

# 光束法区域网平差中粗差 和系统误差区分可能性研究

李德仁

## 摘 要

利用高斯-马尔可夫模型中模型误差的可区分性理论,研究了光束法区域网平差中粗差和象片系统误差的区分可能性。讨论了这种可区分性与控制点布设和摄影飞行方式以及区域大小的关系,并从中提出若干改善可区分性的可能途径。这种研究对于高精度摄影测量点测定是十分有意义的。

## 一、问题的提出

随着电子计算机和计算技术的发展,摄影测量加密的平差方法已经发展到如下的水平:

- 严格的整体求解(如光束法、独立模型法);
- 摄影测量数据和非摄影测量数据的联合平差;
- 利用自检校平差来补偿象片系统误差;
- 利用各种粗差定位方法来发现和消除观测数据中的粗差。

但是,迄今为止的平差处理中均是将系统误差和粗差分开处理的。就是说,在补偿系统误差时假定粗差已不存在;而在粗差定位时又总是假设系统误差已预先消除。事实上,这种假设是往往不成立的,因为这两种模型误差通常总是同时存在且相互影响的。

表1表示光束法平差中由于粗差和系统误差相互影响致使分开处理时作出错误判断的一

表1 光束法区域网平差中系统误差和粗差的相互干扰

平 差 方 法	带 自 检 校 光 束 法 平 差	不 带 自 检 校 光 束 法 平 差
存 在 的 模 型 误 差	粗差 $\Delta X_1 = \Delta Y_1 = 10$ 米	仿射系统误差 $b_1 = 100$ 微米
平 差 结 果	$V_{x_1} = V_{y_1} = 0.000$ $\begin{cases} b_2 = -54.29 \\ tb_2 = 52.6 > t_{\alpha} \end{cases}$	$V_{x_1} = -0.238 \quad W_{x_1} = 20.8$ $V_{y_1} = 0.238 \quad W_{y_1} = 20.7$
得 出 的 错 误 判 断	控制点上不存在粗差, 系统误差 $b_2$ 十分显著。	控制点上存在显著的粗差。

个例子，这是一个 $11 \times 13$ 象片的区域网。几何条件示于图1。

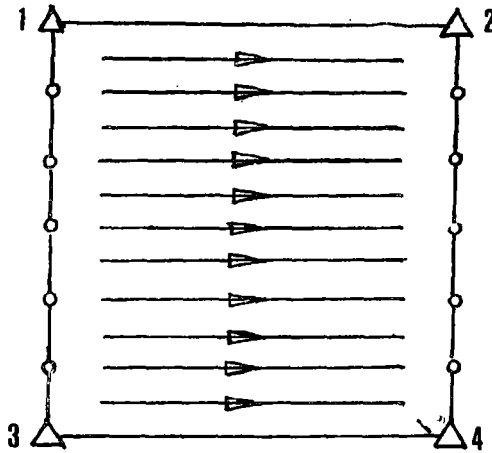


图1 相应于表1的平差区域几何条件

$\triangle$ 平高点	$\circ$ 高程点
区域大小： $11 \times 13$	航向重叠：60%
旁向重叠：60%	飞行方向：西—东

此例明显表示，在某种几何条件下，粗差和系统误差可能发生严重的相互干扰，而使现有的粗差定位和系统误差补偿导致错误的结果。

因此，为了有效地进行粗差定位和系统误差补偿，就必须研究不同的平差几何条件下，粗差和系统误差的区分可能性。

巴尔达教授提出的从单个备选假设（单个模型误差）出发的可靠性理论，只能解决模型误差的发现或测定可能性。为了解决两类不同模型误差的区分问题，作者在文献〔1〕中提出了在两个备选假设下模型误差的区分可能性理论。

本文利用该理论来研究光束法区域平差中粗差（主要是控制点粗差）和象片系统误差的区分可能性，首先介绍研究的方法，利用此方法计算了不同几何条件下粗差和系统误差的最大相关和充分可区分性数值，进而讨论区分可能性与摄影飞行、控制点布设以及区域大小的关系，从中提出改善粗差和系统误差区分可能性的途径。

## 二、研究采用的公式和研究方法

### 1. 研究区域的几何条件

研究采用模拟数据以避免各种偶然因素对区分可能性的影响。模拟数据的基本参数为：

摄影比例尺  $1 : 10,000$ ；

象片基线长度  $b = 100\text{mm}$ ；

象幅大小  $23 \times 23\text{cm}^2$ ；

摄影机主距  $C_k = 150\text{mm}$ ；

连接点点数为每片  $3 \times 3$  标准配置点。

控制点布点方案见图2。平面控制点采用周边布点，高程控制点布成锁形，其间隔为2

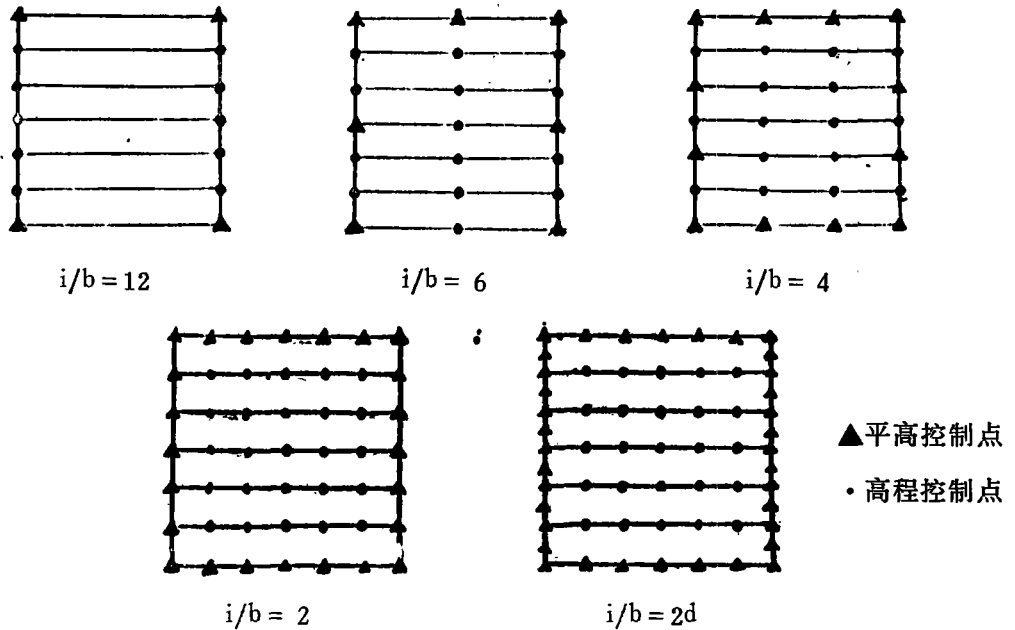


图2 控制点布点方案

到12条基线。方案2d还在两侧边沿上主点位置附近增设平高控制点以改善附加参数的可测定性。

摄影飞行方案考虑到不同的旁向重叠、交叉飞行和各航带间的飞行方向，列于表2。

表2 不同的摄影飞行方案

方案编号	旁向重叠	是否交叉飞行?	是否改变航线间飞行方向	区域中的象片数
E20 (单区域)	20%	否	是	6 × 13
E60	60%	否	是	11 × 13
E60G } 双区域	60%	否	否	11 × 13
D20	20%	是	是	2 × 6 × 13

