

顺序统计量极差的概率分布与闭合差的限值

张 方 仁

摘 要

为保证测量精度，对观测值要进行校核，主要是要求各种闭合差不能超过限值，现行规范对这些限值的规定因未考虑观测值的个数，因而是欠妥当的。本文应用数理统计的原理推导和计算了极差的概率分布，并根据它对观测值的外业校核提出了几点建议。

一、引 言

为保证测量精度，对一个观测量要进行多次重覆观测，规定其互差不能超过某一个限值，观测值的函数也必须满足一定的几何条件，因存在着观测误差，这些几何条件不能完全满足，也规定它的闭合差不应超过某一个限值。这些规定称为外业观测的检核，外业检核的要求规范上有详细的规定，其中有的规定已不能适应我国目前的测绘生产情况，从概率统计的观点来分析，有的规定也值得讨论。本文首先简要地推导了极差的概率分布，并用数值积分方法编制的电算程序计算出子样极差的分布函数，然后提出一种规定闭合差限值的标准，这个标准主要包括二点：一、闭合差及其互差的限值和闭合差的个数有关；二、闭合差数值的分布应与正态分布曲线基本一致。本文着重讨论三角形闭合差和水准测量往返高差闭合差的限值标准，但一些原则对于讨论其它闭合差的限值标准也同样是适用的。

二、顺序统计量极差的概率分布

为了便于理解应用极差的概率分布来规定闭合差限差的原理，本文首先对有关顺序统计量的概率分布作简要的推导。

设母体服从正态分布，分布函数为 $F(x)$ ，从中抽得一组子样 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，将它们按大小递增的次序排列

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^* \quad (1)$$

称 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 为一组顺序统计量，若以 $F_1(x)$ 、 $F_n(x)$ 和 $F_k(x)$ 表示第 1 位、第 n 位和第 k 位统计量的分布函数，则

$$F_1(x) = P(x_1^* < x) = 1 - P(x_1^* \geq x) = 1 - P(x_1 > x) \cdot P(x_2 > x) \dots$$

$$P(x_n \geq x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (2)$$

$$F_n(x) = P(x_n^* < x) = P(x_1 < x) \cdot P(x_2 < x) \dots P(x_n < x) = [F(x)]^n \quad (3)$$

若事件“子样 x_1, x_2, \dots, x_n 中有一个落在 $[x, x + \Delta x)$ 中， $k-1$ 个落在 $(-\infty, x)$ 中，其

余 $n-k$ 个落在 $[x+\Delta x, \infty)$ 中”的概率用 $P(x \leq x_i^* < x+\Delta x)$ 表示, 于是

$$\begin{aligned} \Delta F_k(x) &= P(x \leq x_i^* < x+\Delta x) \\ &= C_n^k \Delta F(x) C_{n-k}^{k-1} [F(x)]^{k-1} \cdot [1-F(x+\Delta x)]^{n-k} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } F_k(x) &= n \cdot C_n^{k-1} \int_{-\infty}^x [F(x)]^{k-1} [1-F(x+\Delta x)]^{n-k} dF(x) \\ &= n \cdot C_n^{k-1} \int_{-\infty}^x [F(x)]^{k-1} [1-F(x+\Delta x)]^{n-k} f(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

若 y_j 和 y_k 为数轴上的任意二点, 用 $G(y_j, y_k)$ 表示第 j 位和第 k 位统计量 x_j^* 和 x_k^* 的联合分布函数, 用 $\Delta G(y_j, y_k)$ 表示事件“子样 $x_1 x_2 \dots x_n$ 中有一个落在 $[y_j, y_j + \Delta y)$ 内, 有一个落在 $[y_k, y_k + \Delta y)$ 内, $j-1$ 个落在 $(-\infty, y_j)$ 内, $k-j-1$ 个落在 $[y_j + \Delta y, y_k)$ 内, 其余 $n-k$ 个落在 $[y_k + \Delta y, \infty)$ 内”的概率。于是

