加权广义逆与秩亏网平差

於宗俦　于正林

摘　　要

本文叙述了加权广义逆矩阵的概念。由加权广义逆与线性方程组的解之间的关系，说明了三种秩亏网平差（普通秩亏网平差、拟稳平差、加权秩亏网平差）同属于加权秩亏网平差，只是它们各自选取了不同的权阵P_X，因此均可用加权广义逆来解释它。

一、引言

在无起始数据的秩亏网平差中，广义逆矩阵起着重要的作用。在线性代数中讨论线性方程组的解时，一般均不涉及带权的问题。但在测量平差中，观测值向量L或未知数向量X往往具有先验权阵P或P_x，因此，在讨论线性方程组的解时，必须引入加权广义逆的概念。

本文先叙述加权广义逆的概念，进而说明普通秩亏网平差、拟稳平差和加权秩亏网平差之间的联系和区别。这样有助于理解和解释它们的特点。

二、加权广义逆的概念

广义逆矩阵的定义如下：

设有矩阵$\underset{m\times n}{A}$，如果有一个矩阵$\underset{n\times m}{G}$，它能满足如下4个方程

$$\left.\begin{aligned} &AGA=A && ①\\ &GAG=G && ②\\ &(AG)^T=AG && ③\\ &(GA)^T=GA && ④ \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

中的任意一个或其中几个，则称G为A的广义逆矩阵。

对测量平差而言，其中主要的广义逆有

（1）最小二乘g逆（A_l^-），$A_l^-\in G\{1,3\}$；

（2）最小范数g逆（A_m^-），$A_m^-\in G\{1,4\}$；

（3）最小二乘最小范数g逆，又称伪逆（A^+）$A^+\in G\{1,2,3,4\}$。

仿照广义逆矩阵的定义，即可给出加权广义逆矩阵的定义如下：

设有矩阵$\underset{m\times n}{A}$，如果有一个矩阵$\underset{n\times m}{G_P}$，它能满足如下四个方程

本文1984年10月收到.

$$\left.\begin{aligned} &AG_PA = A && (a)\\ &G_PAG_P = G_P && (b)\\ &(PAG_P)^T = PAG_P && (c)\\ &(G_PAQ_x)^T = G_PAQ_x && (d)^* \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

中的任意一个或其中几个，则称G_P为A的加权广义逆矩阵。式中矩阵P、Q_x 的具体含义见下文。

对测量平差而言，其中主要的加权广义逆有

（1）加权最小二乘 g 逆（A_P^l），$A_P^l \in G_P\{a, c\}$；

（2）加权最小范数 g 逆（A_P^m），$A_P^m \in G_P\{a, d\}$；

（3）加权伪逆（A_P^+），$A_P^+ \in G_P\{a, b, c, d\}$。

易知，上述三种加权广义逆矩阵仍然是广义 g 逆（A^-）集合中的子集。

下面讨论加权广义逆与线性方程组的解的关系。

（1）矛盾方程组有无穷多组加权最小二乘解$\hat{X}$

矛盾方程$AX = b$（观测方程是矛盾方程）在$V^TPV = \min$下的最优近似解为

$$\hat{X} = (A^TPA)^-A^TP \cdot b, \quad (3)$$

设A_P^l为矩阵A的加权最小二乘 g 逆，则

$$(A^TPA)^-A^TP \in A_P^l, \quad (4)$$

$$\hat{X} = A_P^l b。 \quad (5)$$

证： a) $A(A^TPA)^-A^TPA = A$,

令 $A(A^TPA)^-A^TPA - A = C$,

则
$$\begin{aligned} C^TPC &= (A(A^TPA)^-A^TPA - A)^TP(A(A^TPA)^-A^TPA - A)\\ &= (A^TPA(A^TPA)^-A^T - A^T)PA((A^TPA)^-A^TPA - E)\\ &= (A^TPA \cdot (A^TPA)^- \cdot A^TPA - A^TPA)((A^TPA)^-A^TPA - E)\\ &= (A^TPA - A^TPA)((A^TPA)^-A^TPA - E)\\ &= 0, \end{aligned}$$