改正象片系统误差的附加参数取用 Ebner 提出的包含 12 个未知数的正交多项式<sup>[2]</sup> (参见图3)：

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta x &= b_1 x + b_2 y - b_3 (2x^2 - 4b^2/3) + b_4 xy + b_5 (y^2 - 2b^2/3) + \\
 &\quad b_7 x (y^2 - 2b^2/3) + b_8 (x^2 - 2b^2/3) y + b_{11} (x^2 - 2b^2/3) (y^2 - 2b^2/3); \\
 \Delta y &= -b_1 y + b_2 x + b_3 xy - b_4 (2y^2 - 4b^2/3) + b_5 (x^2 - 2b^2/3) + \\
 &\quad b_8 (x^2 - 2b^2/3) y + b_{10} x (y^2 - 2b^2/3) + b_{12} (x^2 - 2b^2/3) (y^2 - 2b^2/3).
 \end{aligned} \right\} (1)$$

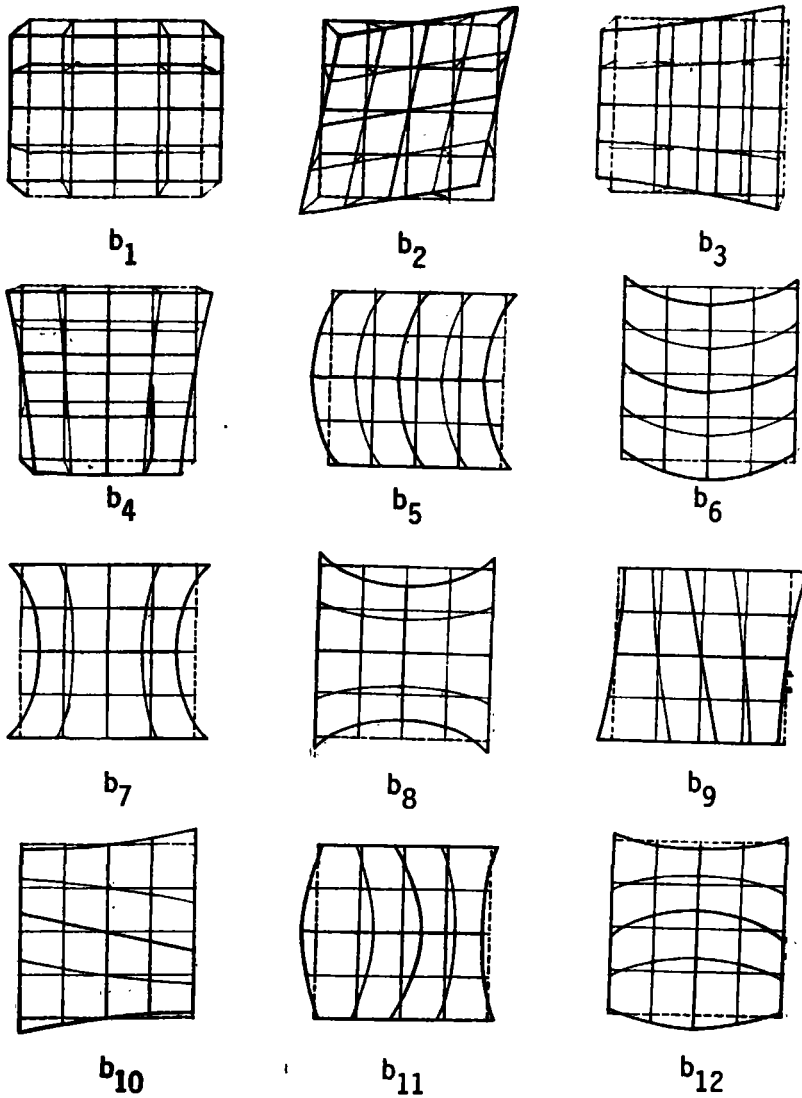


图3 Ebner 正交多项式的附加参数组

## 2. 研究所利用的公式

根据文献〔1〕提出的模型误差区分可能性理论，只要给出平差的几何条件（设计矩阵  $\underline{A}$ ）、观测值精度（权矩阵  $\underline{P}$ ）和所要研究的模型误差（系数矩阵  $\underline{H}_i$  和  $\underline{H}_j$ ），便可进行区分可能性研究。所利用的公式归纳如下：

$$\text{基本矩阵} \quad (\underline{Pss})_{1j} = \underline{H}_i^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{H}_j; \quad (2)$$

$$\underline{M}_{12} = (\underline{Pss})_{21} (\underline{Pss})_{11}^{-1} (\underline{Pss})_{12} (\underline{Pss})_{22}^{-1}; \quad (3)$$

$$\text{总体相关} \quad \rho_G = (\rho_{T_1, T_2})^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{\text{Spur}(\underline{M}_{12})}{\sqrt{p_1 \cdot p_2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

最大相关  $\rho_{1,2,max} = \sqrt{\lambda_{max}(M_{12})}$  ; (5)

$\delta_{0,\rho_{1,2}} = k_{\rho_{1,2}} \cdot \delta_0$ . (6)

式中的 $k_{\rho_{1,2}}$ 由表3查得,它是显著性水平 $\alpha_0$ ,检验功效 $\beta'_0$ ,区分可能性 $1-\gamma'_0$ 和相关系数

表3 区分可能性放大系数  $k_{\rho_{1,2}}$  ( $\alpha_0 = 0.1\%$ ,  $\beta'_0 \geq 80\%$ )

$k_p$	$1-\gamma'_0$	90%	95%
$\rho$			
1.00		$\infty$	$\infty$
0.99		4.383	5.649
0.98		3.099	3.995
0.97		2.530	3.262
0.96		2.191	2.826
0.95		1.964	2.528
0.94		1.792	2.308
0.93		1.661	2.136
0.92		1.552	1.998
0.91		1.460	1.872
0.90		1.385	1.789
0.85		1.107	1.462
0.80		1.063	1.235
0.75		1.041	1.053
0.70		1.031	1.031
0.60		1.019	1.019
0.50		1.015	1.015
0.40		1.010	1.010
0.30		1.007	1.007
0.20		1.005	1.005
0.10		1.000	1.000
0.00		1.000	1.000