$$\begin{aligned} \Delta G(y_j, y_k) &= C_n^1 \Delta F(y_j) \cdot C_{n-1}^{k-1} \Delta F(y_k) \cdot C_{n-k}^{k-j-1} [F(y_k) - F(y_j)]^{k-j-1} \\ &\quad \cdot C_{n-k}^{j-1} [F(y_j)]^{j-1} [1-F(y_k)]^{n-k} = n \cdot (n-1) \\ &\quad \frac{(n-2)!}{(k-j-1)! (n-k+j-1)!} \cdot \frac{(n-k+j-1)}{(j-1)! (n-k)!} \\ &\quad \Delta F(y_j) \cdot \Delta F(y_k) [F(y_k) - F(y_j)]^{k-j-1} [F(y_j)]^{j-1} \\ &\quad [1-F(y_k)]^{n-k} = \\ &= \frac{n!}{(j-1)! (k-j-1)! (n-k)!} \Delta F(y_j) \Delta F(y_k) \\ &\quad [F(y_k) - F(y_j)]^{k-j-1} [F(y_j)]^{j-1} [1-F(y_k)]^{n-k} \end{aligned} \quad (6)$$

由上式可得:

$$\begin{aligned} G(y_j, y_k) &= \frac{n!}{(j-1)! (k-j-1)! (n-k)!} \int_{-\infty}^{y_j} \int_{-\infty}^{y_k} [F(y_k) - \\ &\quad - F(y_j)]^{k-j-1} [F(y_j)]^{j-1} [1-F(y_k)]^{n-k} dF(y_j) dF(y_k) \\ &= \frac{n!}{(j-1)! (k-j-1)! (n-k)!} \int_{-\infty}^{y_j} \int_{-\infty}^{y_k} [F(y_k) - \\ &\quad - F(y_j)]^{k-j-1} [F(y_j)]^{j-1} [1-F(y_k)]^{n-k} f(y_j) f(y_k) \\ &\quad dy_j dy_k \end{aligned} \quad (7)$$

对上式求二阶偏导数就得到联合分布精度。

$$\begin{aligned} g(y_j, y_k) &= \frac{n!}{(j-1)! (k-j-1)! (n-k)!} [F(y_k) - F(y_j)]^{k-j-1} \\ &\quad [F(y_j)]^{j-1} [1-F(y_k)]^{n-k} f(y_j) f(y_k) \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式是任意二个顺序统计量联合分布密度的公式, 它在求顺序统计量的数字特征和顺序统计量的函数的概率分布时有用处。令

$$R_n = x_n^* - x_1^* \quad \text{或} \quad R_n = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i) - \min_{1 \leq i \leq n} (x_i) \quad (9)$$

R_n 称为子样极差, 它是顺序统计量的函数, 类似的令

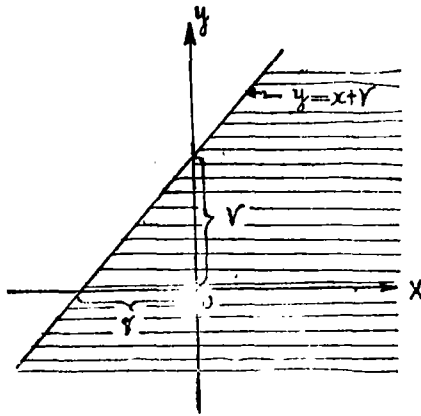
$$R_{n-(i-1)} = x_{n-(i-1)}^* - x_i^* \quad \left\{ \begin{array}{l} n \text{ 为偶数时 } i = 2 \dots \frac{n}{2} \\ n \text{ 为奇数时 } i = 2 \dots \frac{n-1}{2} \end{array} \right. \quad (10)$$

(10) 式定义的变量也是顺序统计量的函数。因为顺序统计量的概率分布已由 (2) — (8) 式给出, 根据这些公式就可求得 R_n 和 $R_{n-(i-1)}$ 的概率分布。

令 $x_n^* = y = x + r, \quad x_1^* = x$

则: $F_{R_n}(r) = P(R_n < r) = \iint_D g(y_1, y_n) dy_1 dy_n \quad (11)_1$

上式中的 D 是满足 $y - x < r$ 的区域, 即图一中虚线所示的部分。



图一

为推导公式方便起见, 用 $g(x, y)$ 表示 $g(y_1, y_n)$, 则:

$$F_{R_n}(r) = \iint_D g(x, y) dx dy = \iint_{y-x-r} g(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x+r} g(x, y) dy dx \quad (11)_2$$

对上式求导数

$$f_{R_n}(r) = \frac{dF_{R_n}(r)}{dr} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, x+r) dx \quad (12)$$