由 P 的正定性决定了

$$C = 0,$$

即得 $A(A^TPA)^-A^TPA = A$。

c) $(PAA_P^l)^T = PAA_P^l$,

$$\begin{aligned} (PAA_P^l)^T &= (PA(A^TPA)^-A^TP)^T\\ &= PA(A^TPA)^-A^TP\\ &= PAA_P^l。 \end{aligned}$$

（2）相容方程组有唯一的加权最小范数解$\hat{X}$

相容方程$AX = b$（法方程是相容方程）在$X^TP_xX = \min$ 下的解$\hat{X}$为

$$\hat{X} = Q_xA^T(AQ_xA^T)^- \cdot b, \quad (6)$$

式中 $Q_x = P_x^{-1}$。

*文献（7）（P.422）定义的加权广义逆的第 4 个等式是$(P_xG_PA)^T = P_xG_PA$，可以证明该式与本文定义的（d）式等价。

设A_P^m为矩阵A的加权最小范数 g 逆，则

$$Q_xA^T(AQ_xA^T)^- \in A_P^m \text{，} \tag{7}$$

$$\hat{X} = A_P^m b \text{。} \tag{8}$$

A_P^m 不唯一，但可证明，$\hat{X} = A_P^m b$ 是唯一的。

证明 $Q_xA^T(AQ_xA^T)^- \in A_P^m$，只要证明$A_P^m$ 满足加权广义逆定义的（a）、（d）两个等式。具体证明可仿照 $(A^TPA)^-A^TP \in A_P^l$ 的证明，此处从略。

公式（3）、（6）的导出过程，可参阅〔7〕。

（3）矛盾方程组有唯一的加权最小二乘最小范数解 $\hat{X}$

求矛盾方程组$AX=b$ 同时满足 $V^TPV=\min$ 和 $X^TP_xX=\min$ 下的解。由（1）知，矛盾方程

$$AX=b$$

有无穷多组加权最小二乘解

$$\hat{\hat{X}} = A_P^l b \text{，}$$

式中 $A_P^l \in G_P\{a, c\}$。等式两边左乘A，则得

$$A\hat{\hat{X}} = AA_P^l b \text{，}$$

上式为一相容方程组。由（2）知，相容方程组有唯一的加权最小范数解

$$\hat{X} = A_P^m AA_P^l b \text{。} \tag{9a}$$

设A_P^+为矩阵A的加权伪逆，又称加权最小二乘最小范数 g 逆。则

$$A_P^m AA_P^l = A_P^+ \text{，} \tag{9}$$

$$\hat{X} = A_P^+ b \text{。} \tag{10}$$

证：a) $AA_P^+A = AA_P^mA \cdot A_P^lA = AA_P^lA = A$；

b) $$\begin{aligned} A_P^+AA_P^+ &= A_P^m \cdot AA_P^lA \cdot A_P^mAA_P^l \\ &= A_P^m \cdot AA_P^mA \cdot A_P^l \\ &= A_P^mAA_P^l \\ &= A_P^+ \text{；} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} (PAA_P^+)^T &= (PAA_P^mAA_P^l)^T = (PAA_P^l)^T \\ &= (PA(A^TPA)^-A^TP)^T = PA(A^TPA)^-A^TP \\ &= PAA_P^+ \text{；} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} (A_P^+AQ_x)^T &= (A_P^mAA_P^lAQ_x)^T = (A_P^mAQ_x)^T \\ &= (Q_xA^T(AQ_xA^T)^-AQ_x)^T = Q_xA^T(AQ_xA^T)^-AQ_x \\ &= A_P^+AQ_x \text{。} \end{aligned}$$