$\rho_{1,2}$ 的函数。该值表示可区分模型误差的下界值对于可发现模型误差下界值的倍数。若以粗差检测为例,当相关系数为0.92时,若要达到95%的区分可能性,则可定位的粗差下界值为可发现粗差下界值的两倍。若相关系数为100%时,则该粗差是不可定位的。

对于多维备选假设,最不利的方向通过计算

$[(P_{ss})_{ii}^{-1}(P_{ss})_{ij}(P_{ss})_{ji}^{-1}(P_{ss})_{ii} - \lambda_{max}(M_{12})I_{ij}]s_{i,max} = 0$  (7)

求得的特征向量得知

在方向  $\underline{s}_i$  上可发现粗差的下界值为:

$$UGWO(\underline{s}_i) = \delta_0 / \sqrt{\underline{s}_i^T (\underline{P}_{ss})_{ii} \underline{s}_i} \quad (8)$$

在方向  $\underline{s}_i$  上可与方向  $\underline{s}_j$  上的系统误差相区分的粗差的下界值为:

$$UGW(\underline{s}_i, \underline{s}_j) = \delta_0 \cdot k\rho_{ij} / \sqrt{\underline{s}_i^T (\underline{P}_{ss})_{ii} \underline{s}_i} = k\rho_{ij} \cdot UGWO(\underline{s}_i) \quad (9)$$

由于(9)式之值随方向  $\underline{S}_i, \underline{S}_j$  的变化而变化, 不便于讨论。下面再定义一个与方向无关的充分可区分性数值:

$$UGW_{max} = k\rho_{max} \cdot UGWO(\underline{s}_i)_{max} \quad (10)$$

此外, 还可以直接根据相关系数将粗差和系统误差区分可能性划分成三类:

- 区分性好:  $\rho_{ij_{max}} \leq 75\%$ ;
- 区分性差:  $75\% < \rho_{ij_{max}} \leq 100\%$ ;
- 不可区分:  $\rho_{ij_{max}} = 100\%$ 。

其中  $p_i$  表示所研究的粗差向量的维数。

### 3. 利用PAT-B程序计算 $(\underline{P}_{ss})_{ij}$ 矩阵的方法

从上列研究区分可能性公式(2)~(10)看出, 矩阵  $(\underline{P}_{ss})_{ij}$  的计算是最主要最基本的。由(2)式知, 欲求  $(\underline{P}_{ss})_{ij}$  必须先求  $\underline{Q}_{vv}$  矩阵。当观测值多时, 计算  $\underline{Q}_{vv}$  矩阵是很费时的, 而且在现有大多数航测平差程序中这又是不可可能的。

因此, 在本文研究中采用了不经过  $\underline{Q}_{vv}$  直接求矩阵  $(\underline{P}_{ss})_{ij}$  的一种特殊算法, 从而使本文的研究得以实现的可能。但此时需假定  $\underline{P}$  为对角线矩阵。

#### 1) 计算矩阵 $(\underline{P}_{ss})_{11}$

对于粗差, 其相应的备选假设矩阵为:

$$\underline{H}_i = (\underline{e}_1 \underline{e}_2 \cdots \underline{e}_{p_i}), \quad \underline{e}_i^T = (0, 0, \dots, 0, \overset{\text{第 } i \text{ 个}}{\downarrow} 1, 0, \dots, 0) \quad (11)$$

于是我们可以得到:

$$(\underline{P}_{ss})_{11} = \underline{H}_i^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{H}_i = \begin{vmatrix} \underline{e}_i^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_i^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_{p_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{e}_{p_i}^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_{p_i}^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_{p_i} \end{vmatrix} \quad (12)$$

如果在不带自检校光束法区域网平差(利用无误差的模拟数据)中, 每次引入单个粗差  $\underline{e}_i$ , 则平差后得到的改正数向量为:

$$\underline{V}_i = -\underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_i \quad (13)$$

在权矩阵  $\underline{P}$  为对角线矩阵假设下,  $(\underline{P}_{ss})_{11}$  矩阵的第  $i$  列元素为:

$$\underline{e}_j^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_i = -P_j V_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, p_i \quad (14)$$

于是经过  $p_i$  次不带自检校的平差计算便可求得矩阵  $(\underline{P}_{ss})_{11}$ 。

#### 2) 计算矩阵 $(\underline{P}_{ss})_{12}$

类似 1) 条, 可直接写出

$$(\underline{Pss})_{12} = \underline{H}_1^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{H}_2 = \begin{pmatrix} \underline{e}_1^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{h}_{21} \cdots \underline{e}_1^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{h}_{2p_2} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \underline{e}_{p_1}^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{h}_{21} \cdots \underline{e}_{p_1}^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{h}_{2p_2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

若在不带自检校的光束法平差中每次引入某一系统误差  $\underline{h}_{2i}$  ( $i = 1, 2, \dots, p_2$ ), 则可由下式求出  $(\underline{Pss})_{12}$  矩阵的第  $i$  列元素:

$$\underline{e}_j^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{h}_{2i} = -P_j V_{ji}, \quad j = 1, 2 \cdots p_1 \quad (16)$$

于是经过  $p_2$  次不带自检校的平差计算便可求得矩阵  $(\underline{Pss})_{12}$ 。

### 3) 计算矩阵 $(\underline{Pss})_{22}$

由于 PAT-B 程序可求出附加参数的协因素阵  $(\underline{Qss})_{22}$ , 所以只要对该协因素阵求逆便得到附加参数权矩阵  $(\underline{Pss})_{22}$ 。这意味着只要做一次带附加参数的自检校平差。

总的计算量为  $p_1 + p_2$  次不带附加参数的光束法平差和一次带附加参数的自检校平差。由于我们主要讨论控制点粗差与象片系统误差的区分可能性, 所以这种方法在计算过程中是十分有利的。

## 三、控制点粗差和象片系统误差间的最大相关系数和可区分性数值

根据上列的计算公式和算法求出了从单个控制点坐标粗差与单个系统误差, 直至三个控制点上的九个坐标粗差与所有可测定的系统误差之间的最大相关系数和充分可区分性数值 (见文献 [3])。

表 4 不同控制点布设和摄影飞行方案下附加参数的可测定性结果

在不同的几何条件下可测定的附加参数是通过一维的可测定性检验选出的, 其结果列于表 4。表中结果表明, 十字交叉飞行时, 不论控制点间距如何, 12 个附加参数均有较好的可测定性。相邻航带的飞行方向对附加参数的可测定性有影响, 若不改变飞行方向 (或飞机转弯后将摄影机转  $180^\circ$ ), 则有较多的可测定附加

	$i=12b$	$i=6b$	$i=4b$	$i=2b$	$i=2d$
E20 (E20D)	$b_4 b_5 b_7 b_8$	$b_4 b_5 b_7$	$b_4 b_5 b_7$	$b_4 b_5 b_7$	-
	8	9	9	9	12
E60	$b_4 b_5 b_8$	$b_4 b_5$	$b_4 b_5$	$b_4 b_5$	
	9	10	10	10	
E60G	$b_8$	-	-	-	
	11	12	12	12	
D20	-	-	-	-	
	12	12	12	12	