将 (8) 中 j, k 取 1, n 代入 (12) 式得

$$f_{R_n}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1) [F(x+r) - F(x)]^{n-2} f(x+r) f(x) dx \quad (13)$$

应用 (13) 式, 子样极差的分布函数可写成

$$F_{R_n}(r) = \int_{-\infty}^r f_{R_n}(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} n \left\{ \int_{-\infty}^r (n-1) [F(x+r) - F(x)]^{n-2} f(x+r) dr \right\} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n [F(x+r) - F(x)]^{n-1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} n [F(x+r) - F(x)]^{n-1} dF(x) \quad (14)$$

同理, 可求得 $R_{n-(i-1)}$ 的分布函数 $F_{R_{n-(i-1)}}(r)$

$$\begin{aligned} F_{R_{n-(i-1)}}(r) &= \int_{-\infty}^r f_{R_{n-(i-1)}}(r) dr \\ &= \int_{-\infty}^r \left\{ \int_{-\infty}^r \frac{n!}{(i-1)! (n-2i)! (i-1)!} [F(x)]^{i-1} \right. \\ &\quad \left. [F(x+r) - F(x)]^{n-2i} \cdot [1 - F(x+r)]^{i-1} f(x+r) \right. \\ &\quad \left. dr \right\} f(x) dx \quad (15) \end{aligned}$$

(15)式与(14)式相似, 不同之处是按(15)式计算时要作二次数值积分, 计算工作较繁重。

三、子样极差概率分布的计算

子样极差 R_n 的分布函数, 按(14)式用辛卜生数值积分法编制的电算程序, 算得了 n 为 2~20 (间隔 1), 25~200 (间隔 5), 350~600 (间隔 50); r 的间隔为 0.16 的数值, 其中 2~20 的结果与文献^[2]的数值完全相同, 这可以作为推演的公式和计算程序正确性的校核, 这里仅摘录 n 为 5~100 (间隔 5), 110~200 (间隔 10), 225~300 (间隔 25), 350~600 (间隔 50), r 的间隔为 0.56 的部分列入表一中。顺便说一句, $n > 20$ 的子样极差的概率分布值, 目前还未见到有发表的, 本文的计算结果除在测绘专业中应用外, 亦可供经济管理及其它专业应用。 $R_{n-(i-1)}$ 的分布函数值可按(15)式计算, 考虑到计算工作量太大及实际应用上并非十分必要, 因此没有计算, 推演出的公式可用于理论研究方面。

为研究子样极差的性态, 根据 $F_{R_n}(r)$ 的数值就可算出它的数学期望和方差, 计算公式如下:

$$E(R_n) = \int_0^{\infty} R_n dF_{R_n}(r) \quad (16)$$

$$D(R_n) = \int_0^{\infty} R_n^2 dF_{R_n}(r) - E^2(R_n) \quad (17)$$

计算时要进行截尾, 在忽略截尾误差情况下的计算公式为

$$E(R_n) \approx \int_0^{K\sigma} R_n dF_{R_n}(r) \quad (18)_1$$

$$\begin{aligned} D(R_n) &\approx \int_0^{K\sigma} R_n^2 dF_{R_n}(r) - E^2(R_n) \\ &= (K\sigma)^2 F_{R_n}(K\sigma) - 2 \int_0^{K\sigma} R_n F_{R_n}(r) dr - E^2(R_n) \quad (18)_2 \end{aligned}$$

我们计算了 n 为 5~200 (间隔 5) 的 $E(R_n)$ 和 $D(R_n)$, 因篇幅所限未列出这些数值。

计算公式 $F_{R_n}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} n[F(x+r) - F(x)]^{n-1} dF(x)$