三、加权广义逆与加权秩亏网平差

在平差无起始数据的秩亏网时，设有观测方程

$$Bx + l = 0 \text{，} \tag{11}$$

法方程

$$Nx+W=0 \ 。\tag{12}$$

已知观测值L向量具有权阵 P，未知数 x 向量具有先验权阵P_x。有了加权广义逆的概念，就可立即得出未知数向量 x 的计算公式。由法方程得

$$\hat{x}=-N_P^m W \ 。\tag{13}$$

由观测方程得

$$\hat{x}=-B_P^+ l \ 。\tag{14}$$

文献〔4〕、〔5〕已导出了加权秩亏网平差的具体计算公式。由直接解法得

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}=-P_x^{-1}N_1^T Q_{R_1}W_1\\&Q_{\hat{x}}=P_x^{-1}N_1^T Q_{R_1}N_{11}Q_{R_1}N_1P_x^{-1}\end{aligned}\right\},\tag{15}$$

式中　$Q_{R_1}=(N_1P_x^{-1}N_1^T)^{-1}$ 。

由假观测值法（附加条件法）得

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}=-Q_R W\\ \text{或}\quad&\hat{x}=-Q_R B^T P l\\&Q_{\hat{x}}=R_R-GG^T\end{aligned}\right\},\tag{16}$$

式中　$Q_R=(N+P_xGG^TP_x)^{-1}$，附加阵G应满足条件

$$\left.\begin{aligned}&BG=0\\&G^TP_xG=E\end{aligned}\right\} 。\tag{17}$$

由加权广义逆矩阵的概念可知，(15)、(16)式具有如下性质：

（1）$[P_x^{-1}N_1^TQ_{R_1}\quad 0]\in N_P^m$；

（2）$Q_RP_xG=G$；

（3）$Q_R\in N_P^m$；

（4）$Q_{\hat{x}}=Q_R-GG^T\in N_P^m$；

（5）$Q_RB^TP=B_P^+$ 。

现证明如下：

（1）由（7）式得

$$N_P^m=Q_xN^T(NQ_xN^T)^- ,\tag{18}$$

令

$$\underset{t\times t}{N}=\begin{pmatrix}\underset{t_0\times t_0}{N_{11}} & \underset{t_0\times d}{N_{12}}\\ \underset{d\times t_0}{N_{21}} & \underset{d\times d}{N_{22}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underset{t_0\times t}{N_1}\\ \underset{d\times t}{N_2}\end{pmatrix},$$

且有$R_{ank}(N_{11})=R_{ank}(N_1)=R_{ank}(N)=t_0$，则

$$(NQ_xN^T)^-\ni\begin{pmatrix}(N_1Q_xN_1^T)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{R_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

代入（18）式即得

$$N_P^m \ni Q_x \left[N_1^T \; N_2^T \right] \begin{bmatrix} Q_{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[Q_x N_1^T Q_{R_1} \quad 0 \right],$$

顾及$Q_x = P_x^{-1}$，则

$$N_P^m \ni \left[P_x^{-1} N_1^T Q_{R_1} \quad 0 \right]。 \tag{19}$$

（2）由$Q_R(N + P_x GG^T P_x) = E$，

得 $$Q_R N + Q_R P_x GG^T P_x = E,$$

右乘G 阵得

$$Q_R B^T PBG + Q_R P_x GG^T P_x G = G,$$

顾及$BG = 0$和$G^T P_x G = E$，则得

$$\left.\begin{array}{l} Q_R P_x G = G \\ G^T P_x Q_R = G^T \end{array}\right\}。 \tag{20}$$

或

（3） a) $N Q_R N = N$，

$$\begin{aligned} NQ_R N &= (N + P_x GG^T P_x - P_x GG^T P_x) Q_R N \\ &= (E - P_x GG^T P_x Q_R) N \\ &= N - P_x GG^T B^T PB \\ &= N。 \end{aligned}$$

d) $(Q_R N Q_x)^T = Q_R N Q_x$，

$$\begin{aligned} (Q_R N Q_x)^T &= (Q_R (N + P_x GG^T P_x - P_x GG^T P_x) Q_x)^T \\ &= ((E - Q_R P_x GG^T P_x) Q_x)^T \\ &= (Q_x - GG^T)^T \\ &= Q_x - GG^T \\ &= Q_R N Q_x。 \end{aligned}$$