上行: 不可测定的附加参数;  
下行: 可测定附加参数的个数。

参数。总之，对附加参数的可测定性而言，起决定作用的是摄影飞行方式。

图4作为示例，列出了在极稀疏控制下单个控制点粗差与所有可测定系统象片误差之相关系数和充分可区分性数值。

图中方案E60G就是与本文开头所举示例完全相同的几何条件。在这里，相关系数达到100%，因而控制点平面粗差在这种几何条件下将是不可能与系统象片误差相区分的。两者结论的完全一致实际上已验证了上述算法的正确性。

表5a—5d列出多个控制点上的粗差与所有可测定系统误差之间的总体和最大相关系数，以及充分可区分性数值。表中E20D为20%旁向重叠的单区域中所有摄测点均为双点的情况。从表中可看出，当控制点稀疏时，采用双点的方法能明显地改善粗差的

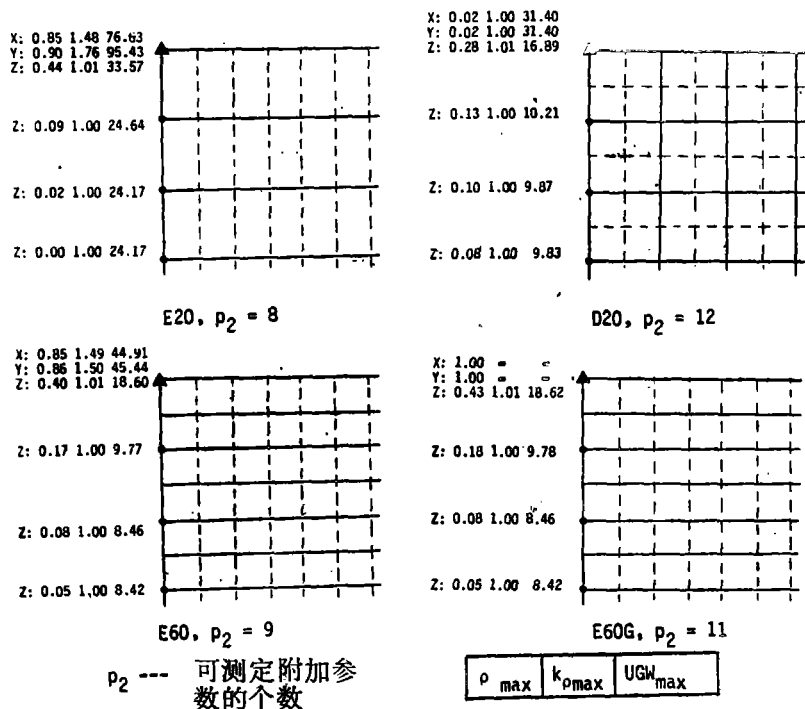
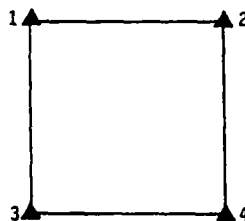


图4 单个控制点坐标粗差和所有可测定附加参数之间的相关系数和充分可区分性数值 ( $i/b = 12$ )

表5a 两个控制点上的粗差与所有可测定附加参数之间的最大相关系数和充分可区分性数值 ( $i/b = 12$ )

控制点		平面					平面 + 高程				
		$\rho_G$	$\rho_{max}$	$k_{\rho_{max}}$	$UGW_{max}$	$UGW_{max}$	$\rho_G$	$\rho_{max}$	$k_{\rho_{max}}$	$UGW_{max}$	$UGW_{max}$
1, 2	E20	0.59	1.00	=	129.25	=	(DSS) 11 ist singularär				
	E60	0.58	1.00	=	64.53	=	0.56	1.00	=	64.53	=
	E60G	0.78	1.00	=	64.53	=	0.72	1.00	=	64.53	=
	D20	0.01	0.03	1.00	69.25	69.25	0.16	0.48	1.01	69.25	70.23
	E20D	0.07	0.14	1.00	8.15	8.17	0.09	0.17	1.00	16.66	16.73
1, 3	E20	0.59	1.00	=	130.53	=	0.58	1.00	=	130.53	=
	E60	0.58	1.00	=	64.46	=	0.55	1.00	=	64.83	=
	E60G	0.78	1.00	=	64.46	=	0.72	1.00	=	64.83	=
	D20	0.01	0.03	1.00	69.15	69.15	0.14	0.40	1.01	69.22	69.91
	E20D	0.07	0.14	1.00	8.14	8.16	0.09	0.18	1.00	16.06	16.13
1, 4	E20	0.59	1.00	=	86.03	=	0.58	1.00	=	86.03	=
	E60	0.58	1.00	=	41.23	=	0.55	1.00	=	42.09	=
	E60G	0.78	1.00	=	41.23	=	0.72	1.00	=	42.09	=
	D20	0.01	0.03	1.00	44.79	44.79	0.14	0.40	1.01	44.79	45.24
	E20D	0.07	0.14	1.00	8.15	8.16	0.09	0.19	1.00	16.06	16.13





可发现性和与系统误差的可区分性。但双点的采用不能增加可测定附加参数的个数。当控制点较密集时,利用交叉飞行,既可改善粗差和系统误差区分可能性,又可改善系统误差的可测定性。由于多个高程控制点(2或3个)的粗差与可测定系统误差一般相关不大,它总有较好的可区分性,因此其结果不再列举。

表5b 两个或三个控制点上的粗差与所有可测定系统误差之间的  
相关系数和充分可区分性数值 (i/b = 6)