表一

$n \backslash F_{R_n}(r)$	3.0σ	3.5σ	4.0σ	4.5σ	5.0σ	5.5σ	6.0σ	6.5σ	7.0σ	7.5σ	8.0σ	8.5σ	9.0σ	9.5σ
5	7891	9037	9623	9873	9963	9991	9998	10000						
10	4878	7180	8731	9527	9851	9960	9991	9998	10000					
15	2792	5413	7686	9062	9688	9913	9979	9996	9999	10000				
20	1538	3964	6640	8534	9486	9852	9964	9993	9999	10000				
25	827	2849	5661	7976	9257	9778	9945	9988	9998	10000				
30	438	2021	4781	7410	9006	9695	9923	9984	9997	10000				
35	229	1420	4008	6853	8741	9602	9898	9978	9996	9999	10000			
40	119	990	3341	6312	8466	9502	9870	9972	9995	9999	10000			
45	61	686	2772	5795	8184	9396	9839	9964	9993	9999	10000			
50	31	474	2290	5306	7899	9284	9806	9957	9992	9999	10000			
55	16	326	1886	4846	7612	9167	9771	9948	9990	9998	10000			
60	8	223	1549	4417	7327	9045	9733	9939	9988	9998	10000			
65	4	152	1269	4019	7044	8921	9694	9930	9986	9998	10000			
70	2	104	1038	3650	6765	8793	9653	9920	9984	9997	10000			
75	1	70	847	3310	6490	8663	9610	9909	9982	9997	9999	10000		
80	1	48	690	2999	6222	8530	9566	9898	9980	9997	9999	10000		
85		32	561	2713	5959	8396	9520	9886	9978	9996	9999	10000		
90		22	456	2452	5704	8261	9473	9874	9975	9996	9999	10000		
95		15	370	2214	5455	8215	9424	9861	9972	9995	9999	10000		
100		10	300	1997	5214	7988	9375	9848	9970	9995	9999	10000		
110		4	196	1621	4756	7714	9272	9820	9964	9994	9999	10000		
120		2	128	1312	4329	7440	9166	9791	9958	9993	9999	10000		
130		1	84	1059	3933	7168	9056	9760	9951	9992	9999	10000		
140			54	854	3567	6898	8943	9727	9944	9990	9998	10000		
150			35	686	3231	6633	8827	9693	9936	9989	9998	9999	10000	
160			23	551	2923	6372	8710	9658	9928	9988	9998	9999	10000	
170			15	442	2641	6118	8591	9622	9920	9986	9998	9999	10000	
180			10	354	2384	5869	8470	9584	9912	9984	9998	9999	10000	
190			6	283	2149	5626	8348	9545	9902	9983	9997	9999	10000	
200			4	226	1936	5390	8225	9506	9893	9981	9997	9999	10000	
225			1	128	1486	4832	7915	9402	9868	9977	9996	9999	9999	10000
250				72	1136	4318	7604	9293	9842	9972	9996	9999	9999	9999
275				41	865	3849	7295	9180	9813	9966	9995	9999	9999	9999
300				23	657	3423	6988	9062	9783	9960	9994	9999	9999	9999
350				7	376	2692	6391	8818	9718	9947	9992	9998	9999	9999
400				2	214	2104	5822	8564	9647	9933	9989	9998	9999	9999
450				1	121	1636	5285	8303	9572	9917	9987	9998	9999	9999
500					68	1267	4785	8309	9491	9900	9984	9997	9999	9999
550					38	978	4322	7773	9407	9882	9981	9996	9998	9999
600					21	752	3895	7507	9320	9862	9978	9996	9998	9998

注：表列数值的单位为10⁻⁴

四、应用极差的概率分布来规定闭合差的限值

观测值闭合差的检验是检查观测质量的一项重要措施。在国家规范和作业单位的技术规定中，一般是不论闭合差个数多少，均以二倍或三倍中误差作为闭合差的限值，要求全部闭合差都要小于这个限值，超限的要进行重测。这样的规定是值得讨论的，因为根据概率统计原理分析，闭合差是一个随机变量，上述的标准相应于随机变量出现的概率为0.95和0.997。因此当 n 较小时，以二倍或三倍中误差作为限值还是可以的，例如 $n < 10$ 时，随机变量的取值大于二倍中误差的个数仅是 0.5，就可以认为基本上不会出现这样的数值，但当 n 较大时，例如 $n = 100$ 、200 或更大时，那么这 n 个闭合差中出现少数几个绝对值大于二倍或三倍中误差的事件就几乎是必然的了。因而对它们进行重测就不是十分必要的。另一方面，如 n 个闭合差的绝对值虽均小于二倍或三倍中误差，但若它们的数值不符合概率分部的规律，则说明观测值中可能含有某种系统误差或是观测质量未能达到预定的精度指标要求，因而仍必须进行重测。