（4） a) $NQ_{\hat{x}} N = N$，

$$\begin{aligned} NQ_{\hat{x}} N &= N(Q_R - GG^T) N \\ &= NQ_R N - B^T PBGG^T N \\ &= NQ_R N \\ &= N。 \end{aligned}$$

d) $(Q_{\hat{x}} N Q_x)^T = Q_{\hat{x}} N Q_x$，

$$\begin{aligned} (Q_{\hat{x}} N Q_x)^T &= ((Q_R - GG^T) N Q_x)^T \\ &= (Q_R N Q_x)^T \\ &= Q_R N Q_x \\ &= Q_{\hat{x}} N Q_x。 \end{aligned}$$

（5） a)
$$\begin{aligned} BQ_R B^T PB &= BQ_R N \\ &= BQ_R (N + P_x GG^T P_x - P_x GG^T P_x) \\ &= B(E - Q_R P_x GG^T P_x) \\ &= B(E - GG^T P_x) = B - BGG^T P_x \end{aligned}$$

$= B$ 。

b)　$Q_R B^T P B Q_R B^T P = Q_R N Q_R B^T P$

$= (E - Q_R P_x G G^T P_x) Q_R B^T P$

$= Q_R B^T P - Q_R P_x G G^T P_x Q_R B^T P$

$= Q_R B^T P - G G^T B^T P$

$= Q_R B^T P$ 。

c)　$(P B Q_R B^T P)^T = P B Q_R B^T P$ 。

d)　$(Q_R B^T P B Q_x)^T = (Q_R N Q_x)^T$

$= Q_R N Q_x = Q_R B^T P B Q_x$ 。

可见，由（15）、（16）式求得的 $\hat{x}$，$Q_{\hat{x}}$ 与按加权广义逆求解的结果是一致的。

四、拟稳平差与加权秩亏网平差

在加权秩亏网平差的几种主要公式中，当 x 的先验权阵 P_x 为单位矩阵（$P_x = E$）时，即可得到

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= -N_1^T Q_1 W_1 \\ Q_{\hat{x}} &= N_1^T Q_1 N_{11} Q_1 N_1 \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

式中　$Q_1 = (N_1 N_1^T)^{-1}$ 。　(22)

和

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= -QW \\ Q_{\hat{x}} &= Q - GG^T \end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

式中　$Q = (N + GG^T)^{-1}$，此时附加阵G应满足条件

$$\left.\begin{aligned} BG &= 0 \\ G^T G &= E \end{aligned}\right\} 。 \tag{24}$$

以上诸式就是普通秩亏网平差时的计算公式〔1〕、〔2〕。加权广义逆也相应地变为一般的广义逆矩阵。

当 x 的先验权阵 P_X 为

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & \\ & E \end{pmatrix},$$

或为

$$P_x = \begin{pmatrix} E & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

或为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

时，式中O 矩阵为不稳定区中未知数的先验权阵，E 矩阵为拟稳区中未知数的先验权阵。则公式（16）

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= -Q_R W \\ Q_{\hat{x}} &= Q_R - GG^T \end{aligned}\right\}$$

可用于拟稳平差。以水准网为例，附加阵 G^T应为

$$G^T = \frac{1}{\sqrt{t_2}} \underbrace{[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]}_{t\text{ 个}}, \tag{25}$$

式中 t_2为 P_x阵中的主对角线元素之和，即为拟稳区中水准点的个数。t 为全网（拟稳区和非拟稳区）水准点的总数。

现证明公式（16）与文献〔3〕导出的拟稳平差公式是一致的。

先证明未知数 x 解的一致性。

设误差方程

$$V = Bx + l = [B_1 \quad B_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + l \tag{26}$$

则有法方程

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = 0 \quad 。 \tag{27}$$

文献〔3〕由上式导出非拟稳区的解向量

$$x_1 = \beta l = -\left(N_{11}^{-1} N_{12} x_2 + N_{11}^{-1} W_1\right), \tag{28}$$

拟稳区的解向量

$$x_2 = \bar{\alpha} l = -M_m^- \cdot \alpha^T l$$

式中 $\begin{cases} M = N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}\ \text{（}x_2\text{的约化法方程系数）} \\ \alpha^T l = W_2 - N_{21} N_{11}^{-1} W_1\ \text{（}x_2\text{的约化法方程的常数项）。} \end{cases}$ (29)