控制点		平面					平面十高程				
		$\rho_G$	$\rho_{max}$	$k_{pmax}$	UGMO <sub>max</sub>	UGM <sub>max</sub>	$\rho_G$	$\rho_{max}$	$k_{pmax}$	UGMO <sub>max</sub>	UGM <sub>max</sub>
1,2	E20	0.48	0.85	1.47	31.75	46.82	0.46	0.85	1.48	40.69	60.28
	E60	0.45	0.78	1.16	19.83	22.93	0.43	0.78	1.16	23.24	26.94
	E60G	0.44	0.80	1.25	19.83	24.85	0.42	0.80	1.25	23.24	29.15
	D20	0.01	0.03	1.00	-19.91	19.91	0.08	0.22	1.01	21.16	21.28
	E20D	0.16	0.28	1.01	7.94	7.99	0.15	0.28	1.01	15.45	15.56
1,4	E20	0.48	0.85	1.45	31.46	45.53	0.45	0.85	1.45	34.61	50.34
	E60	0.46	0.81	1.28	20.82	26.72	0.43	0.81	1.29	24.54	31.59
	E60G	0.47	0.84	1.40	20.82	29.07	0.43	0.84	1.40	24.54	34.36
	D20	0.02	0.04	1.00	19.76	19.76	0.06	0.14	1.00	21.10	21.14
	E20D	0.15	0.29	1.01	7.93	7.98	0.14	0.29	1.01	15.41	15.61
2,4	E20	0.49	0.88	1.65	17.47	28.88	0.45	0.88	1.66	22.64	37.49
	E60	0.46	0.82	1.31	12.03	15.81	0.43	0.82	1.32	15.39	20.33
	E60G	0.44	0.82	1.32	12.03	15.84	0.40	0.82	1.32	15.39	20.38
	D20	0.02	0.04	1.00	11.34	11.34	0.05	0.14	1.00	13.47	13.51
	E20D	0.19	0.35	1.01	6.83	6.90	0.17	0.35	1.01	9.19	9.27
1,2,3	E20	0.49	0.92	2.05	44.21	90.54	0.46	0.92	2.06	1226.9	2521.9
	E60	0.46	0.87	1.58	25.89	40.86	0.44	0.87	1.58	26.69	42.13
	E60G	0.49	0.90	1.78	25.89	45.99	0.47	0.90	1.78	26.69	47.44
	D20	0.02	0.04	1.00	28.69	28.69	0.11	0.34	1.01	28.76	28.99
	E20D	0.15	0.31	1.01	7.98	8.03	0.15	0.31	1.01	15.61	15.72
1,2,4	E20	0.51	0.97	3.16	47.69	150.53	0.48	0.97	3.16	49.01	155.07
	E60	0.50	0.95	2.48	28.96	71.78	0.47	0.95	2.49	30.37	75.47
	E60G	0.51	0.97	3.51	28.96	101.54	0.48	0.97	3.52	30.37	107.01
	D20	0.02	0.04	1.00	29.21	29.21	0.08	0.23	1.01	29.42	29.59
	E20D	0.18	0.37	1.01	7.97	8.05	0.17	0.37	1.01	15.40	15.60
1,4,6	E20	0.49	0.91	1.88	46.49	87.58	0.46	0.91	1.92	48.44	93.16
	E60	0.47	0.89	1.75	29.59	51.73	0.44	0.90	1.75	31.87	55.84
	E60G	0.52	0.91	1.87	29.59	55.41	0.43	0.91	1.88	31.87	59.83
	D20	0.02	0.04	1.00	28.39	28.39	0.07	0.19	1.00	29.06	29.20
	E20D	0.15	0.32	1.01	7.96	8.02	0.15	0.32	1.01	15.43	15.53

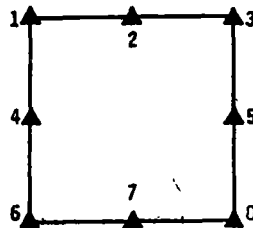


表5c 两个控制点上的粗差与所有可测定系统误差之间的相关系数和充分可区分性数值 ( $i/b = 4$ )

控制点		平面					平面+高程				
		$\rho_G$	$\rho_{\max}$	$k_{\max}$	$UGWO_{\max}$	$UGW_{\max}$	$\rho_G$	$\rho_{\max}$	$k_{\max}$	$UGWO_{\max}$	$UGW_{\max}$
1,2	E20	0.36	0.64	1.02	21.47	21.98	0.35	0.64	1.02	32.00	32.76
	E60	0.32	0.58	1.02	15.36	15.64	0.31	0.58	1.02	21.61	21.99
	E60G	0.32	0.60	1.02	15.36	15.66	0.31	0.60	1.02	21.61	22.01
	D20	0.02	0.04	1.00	14.53	14.53	0.06	0.16	1.00	18.63	18.63
	E20D	0.14	0.26	1.01	7.76	7.81	0.14	0.26	1.01	15.10	15.20
2,3	E20	0.41	0.74	1.05	13.51	14.19	0.38	0.75	1.05	21.45	22.55
	E60	0.37	0.67	1.03	10.89	11.19	0.35	0.68	1.03	14.46	14.86
	E60G	0.36	0.68	1.03	10.89	11.20	0.34	0.68	1.03	14.46	14.86
	D20	0.02	0.04	1.00	9.50	9.50	0.05	0.13	1.00	12.84	12.86
	E20D	0.18	0.31	1.01	6.66	6.71	0.16	0.32	1.01	9.07	9.15
1,5	E20	0.36	0.65	1.03	21.32	21.85	0.34	0.65	1.03	27.46	28.15
	E60	0.33	0.60	1.02	15.23	15.53	0.31	0.60	1.02	21.60	22.01
	E60G	0.33	0.61	1.02	15.23	15.54	0.31	0.61	1.02	21.60	22.05
	D20	0.02	0.03	1.00	14.49	14.49	0.04	0.11	1.00	17.06	17.07
	E20D	0.14	0.26	1.01	7.73	7.78	0.13	0.26	1.01	15.07	15.16
2,5	E20	0.37	0.67	1.03	11.93	12.26	0.35	0.68	1.03	18.42	18.93
	E60	0.33	0.61	1.02	9.53	9.73	0.31	0.62	1.02	13.94	14.24
	E60G	0.32	0.61	1.02	9.53	9.72	0.30	0.62	1.02	13.94	14.24
	D20	0.02	0.03	1.00	8.86	8.86	0.04	0.10	1.00	11.57	11.57
	E20D	0.17	0.32	1.01	6.52	6.56	0.16	0.32	1.01	8.94	9.00
5,7	E20	0.41	0.75	1.05	13.42	14.11	0.38	0.75	1.05	17.84	18.78
	E60	0.38	0.69	1.03	9.59	9.88	0.34	0.69	1.03	9.78	10.08
	E60G	0.37	0.70	1.03	9.59	9.88	0.33	0.70	1.03	9.78	10.08
	D20	0.01	0.03	1.00	9.54	9.54	0.04	0.11	1.00	11.05	11.06
	E20D	0.17	0.33	1.01	6.22	6.26	0.16	0.33	1.01	6.95	7.00

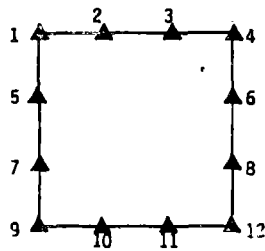


表5d 三个控制点上的粗差与所有可测定系统误差之间的相关系数和充分可区分性数值 (i/b = 4)