由极差的性质不难看到，应用极差的概率分布来规定闭合差的限差，是解决这个问题的一个有效途径，根据上面的讨论，这里提出以下几点意见：

(1) 闭合差互差的限值的规定

闭合差 x_1, x_2, \dots, x_n 可以认为是从正态母体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的抽样，而 $R_n = x_n^* - x_1^*$ 是子样极差，根据极差的概率分布，可以确定在显著水平 α 下子样极差的置信限，即有：

$$F_{n,R}(r) = \int_0^r f_{R_n}(r) dr = 1 - \alpha \quad (19)$$

以 n 和 $1 - \alpha$ 为引数在极差的概率分布表（表一）中可查得

$$r = R_{n,1-\alpha} = K\sigma_x \quad (20)$$

通常称上式中的 k 为临界系数，而 r 也就可以作为闭合差互差的限值，我们分别取 α 为 0.10、0.05 和 0.025 按 (19) 式编制了临界系数表（表二）根据表二和 (20) 式便可规定出在不同情况下的闭合差互差的限值 r 。例如二等三角测量的测角中误差 $\sigma_B = \pm 0''.7$ ，三角形闭合差的中误差即为 $\sigma_x = \pm 1''.2124$ ；我们根据 (20) 式和表二，编制出 α 为 0.10、0.05 和 0.025 下的三角形闭合差互差的限值表。（见表三）

又如一等水准测量每公里往返高差中数的中误差 $\sigma_M = 0.3^{mm} \sim 0.4^{mm}$ ，则每公里往返高差闭合差的中误差 $\sigma_{公里} = 2\sigma_M = 2 \times 0.35 = 0.7^{mm}$ ，我们根据 (20) 式和表二，编制出 α 为 0.10、0.05 和 0.025 的每公里往返高差闭合差互差的限值表（见表四），需要指出的是，在利用表四作检验时，应将水准路线长度为 S_i 的往返高差闭合差 x_i 化为每公里往返高差

$$\text{闭合差} \left(x_{i,公里} = \frac{x_i}{\sqrt{S_i}} \right)。$$

临界系数 k 表

表二

n \ α	α			n \ α	α		
	0.10	0.05	0.025		0.10	0.05	0.025
5	3.478	3.857	4.196	110	5.875	6.146	6.390
10	4.130	4.475	4.785	120	5.929	6.196	6.443
15	4.468	4.796	5.092	130	5.979	6.246	6.488
20	4.694	5.012	5.298	140	6.024	6.289	6.532
25	4.865	5.175	5.456	150	6.067	6.331	6.572
30	4.997	5.301	5.579	160	6.105	6.369	6.607
35	5.109	5.408	5.681	170	6.143	6.402	6.643
40	5.203	5.498	5.769	180	6.177	6.438	6.675
45	5.285	5.578	5.845	190	6.209	6.469	6.703
50	5.359	5.649	5.910	200	6.241	6.496	6.735
55	5.423	5.709	5.972	225	6.309	6.566	6.798
60	5.481	5.767	6.026	250	6.372	6.626	6.859
65	5.535	5.817	6.075	275	6.428	6.679	6.909
70	5.583	5.865	6.120	300	6.478	6.728	6.959
75	5.629	5.907	6.163	350	6.566	6.813	7.042
80	5.671	5.950	6.200	400	6.642	6.886	7.111
85	5.709	5.986	6.239	450	6.706	6.952	7.175
90	5.748	6.022	6.273	500	6.767	7.006	7.231
95	5.781	6.056	6.303	550	6.818	7.060	7.280
100	5.814	6.086	6.336	600	6.867	7.104	7.325

二等三角测量闭合差限值及闭合差在各区间的理论频数表

表三

n	闭合差的限值			闭合差互差的限值			理 论 频 数		
	α = 0.10	α = 0.05	α = 0.025	α = 0.10	α = 0.05	α = 0.025	0" ~ 1"	1" ~ 2"5	2"5 ~ X _限
5	2"11	2"34	2"54	4"22	4"68	5"09	3	2	0
10	2.50	2.71	2.90	5.01	5.43	5.80	5	4	1
15	2.71	2.91	3.09	5.42	5.81	6.17	8	6	1
20	2.85	3.04	3.21	5.69	6.08	6.42	10	8	2
30	3.03	3.21	3.38	6.06	6.43	6.76	15	12	3
40	3.15	3.33	3.50	6.31	6.67	6.99	20	16	4
50	3.25	3.42	3.58	6.50	6.85	7.17	25	20	5
60	3.32	3.50	3.65	6.65	6.99	7.31	31	24	5