而由（16）可得

$$\hat{x} = -Q_R W,$$

与之对应的法方程是

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} + G^2 G_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = 0 \quad , \tag{30}$$

式中G_2是附加阵G中的一部分，即

$$G=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix},$$

且满足条件

$$\left.\begin{aligned}BG&=0\\G_2^TG_2&=E\end{aligned}\right\}\text{。}\tag{31}$$

由（30）式可得

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_1&=-(N_{11}^{-1}N_{12}\hat{x}_2+N_{11}^{-1}W_1)\\\hat{x}_2&=-(N_{22}+G_2G_2^T-N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})^{-1}\cdot\alpha^Tl\end{aligned}\right\},\tag{32}$$

若令

$$Q_R=\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix},$$

$$\hat{x}_2=-Q_{22}\cdot\alpha^Tl\text{。}\tag{33}$$

可见，要证明未知数解的一致性，只需证明

$$\hat{x}_2=x_2$$

即证明

$$Q_{22}\in M_m^-\text{。}$$

不难证明下列等式成立：

$$\begin{cases}Q_{22}G_2=G_2 & (34)\\Q_{22}M=E-G_2G_2^T & (35)\\MG_2=0\text{。} & (36)\end{cases}$$

因

$$\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_{11}&N_{11}\\N_{21}&N_{22}+G_2G_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix},$$

右乘$\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}N_{11}&N_{12}\\N_{21}&N_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&G_2G_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix},$$

顾及 NG = 0，则上式为

$$\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&O\\O&G_2G_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix},$$

将上式化简，并顾及 $G_2^TG_2=E$，则可得

$$\begin{pmatrix}Q_{12}G_2\\Q_{22}G_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix},$$

故（34）式成立。

由 $Q_{22}=(N_{22}+G_2G_2^T-N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})^{-1}$,

即　$Q_{22}((N_{22}-N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})+G_2G_2^T)=E$,

故　$Q_{22}M=E-Q_{22}G_2G_2^T$,

顾及（34）式则有

$$Q_{22}M=E-G_2G_2^T,$$

故（35）式成立。

由 $BG=0$ 得 $NG=0$，即

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}=0,$$

将第一式之 $G_1=-N_{11}^{-1}N_{12}G_2$ 代入第二等式即得

$$(N_{22}-N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})G_2=0,$$

故（36）式成立。

利用（34）～（36）式，很容易证明 $Q_{22}\in M_m^-$。

证：（1）　$MQ_{22}M=M(E-G_2G_2^T)$

$=M-MG_2G_2^T=M$。

（4）　$(Q_{22}M)^T=(E-G_2G_2^T)^T$

$=E-G_2G_2^T=Q_{22}M$。

可见 Q_{22} 是 x_2 约化法方程系数M的最小范数g逆。由最小范数解的唯一性，即得

$$\hat{x}_2=x_2 \quad 。$$

下面证明平差后未知数 $Q_{\hat{x}}$ 的一致性。

文献〔3〕导出

$$Q_x=\begin{pmatrix} \beta Q\beta^T & \beta Q\bar{\alpha}^T \\ \bar{\alpha}Q\beta^T & \bar{\alpha}Q\bar{\alpha}^T \end{pmatrix}, \tag{37}$$

且 $\bar{\alpha}Q\bar{\alpha}^T=M^+$。

将公式（16）

$$Q_{\hat{x}}=Q_R-GG^T \quad ,$$

改写成

$$Q_{\hat{x}}=\begin{pmatrix} Q_{11}-G_1G_1^T & Q_{12}-G_1G_2^T \\ Q_{21}-G_2G_1^T & Q_{22}-G_2G_2^T \end{pmatrix} \tag{38}$$