控制点		平面					平面 + 高程				
		$\rho_G$	$\rho_{max}$	$k_{\rho_{max}}$	$UGMO_{max}$	$UGM_{max}$	$\rho_G$	$\rho_{max}$	$k_{\rho_{max}}$	$UGMO_{max}$	$UGM_{max}$
1,2,3	E20	0.42	0.82	1.32	24.75	32.78	0.41	0.82	1.33	42.34	56.35
	E60	0.38	0.75	1.06	17.21	18.29	0.37	0.75	1.07	22.01	23.49
	E60G	0.38	0.77	1.11	17.21	19.10	0.38	0.77	1.11	22.01	24.52
	D20	0.02	0.04	1.00	16.93	16.93	0.07	0.22	1.01	19.89	20.00
	E20D	0.17	0.34	1.01	7.77	7.83	0.16	0.34	1.01	15.11	15.23
1,2,5	E20	0.41	0.81	1.29	32.35	41.65	0.40	0.81	1.30	35.94	46.70
	E60	0.38	0.76	1.11	20.70	22.88	0.36	0.77	1.10	24.09	26.70
	E60G	0.39	0.79	1.18	20.70	24.49	0.37	0.79	1.19	24.09	28.55
	D20	0.02	0.04	1.00	20.82	20.82	0.06	0.17	1.00	21.92	21.99
	E20D	0.16	0.33	1.01	7.82	7.89	0.15	0.33	1.01	15.14	15.24
1,5,7	E20	0.42	0.82	1.33	25.47	33.79	0.39	0.82	1.34	29.54	39.53
	E60	0.40	0.79	1.19	17.71	21.08	0.36	0.79	1.20	22.55	26.96
	E60G	0.40	0.80	1.24	17.71	21.89	0.37	0.80	1.24	22.55	28.02
	D20	0.02	0.04	1.00	16.88	16.88	0.05	0.14	1.00	18.35	18.38
	E20D	0.16	0.34	1.01	7.74	7.81	0.15	0.35	1.01	15.08	15.23

注：控制点点位同表5C所附之图。

### 四、可区分性与平差区域几何条件的依赖关系

根据所进行的大量计算结果，可以找出控制点粗差与系统误差的区分可能性与平差区域几何条件的依赖关系。

#### 1. 可区分性与控制布点和摄影飞行方案的关系

表 6 列出了控制点粗差和象片系统误差在不同的控制布点和摄影飞行方案时的最大相关系数（参见图 5），并由此而得出光束法区域的区分可能性。

表 6 不同的控制布点和摄影飞行方案下控制点粗差和象片系统误差的最大相关系数与光束法区域的区分可能性

控制点粗差	摄影方式	i/b = 12	i/b = 6	i/b = 4	i/b = 2	i/b = 2d
粗差在单个控制点上	E20	0.90	0.72	0.51	0.31	0.36
		区分性差	区分性好	区分性好	区分性好	区分性好
	E60	0.86	0.66	0.46	0.30	
		区分性差	区分性好	区分性好	区分性好	
	E60G	1.00	0.66	0.46	0.30	
	不可区分	区分性好	区分性好	区分性好		
	D20	0.28	0.13	0.09	0.08	
		区分性好	区分性好	区分性好	区分性好	

续表 6

粗差在 两个控 制点上	E20	1.00 不可区分	0.88 区分性差	0.75 区分性好	0.59 区分性好	0.50 区分性好
	E60	1.00 不可区分	0.82 区分性差	0.69 区分性好	0.45 区分性好	
	E60G	1.00 不可区分	0.84 区分性差	0.70 区分性好	0.45 区分性好	
	D20	0.28 区分性好	0.22 区分性好	0.16 区分性好	0.12 区分性好	
粗差在 三个控 制点上	E20	1.00 不可区分	0.97 区分性差	0.84 区分性差	0.77 区分性差	0.54 区分性好
	E60	1.00 不可区分	0.95 区分性差	0.79 区分性差	0.54 区分性好	
	E60G	1.00 不可区分	0.97 区分性差	0.80 区分性差	0.54 区分性好	
	D20	1.00 不可区分	0.34 区分性好	0.22 区分性好	0.15 区分性好	

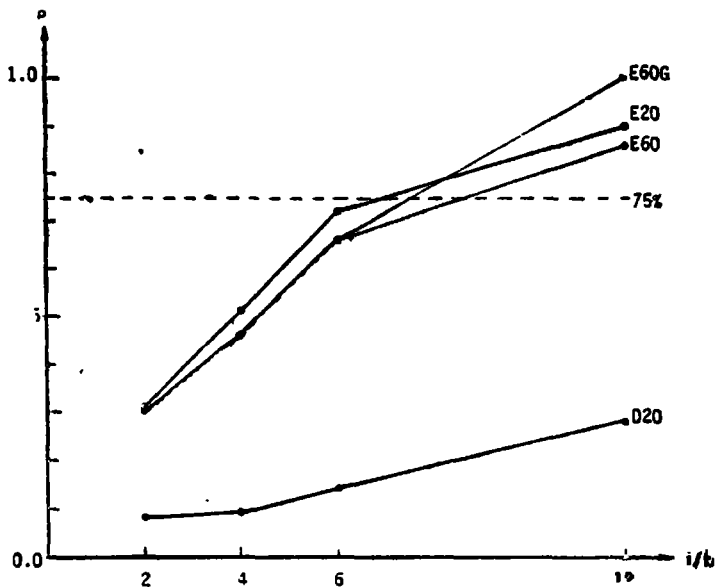


图5a 单个控制点上粗差与所有可测定系统误差的最大相关系数对于控制布点和摄影飞行方式的依赖关系

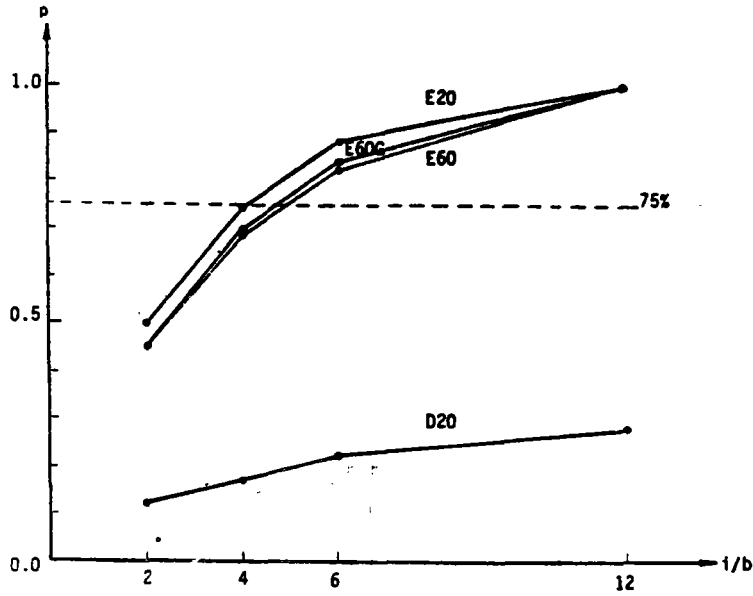


图5b 两个控制点上粗差与所有可测定系统误差的最大相关系数对于控制布点和摄影飞行方式的依赖关系

由表 6 和图 5 的结果可以得出如下结论：

- 1) 控制点的间距愈短，控制点上粗差与象片系统误差的可区分性愈好。
- 2) 控制点粗差与象片系统误差的可区分性不可能通过增大旁向重叠而明显地改善。它们只能部分地改善系统误差的可测定性（见表 4）。
- 3) 这种可区分性可通过十字交叉飞行而显著地改善，而且它几乎与控制点间距无关。还要指出的是，利用十字交叉飞行，所有 12 个附加参数均是可测定的，因此，对于高精度摄影测量加密应当优先考虑采用十字交叉飞行。它的工作量与具有 60% 旁向重叠的区域网平差大体上是相等的。