续表三

100	3.52	3.69	3.84	7.05	7.38	7.68	50	41	9
150	3.68	3.84	3.98	7.36	7.68	7.97	75	61	14
200	3.78	3.94	4.08	7.57	7.88	8.17	101	81	18
250	3.86	4.02	4.16	7.73	8.03	8.32	126	102	22
300	3.93	4.08	4.22	7.85	8.16	8.41	151	122	27
400	4.03	4.17	4.31	8.05	8.35	8.62	201	163	36
500	4.10	4.25	4.38	8.20	8.49	8.77	252	204	44
600	4.16	4.31	4.44	8.33	8.61	8.88	302	244	54

一等水准测量闭合差限值及闭合差在各区间的理论频数表

表四

n	闭合差的限值			闭合差互差的限值			理论频数		
	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	0^{mm} $\sim 0.5^{mm}$	0.5^{mm} $\sim 1.5^{mm}$	1.5^{mm} $\sim x_{限}$
5	1.22 ^{mm}	1.35 ^{mm}	1.47 ^{mm}	2.43 ^{mm}	2.70 ^{mm}	2.94 ^{mm}	2	3	0
10	1.45	1.57	1.67	2.89	3.13	3.35	4	5	1
15	1.56	1.68	1.78	3.13	3.36	3.56	6	8	1
20	1.64	1.75	1.85	3.29	3.51	3.71	8	10	2
30	1.75	1.86	1.95	3.50	3.71	3.91	13	15	2
40	1.82	1.92	2.02	3.64	3.85	4.04	17	20	3
50	1.88	1.98	2.07	3.75	3.95	4.14	21	25	4
60	1.92	2.02	2.11	3.84	4.04	4.22	25	30	5
100	2.03	2.13	2.22	4.07	4.26	4.44	42	50	8
150	2.12	2.22	2.30	4.25	4.43	4.60	64	74	12
200	2.18	2.27	2.36	4.37	4.55	4.71	85	100	15
250	2.23	2.32	2.40	4.46	4.64	4.80	106	125	19
300	2.27	2.35	2.44	4.53	4.71	4.87	127	150	23
400	2.32	2.41	2.49	4.65	4.82	4.98	169	200	31
500	2.37	2.45	2.53	4.74	4.90	5.06	212	249	39
600	2.40	2.49	2.56	4.81	4.97	5.13	254	299	47

2、闭合差限值的规定

测量中的闭合差的母体期望一般都是零，而母体是服从正态分布的（如上述的三角形闭合差和水准测往返高差闭合差等都是这样的）。又因为 x_{\max}^* 和 x_{\min}^* 是顺序统计量的最大值和最小值，所以有

$$x_{\max}^* - x_{\min}^* = x_{\max}^* - x_{\min}^*$$

$$R_{n,限} = 2x_{\max}^*$$

因此可以将闭合差的限值规定为

$$x_{\text{限}} = \pm \frac{R_{n \text{限}}}{2} = \pm \frac{k}{2} \sigma_x \quad (21)$$

根据(21)式可编制出二等三角测量三角形闭合差的限值表(见表三),同样可编制出一等水准测量往返高差闭合差的限值表(见表四)。

3、闭合差在各区间内的理论频数

闭合差 x_i 除应满足(1)、(2)的要求外,还应该符合概率分布规律,因为 $x_{\text{限}}$ 是由正态分布的子样极差的概率分布推导而得到的,因此 n 个闭合差中只能允许少数几个接近于或等于 $x_{\text{限}}$,其余闭合差的数值分布应与正态分布曲线相吻合,为此,可以将 $0 \sim x_{\text{限}}$ 之间划分为几个区间,根据概率分布计算出闭合差落在相应区间的理论频数,而要求闭合差的实测频数与其一致,对于二等三角测量三角形闭合差和一等水准测量往返高差闭合差,其理论频数也列入表三和表四中。

表三和表四给出的是在 α 为 0.10、0.05 和 0.025 下闭合差的几种限值,为实用方便,还可以将 n 的间隔放大,根据表三和表四的数值作进一步简化综合,得出在实用上较方便的限值表(表五和表六)。