欲证明　$Q_{\hat{x}}=Q_x$，只要证明

$$Q_{22}-G_2G_2^T=\bar{\alpha}Q\bar{\alpha}^T=M^+ \quad 。$$

证：（1）$M(Q_{22}-G_2G_2^T)M=MQ_{22}M$

$=M(E-G_2G_2^T)=M$　。

（2）　$(Q_{22}-G_2G_2^T)M(Q_{22}-G_2G_2^T)=(Q_{22}-G_2G_2^T)MQ_{22}$

$=Q_{22}MQ_{22}=(E-G_2G_2^T)Q_{22}=Q_{22}-G_2G_2^T$。

（3） $[M(Q_{22}-G_2G_2^T)]^T=(MQ_{22})^T$

$=(E-G_2G_2^T)^T=E-G_2G_2^T$

$=M(Q_{22}-G_2G_2^T)$。

（4） $((Q_{22}-G_2G_2^T)M)^T=(Q_{22}M)^T$

$=(E-G_2G_2^T)^T=E-G_2G_2^T$

$=(Q_{22}-G_2G_2^T)M$。

由伪逆（+逆）的唯一性即得

$$Q_{22}-G_2G_2^T=M^+=\overline{\alpha}\,Q\,\overline{\alpha}^T。$$

因此，公式（16）与文献〔3〕导出的拟稳平差公式是一致的。

计算结果（下文）也表明了上述结论的正确性。

由以上讨论，可得如下初步结论：

（1）三种秩亏网平差，同属加权秩亏网平差，因此均可用加权广义逆的概念描述它。

（2）普通秩亏网平差与拟稳平差均为加权秩亏网的特殊情况，即各自选取了一些特殊的先验权阵 P_x。

（3）三种秩亏网的平差结果表明：P_x的取值不同，将得到不同的未知数向量$\hat{x}$，但观测值 L 的改正数向量V保持不变。

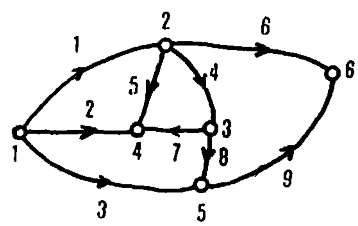
（4）公式（16）不仅具有通用的特点，而且还具有计算简捷的优点。这更利于编制三种秩亏网平差的通用程序，以达节省机时之目的。

五、算　例

有水准网如图（取自文献〔3〕）。观测高差 L_i及权 P_i，未知数 X 的近似值 X^0 列于表一。

表一

序	L_i(m)	P_i	X^0(m)
1	86.809	0.049	−0.0040
2	25.714	0.053	86.8060
3	31.225	0.029	14.8460
4	−71.952	0.067	25.7060
5	−61.084	0.070	31.2160
6	−44.178	0.040	42.6260
7	10.847	0.078	
8	16.350	0.102	
9	11.409	0.051	



误差方程V（= Bx + 1）

$$V=\begin{pmatrix}-1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot\\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot\\ \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1\\ \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-4\\-5\\-8\\-16\\-2\\13\\20\\1\end{pmatrix}\ (\mathrm{mm}),$$

法方程（Nx + W = 0）

$$\begin{pmatrix}0.131 & -0.049 & \cdot & -0.053 & -0.029 & \cdot\\ & 0.226 & -0.067 & -0.070 & \cdot & -0.040\\ & & 0.247 & -0.078 & -0.012 & \cdot\\ & & & 0.201 & \cdot & \cdot\\ & & & & 0.182 & -0.051\\ \text{对} & & & \text{称} & & 0.091\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0.308\\1.785\\-3.590\\-0.318\\1.844\\-0.029\end{pmatrix}=0,$$

三种秩亏网平差均用假观测值法计算，计算公式是：

法方程

$$(N+P_xGG^TP_x)\ \hat{x}+W=0,$$

其解

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}&=-Q_RW\\ Q_{\hat{x}}&=Q_R-GG^T\end{aligned}\right\},$$

式中 Q_R，G 阵与（16）式的说明相同。

1 、普通秩亏网平差

此时 $\begin{cases}P_x=E\ ,\\ G^T=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\ 。\end{cases}$

