系统中具有不同的定义，所以上述模型引入的这一参数，将难以同时描述地面网和卫星网尺度因子的影响规律[7]。

为此，根据文献〔8〕，在卫星网尺度因子的影响可以忽略的情况下，我们推荐采用如下的转换模型：

$$\mathbf{X}_S=\mathbf{X}_T+\mathbf{B}\begin{pmatrix} d\mathbf{X}_0 \\ W_Z \\ m \\ dA \end{pmatrix} \tag{11}$$

其中

$d\mathbf{X}_0$——平移参数向量

$W_Z$——坐标系统绕 Z 轴的旋转参数

m——地面网相对卫星网的尺度因子

dA——地面网的定向参数

$$\mathbf{B}=\left(\mathbf{E}\quad \mathbf{Q}_Z \;\vdots\; \mathbf{M}_X\quad \mathbf{A}_X\right)$$

**E**——单位矩阵

$$\mathbf{Q}_Z=[\mathbf{Y}_T,\ -X_T,\ O]^T$$

$$\mathbf{M}_X=\mathbf{C}_{G_i}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_X=\mathbf{C}_{G_i}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}=\Delta B-\frac{1}{2}\cos B_0\sin B_0\Delta L^2+\cdots$$

$$a_{12}=-\cos B_0(1+\eta_0^2)\Delta L+\cdots$$

$$a_{21}=\Delta L+\tan B_0\Delta B\Delta L+\cdots$$

$$a_{22}=\frac{1}{\cos B_0}(1-\eta_0^2)\Delta B+\frac{1}{\cos B_0}\tan B_0\Delta B^2-\frac{1}{2}\sin B_0\Delta L^2+\cdots$$

$$\Delta B=B-B_0$$

$$\Delta L=L-L_0$$

$$\eta_0^2=\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 B_0$$

e——椭球第一偏心率

关于含有高次项的 $a_{11}$，$a_{12}\cdots$系数值可参见[9,10]。

该模型的数学性质良好，其在大地坐标系统中引入的尺度和定向系统误差参数与赫尔默特（Helmert）的定义相一致[10]。

## 三、以三維直角坐标差为相关观测量的联合平差模型

当卫星网的系统尺度误差不能忽略时，应用模型（11）将会使平差的结果产生误差。例如，这时若以 $m_S$ 表示卫星网的尺度因子，则它引起所求平移参数的误差可达[7]：

$$\delta\mathbf{X}_0 = m_S\mathbf{X}_{T0}$$

为此，我们推荐下述以三维直角坐标差为相关观测量的联合平差模型。

假设

$\mathbf{X}$——地面网（或卫星网）单独平差后的空间直角坐标向量

$\mathbf{X}_0$——大地原点的空间直角坐标向量

$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$

$\mathbf{P}_\Delta$——相应 $\Delta\mathbf{X}$ 的权矩阵

$\delta\hat{\mathbf{X}}_\Delta$——坐标差改正数的平差值向量

在此若把三维坐标差 $\Delta\mathbf{X}$ 视为相关观测量，并仍以下标“T”和“S”表示与地面网和卫星网有关之量，则可写出如下误差方程：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{\Delta T}\\ \mathbf{P}_{\Delta S}\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\mathbf{V}_{\Delta T}\\ \mathbf{V}_{\Delta S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta\hat{\mathbf{X}}_{\Delta T}\\ \delta\hat{\mathbf{X}}_{\Delta S}\end{pmatrix} \tag{12}$$

另外，由条件式（4）可得：

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_S = \Delta\hat{\mathbf{X}}_T + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)\hat{\mathbf{Y}} \tag{13}$$

其中，$\mathbf{B}_0$ 为大地原点的坐标系统转换矩阵。

若应用式（13），并取 $\mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$，则式（12）中 $\mathbf{V}_{\Delta S}$ 可表示为：

$$\mathbf{V}_{\Delta S} = \delta\hat{\mathbf{X}}_{\Delta T} + \mathbf{b}\delta\hat{\mathbf{Y}} + (\Delta\mathbf{X}_T + \mathbf{b}\mathbf{Y}_0 - \Delta\mathbf{X}_S) \tag{14}$$

于是，根据式（12）中的第一式和式（14）可组成法方程式如下：

$$\begin{pmatrix}(\mathbf{P}_{\Delta T} + \mathbf{P}_{\Delta S}) & \mathbf{P}_{\Delta S}\mathbf{b}\\ \mathbf{b}^T\mathbf{P}_{\Delta S} & \mathbf{b}^T\mathbf{P}_{\Delta S}\mathbf{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\hat{\mathbf{X}}_{\Delta T}\\ \delta\hat{\mathbf{Y}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{P}_{\Delta S}\boldsymbol{l}_\Delta\\ \mathbf{b}^T\mathbf{P}_{\Delta S}\boldsymbol{l}_\Delta\end{pmatrix} = \mathbf{O} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{l}_\Delta = \Delta\mathbf{X}_T + \mathbf{b}\mathbf{Y}_0 - \Delta\mathbf{X}_S$$