### 2. 可区分性与区域大小的关系

上面提及的研究中区域网均是等大的。如果一个摄影测量测区具有同样的系统误差，则可改变区域大小，以研究它对可区分性的影响作用。为此，取四个不同的区域大小（从  $3 \times 7$  到  $12 \times 25$  张象片），而且控制点间距保持相同（见图 6）。

通过模拟计算对这四种区域大小算出了控制点粗差与象片系统误差之间的相关系数和充分可区分性数值。图 7 形象地列出了控制点粗差和象片系统误差之间的最大相关系数对于区域大小的依赖关系，表 7 列出不同区域大小时附加参数的可测定性。从中可直接得出下列结论：

- 1) 区域愈大，系统误差的可测定性愈好。其原因在于摄影测量观测值的增加导致测定

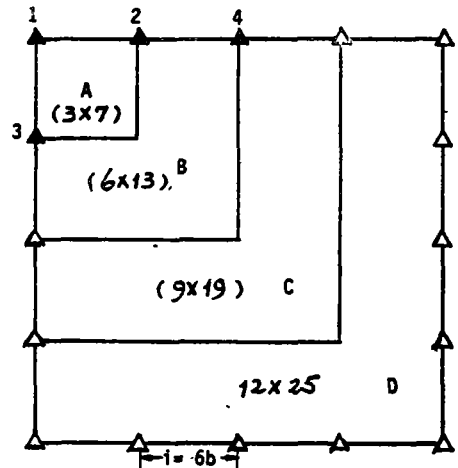


图 6 用作试验的不同区域大小

附加参数精度的提高。

表 7 不同区域大小时附加参数的可测定性  
( $E_{20}$ ,  $q = 20\%$ ,  $i = 6b$ ,  $\sigma_0 = 3\mu\text{m}$ )

Version	Größe	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_6$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$	$b_{11}$	$b_{12}$
E20A	3x7	7.94	7.95	1.18	1.84	-	1.77	2.32	2.12	1.88
E20B	6x13	2.27	1.93	0.57	0.74	0.98	0.83	0.91	1.01	0.96
E20C	9x19	1.19	0.98	0.38	0.48	0.63	0.55	0.59	0.67	0.64
E20D	12x25	0.77	0.63	0.28	0.36	0.46	0.42	0.43	0.50	0.48

2) 区域愈大, 控制点粗差与象片系统误差的可区分性愈好。这是因为对于系统误差处理成区域不变量时, 区域愈大, 系统误差愈可测, 控制点在保持相同间隔下, 其数量亦愈多。

### 3. 量测双点对可区分性的改善作用

以往的研究(文献[4])表明, 量测双点可改善发现粗差的可控性, 可以预期, 量测双点也会改善粗差和系统误差的可区分性。

以20%旁向重叠的单区域为例, 所有控制点和连接点均量测双点, 计算了其相关系数和充分可区分性数值。对于多个控制点粗差, 其结果列于表5中。

显然, 控制点粗差和象片系统误差的区分可能性(尤其在稀疏控制下)通过量测双点将得到十分明显的提高。譬如  $i/b = 12$  时, 两个控制粗差与系统误差的充分可区分性数值由原来的无穷大(不可区分)降到 8.176。从这个意义上讲, 双点对于改善可区分性比之改善可控性有更重要的作用。

对于量测双点的区域网平差, 最不利的情况是一个点组的两个点同时出现粗差, 此时它的可控性和可区分

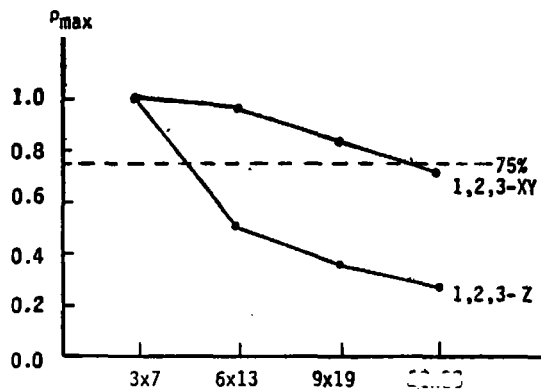
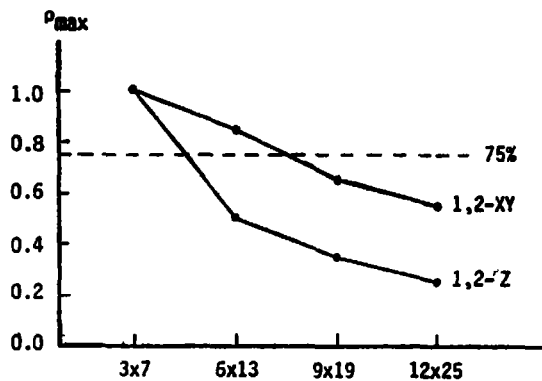
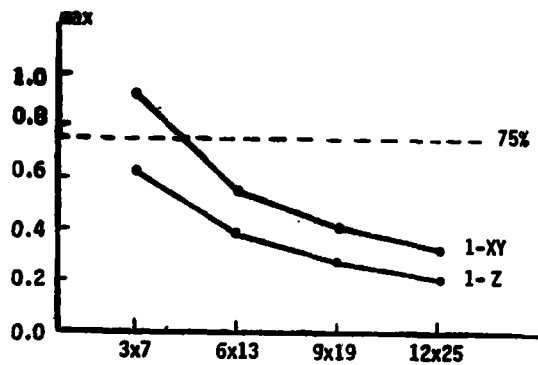