式中 6 为网中水准点的总数，即 P_x中主对角线元素之和。

法方程

$$\begin{pmatrix}0.2977 & 0.1177 & 0.1667 & 0.1137 & 0.1377 & 0.1667\\ & 0.3927 & 0.0997 & 0.0967 & 0.1667 & 0.1267\\ & & 0.4137 & 0.0887 & 0.0647 & 0.1667\\ & & & 0.3677 & 0.1667 & 0.1667\\ & & & & 0.3487 & 0.1157\\ \text{对} & & & \text{称} & & 0.2577\end{pmatrix}\hat{x}+\begin{pmatrix}0.308\\1.785\\-3.590\\-0.318\\1.844\\-0.029\end{pmatrix}=0,$$

其解

$$\hat{x} = [-3.36 \quad -4.37 \quad 12.67 \quad 4.08 \quad -4.77 \quad -4.25]^{T}\ (\mathrm{mm}),$$

$$Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 5.9747 & -0.3176 & -1.3546 & 0.1128 & -1.5295 & -2.8895 \\ & 3.3234 & -0.3684 & 0.1005 & -1.5161 & -1.2209 \\ & & 3.3634 & -0.0119 & 0.2305 & -1.8565 \\ & & & 4.2042 & -1.6720 & -2.7316 \\ & & & & 4.4686 & 0.0193 \\ \text{对} & & & & \text{称} & 8.6728 \end{pmatrix}。$$

2 、拟稳平差

此时

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}^{*}$$

而

$$G^{T} = \frac{1}{\sqrt{4}}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]。$$

式中 4 为 P_x 中主对角线之和，即拟稳区中水准点的总数。

法方程

$$\begin{pmatrix} 0.381 & 0.201 & \cdot & -0.053 & 0.221 & 0.250 \\ & 0.476 & -0.067 & -0.070 & 0.250 & 0.210 \\ & & 0.247 & -0.078 & -0.102 & \cdot \\ & & & 0.201 & \cdot & \cdot \\ & & & & 0.432 & 0.199 \\ \text{对} & & & \text{称} & & 0.341 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.308 \\ 1.785 \\ -3.590 \\ -0.318 \\ 1.844 \\ -0.029 \end{pmatrix} = 0$$

其解

$$\hat{x} = [0.81 \quad -0.17 \quad 16.87 \quad 8.28 \quad -0.57 \quad -0.07]^{T}\ (\mathrm{mm})$$

$$Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 5.7811 & -0.2345 & -0.3665 & 1.3005 & -1.7279 & -3.8187 \\ & 3.6626 & 0.8781 & 1.5545 & -1.4681 & -1.9601 \\ & & 5.5186 & 2.3507 & 1.1853 & -1.6970 \\ & & & 6.7716 & -0.5069 & -2.3481 \\ & & & & 4.2223 & -1.0262 \\ \text{对} & & & \text{称} & & 6.8050 \end{pmatrix}。$$

与文献〔3〕的计算结果相同。

3 、加权秩亏网平差

*由P_x可知，本例中，1、2、5、6、点为拟稳定点，3、4点为不稳定点。

设 x 的先验权阵为

$$P_x = \begin{pmatrix} 4 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

则 $$G^T = \frac{1}{\sqrt{16}}[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$$。

式中的16为P_x中主对角线元素之和。

法方程

$$\begin{pmatrix} 1.1310 & 0.9510 & 0.2500 & 0.1970 & 0.7210 & 0.7500 \\ & 1.2260 & 0.1830 & 0.1800 & 0.7500 & 0.7100 \\ & & 0.3095 & -0.0155 & 0.0855 & 0.1875 \\ & & & 0.2635 & 0.1875 & 0.1875 \\ & & & & 0.7445 & 0.5115 \\ \text{对} & & & \text{称} & & 0.6535 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.308 \\ 1.785 \\ -3.590 \\ -0.318 \\ 1.844 \\ -0.029 \end{pmatrix} = 0,$$