显然，这时联合平差的主要问题仍在于确定观测量的权矩阵 $\mathbf{P}_{\Delta T}$ 和 $\mathbf{P}_{\Delta S}$ 以及转换矩阵 $\mathbf{b}$。

大家知道，在地面网的平差计算中，通常均取大地原点为固定点。在这种情况下有：

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P}_{\Delta T} = \mathbf{P}_T \\ \delta \hat{\mathbf{X}}_{\Delta T} = \delta \hat{\mathbf{X}}_T \end{array}\right\} \quad (16)$$

至于卫星网点坐标差的权矩阵，在上述情况下可按下式确定：

$$\mathbf{P}_{\Delta S}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_S\mathbf{F}^T \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} & \cdots & -\mathbf{E} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} & \cdots & -\mathbf{E} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & -\mathbf{E} & \cdots & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$-\mathbf{E}$ 所在之列与大地原点的位置相应。

关于转换模型，这时由〔8〕已知：

$$\Delta\mathbf{X}_S = \Delta\mathbf{X}_T + \mathbf{b}\begin{pmatrix} W_z \\ m \\ dA \end{pmatrix} \quad (18)$$

其中系数矩阵在略去坐标差的二次及其以上各项时为：

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} & & \vdots \\ \Delta Y_T, & -\Delta X_T, & (-\Delta Y_T \sin B_0 + \Delta Z_T \cos B_0 \sin L_0) \\ -\Delta X_T, & -\Delta Y_T, & (\Delta X_T \sin B_0 - \Delta Z_T \cos B_0 \cos L_0) \\ O, & -\Delta Z_T, & (-\Delta X_T \cos B_0 \sin L + \Delta Y_T \cos B_0 \cos L_0) \\ & & \vdots \end{pmatrix}$$

可见，这时通过地面网和卫星网的联合平差，将不能同时确定坐标系统的平移参数。此外尚应指出，由于在系数矩阵 **b** 的推导中忽略了坐标差二次项的影响，所以，由此而产生的模型误差将随网区的扩大而增大。

## 参 考 文 献

〔1〕R. Kelm, H. J. Kriefall, Geodätische Lagenetze, DGK Reihe B Nr. 265, 1983.

〔2〕H. Wolf, Scale and orientation in combined Doppler and triangulation nets, Bull Géod. No. 54, 1980.

〔3〕H. Wolf, Minutes on the combining Procedure of Doppler observations with the RE-Trig's Phase Ⅲ, Munich, 1981.

〔4〕崔希璋、刘大杰，我国天文大地网与卫星多普勒网联合平差的初步方案，武汉测绘学院学报 1，1982.

〔5〕Wells, D. E., Vanicek, P., Alignement of geodetic and satellite coordinate system to the average terrestrial system, Bull. Géod. No. 117, 1975.

〔6〕Thomson, D. B., Krakiwsky, E. J., Concepts of the combination of geodetic Networks, Proceed. Internat. Geod. Symp. on satellite Doppler positioning, Las Cruces (1976) DMA editor, Vol. 2, pp727—745, 1976.

〔7〕周忠谟，论卫星网与地面网之间的转换模型，测绘学报，3，1983.

〔8〕Zhou, Z, Untersuchung der mathematischen Modelle zur Kombination eines terrestrischen Netzes mit einem Satellitennetz, DGK Nr. 274, 1983.

〔9〕叶雪安主编，大地测量学（下卷二分册），测绘出版社，1964.

〔10〕Jordan/Eggert/Kneißl, Handbuch der vermessung skunde, Band IV/2. Stuttgart, 1959.

〔11〕周忠谟等，大地高程误差对卫星网与地面网联合平差的影响，武汉测绘学院学报，1，1985.

## The Mathematical Model for the Combined Satellite and Terrestrial Net Adjustment

*Zhou Zhongmo Chao Dingbo*

**Abstract**

It is an important mission of Geodesy to improve an accuracy of control networks and to establish the geocentric coordinate system via combined satellite and terrestrial network adjustment. This paper discusses various approches for performing the combined adjusment in three-dimensional rectangular coordinate system, based on the results of separate adjustment of the two types of networks, and proposes the relevant models for transformation.