图 7 控制点粗差与象片系统误差之间的最大相关系数与区域大小关系

性数值相当于单点区域中单点粗差的结果。

此外还要指出，量测双点不能增加可测定附加参数的数量，它只能使可测定附加参数的可测定性提高到 $\sqrt{2}$ 倍。

总之在薄弱的几何条件下，量测双点对于确保平差系统的可靠性和可区分性是重要的。

### 五、象点坐标粗差和象片系统误差的可区分性

根据可靠性研究得知，象点坐标粗差一般要比控制点粗差容易发现。是否它也比控制点坐标更容易和象片系统误差相区分呢？这里以20%旁向重叠的单区域为例进行试验研究。

图8示出角隅、边沿和区域内部象点上粗差与所有可测定系统误差的总体相关和最大相

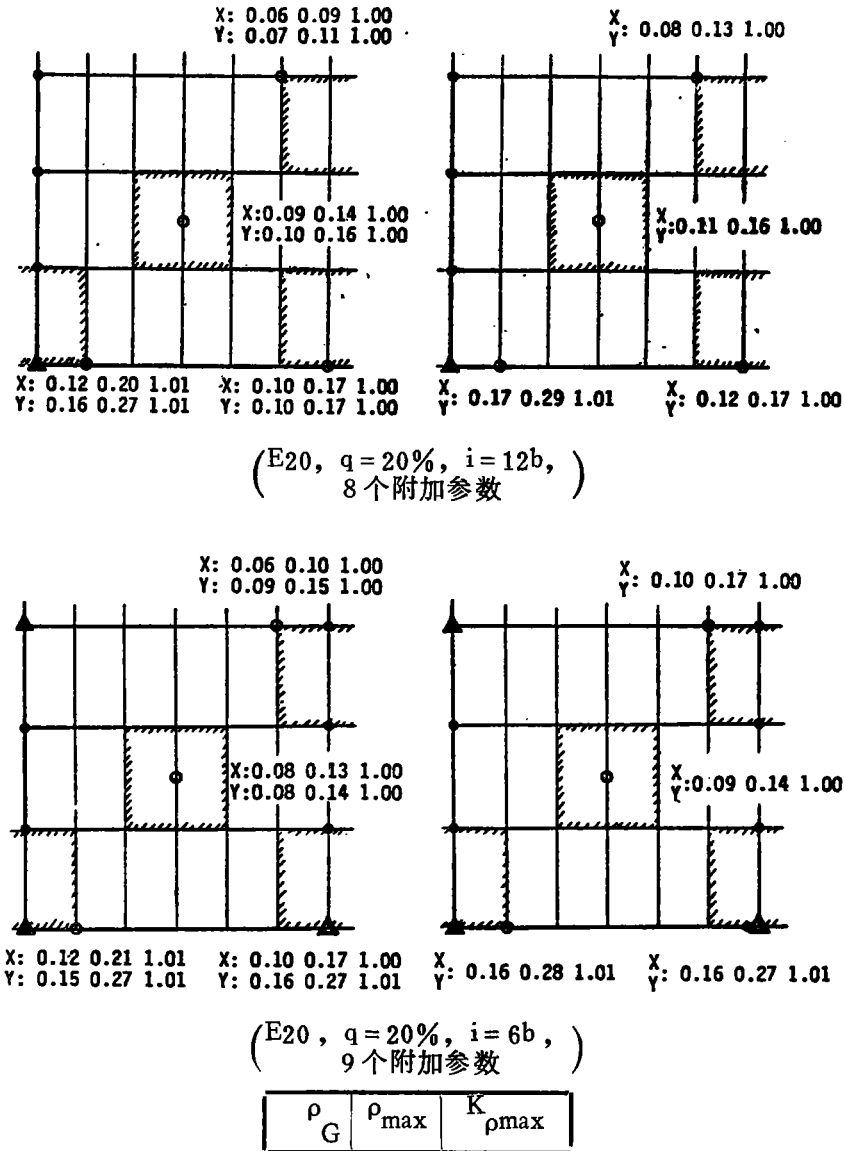


图8 象点坐标粗差和所有可测定象片系统误差的区分可能性

关值。可以明显地看出,即使在很弱的几何条件下,象点坐标粗差和系统误差均具有良好的可区分性。这就是本文中重点讨论控制点粗差和象片系统误差区分可能性的原因所在。

## 六、几点结论

通过光束法区域网平差中粗差和象片系统误差区分可能性的研究,可得出以下结论:

1、利用在两个备选假设下高斯—马尔可夫模型中模型误差的可区分性理论和本文提出的具体算法,可研究摄影测量平差的可靠性和可区分性。这种研究对于测区规划和最优化设计是有意义的。

2、象点坐标粗差能够较好地与象片系统误差相区分,而控制点粗差则往往不容易与象片系统误差区分。

3、控制点粗差和象片系统误差的区分可能性取决于区域的几何条件,可以通过下列措施来改善其可区分性:

1) 采用十字交叉的摄影飞行。这将同时改善系统误差的可测定性以及粗差和系统误差的可区分性。

2) 采用量测双点的方式,可以明显地改善可区分性和可控性。尤其对于弱的几何条件,其收效十分明显。

3) 采用尽可能大的区域进行平差。它具有多方面的优点:区域内部的精度均匀;节省区域内部平面点却不导致精度的明显下降;改善多个粗差的可控性;以及明显改善控制点粗差和系统误差的可区分性。

4) 文献[3]的研究还表明,控制点粗差之间的可区分性(亦即可定位性),一般比粗差与象片系统误差的可区分性差。这就是说,如果粗差能够与其它粗差区分而正确定位的话,它们就一定能够与象片系统误差相区分。因此研究光束法区域网平差粗差定位可能性是十分必要的。

本文根据笔者在西德所作博士论文的一部分整理而成,以祝贺我的老师王之卓教授七十五寿辰。

## 参 考 文 献

[1] 李德仁, 高斯—马尔可夫模型含两个备选假设时的区分可能性和可靠性理论, 测绘学报, Vol.14, No.2, 1985.

[2] H. Ebner, Self Calibrating Block Adjustment, BuL, 44, 1976.

[3] 李德仁, Theorie und Untersuchung der Trennbarkeit von groben Paßpunktfehlern und systematischen Bildfehlern bei der photogrammetrischen Punktbestimmung, Dissertationsschrift, Institut für Photogrammetrie, Stuttgart, 1985.

[4] R. Schroth, Innere Zuverlässigkeit von Photogrammetrischen Blöcken, Schriftenr. Inst. f. Photogrammetrie, Heft 7, Stuttgart, 1981.



## Trennbarkeit von Groben Fehlern und Systematischen Bildfehlern bei der Bündelblockausgleichung

*Li Deren*

### **Zusammenfassung**

Mit der Theorie der Trennbarkeit von Modellfehlern im Gauß-Markoff-Modell wurde die Trennbarkeit von groben Fehlern und systematischen Bildfehlern bei der Bündelblockausgleichung untersucht. Die Abhängigkeit dieser Trennbarkeit von Paßpunkt- und Bildfluganordnung sowie von der Blockgröße wurde diskutiert und daraus wurden einige Möglichkeiten zur Verbesserung der Trennbarkeit gezogen. Diese Untersuchung ist für die hochgenane photogrammetrische Punktbestimmung von großer Bedeutung.