其解

$$\hat{x} = [-0.80\quad -1.78\quad 15.26\quad 6.67\quad -2.18\quad -1.69]^T\ (\text{mm}),$$

$$Q_{\hat{x}}^{\vee} = \begin{pmatrix} 5.0988 & -0.8781 & -1.1678 & 0.2746 & -1.8479 & -3.4821 \\ & 3.0578 & 0.1158 & 0.5673 & -1.5493 & -1.5847 \\ & & 4.5987 & 1.2061 & 0.9466 & -1.4791 \\ & & & 5.4022 & -0.9704 & -2.3549 \\ & & & & 4.6647 & -0.1272 \\ \text{对} & & & \text{称} & & 8.1608 \end{pmatrix}。$$

现将三种平差结果汇集于表二。由该表可知：三种秩亏网平差均满足$\sum P_{x_i}\hat{x}_i = 0$，且$\hat{x}^T P_x \hat{x} = \min$，即：

（1）普通秩亏网平差满足$\sum \hat{x}_i = 0$，且$\hat{x}\hat{x} = \min$和$tr(Q_{\hat{x}}) = \min$〔1〕、〔2〕。这是由于此时的$P_x = E$。

（2）拟稳平差满足$\sum \hat{x}_{1_i} = 0$，且$\hat{x}_1^T \hat{x}_1 = \min$和$tr\ (Q_{\hat{x}_1}) = \min$〔3〕。这是由于此时$p_{x_i} = 1$ (i = 1, 2, 5, 6)，p_{x_j} (j = 3, 4) = 0。

（3）加权秩亏网平差满足$\sum p_{x_i}\hat{x}_i = 0$，且有

*本例计算均在pc—1500机上进行。

表二

点号		普通秩亏网平差	拟稳平差	加权秩亏网平差
$\hat{X}_1$	1	-3.36^{mm}	0.81^{mm}	-0.80^{mm}
	2	-4.37	-0.17	-1.78
	5	-4.77	-0.57	-2.18
	6	-4.25	-0.07	-1.69
$\hat{X}_2$	3	12.67	16.87	15.26
	4	4.08	8.28	6.67
$\hat{X}^T\hat{X}$		**248.38**	354.17	288.77
$\hat{X}_1^T\hat{X}_1$		71.20	**1.01**	11.42
$\hat{X}^T P_X \hat{X}$		421.17	356.88	**315.42**
$tr(Q_{\hat{x}})$		**30.01**	32.76	30.98
$tr(Q_{\hat{x}_1})$		22.44	**20.47**	20.98

（表中 $\hat{X}$ 包括点 1、2、5、6、3、4 的全部分量。）

$\hat{x}^T P_x \hat{x} = \min$。对于本例则有

$$\hat{x}^T \begin{pmatrix} 4 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix} \hat{x} = \min。$$

参考文献

〔1〕於宗俦、鲁林成主编，《测量平差基础》，测绘出版社，1983.

〔2〕刘大杰，论亏秩自由网平差，《武汉测绘学院学报》，1，1981.

〔3〕周江文，监测网的拟稳平差，《中国科学院测量与地球物理研究所专刊》，第 2 号1980.

〔4〕丁怀日，加权亏秩自由网平差法，《武汉测绘学院学报》，1 1984.

〔5〕刘大杰、黄加纳指导的毕业设计，加权亏秩自由网平差和三角网按方向作亏秩自由网平差，武汉测绘学院，1983.

〔6〕南京大学数学系计算专业，《线性代数》，科学出版社，1978.
〔7〕黄琳，《系统与控制理论中的线性代数》，科学出版社，1984.
〔8〕陈永林，加权投影算子与加权广义逆矩阵，《应用数学学报》第六卷第三期，1983.

Weighted Generalized Inverse and Rank—Defect Net Adjustment

Yu Zongchou　　*Yu Zhenglin*

Abstract

The concept of weighted generalized inverse matrices is described in this paper. It is shown, from the relationship between weighted generalized inverse and solution of linear equations, that three kinds of rank—defect network adjustment(common used rank-defect network adjustment, quasi-stable adjustment, weighted rank-defect network adjustment) all belong to the weighted rank-defect net adjustment. But different weight matrices are selected in them. Therefore, they can all be explicated with weighted generalized inverse.