表五

n	三角形闭合差的限值	三角形闭合差互差的限值	n	理论频数		
				0"~1"	1"~2"5	2"5~ $x_{\text{限}}$
<10	2"70	5"40	10	5	4	1
10~20	3"00	6.10	15	8	6	1
20~40	3.30	6.70	30	15	12	3
40~60	3.50	7.00	50	25	20	5
60~100	3.70	7.40	80	40	33	7
100~200	3.90	7.90	150	75	61	14
200~300	4.10	8.20	250	126	102	22
300~500	4.20	8.50	400	201	163	36
500以上	4.30	8.60	600	302	244	54
				45%~55%	35%~45%	≤10%
附注	闭合差在各区间的理论频数取一个平均的百分数(如表中所示)作为检核的标准					

表六

n	往返高差闭合差的限值	往返高差闭合差互差的限值	n	理论频数		
				0 ^m ~0.5 ^m	0.5 ^m ~1.5 ^m	1.5 ^m ~x _限
<10	1.60 ^m	3.10 ^m	10	4	5	1
10~20	1.80	3.50	15	6	8	1
20~40	1.90	3.80	30	13	15	2
40~60	2.00	4.00	50	21	25	4
60~100	2.10	4.30	80	34	40	6
100~200	2.30	4.60	150	64	74	12
200~500	2.40	4.90	350	148	175	27
500以上	2.50	5.00	600	254	299	47
				35%~45%	45%~55%	≤8%
附注	闭合差在各区间的理论频数取了一个平均的百分数（如表列中所示） 作为检核的标准					

此外按规范规定需要按闭合差计算测角中误差，即用公式 $\sigma_n = \sqrt{\frac{[W^2]}{3n}}$ 和 $\sigma_h =$

$$= \frac{\left[\frac{1}{S} \Delta^2 \right]}{2n}$$

计算，其数值要满足一定的要求，这项要求规范只按不同等级提出指标，也

未顾及闭合差个数的多少，但由以上两式算得的数值实质上是观测中误差的估值 $\hat{\sigma}_B$ 和 $\hat{\sigma}_h$ ，观测中误差 σ_B 和 σ_h 的值是多少，应根据估值作假设检验，然后作出推断，这样就可以避免由观测误差而引起的随机波动的影响，实际上就是顾及了 n 值大小的影响，具体作法可参考文献⁽⁶⁾。

观测结果如有部分不能满足上述规定要求时，可根据闭合差的数值和地形情况，通视条件等选择若干观测值进行重测，最多重测数可按一般惯例规定为总观测数的 1/3。

五、算例

应用上节的几条意见对二个三角网的三角形闭合差和二条一等水准的测段往返高差闭合差进行了验算，这些闭合差的数据分别列于表七和表八中。

三角网 1: $n=100$, $\bar{x} = +0''.0384$, 可认为 $E(x) = 0$, 验算如下:

(1) $\max |x| = 3''.64 < x_{限} (3''.70)$, $x_{i.o} - x_{i'} = 7''.17 < \text{互差限值} (7''.40)$

表七

	$\chi_{限} \sim 2''50$		$2''50 \sim 1''00$				$1''00 \sim 0''00$			
三角网 I	+3.52	-3.64	+2.35	+1.49	-2.28	-1.40	+1.00	+0.49	-1.00	-0.50
	+3.13	-3.00	+2.30	+1.45	-2.20	-1.37	+0.93	+0.40	-0.95	-0.48
	+2.98	-2.90	+2.12	+1.30	-2.11	-1.35	+0.90	+0.40	-0.90	-0.45
	+2.62	-2.74	+2.01	+1.23	-1.93	-1.25	+0.88	+0.35	-0.90	-0.42
			+2.00	+1.21	-1.88	-1.20	+0.88	+0.30	-0.84	-0.32
			+1.98	+1.13	-1.78	-1.18	+0.82	+0.28	-0.80	-0.30
			+1.85	+1.09	-1.64	-1.11	+0.78	+0.23	-0.79	-0.29
			+1.70	+1.06	-1.48	-1.11	+0.74	+0.19	-0.76	-0.28
			+1.60	+1.06	-1.42		+0.72	+0.17	-0.72	-0.27
			+1.50				+0.67	+0.15	-0.71	-0.21
						+0.67	+0.06	-0.71	-0.15	
						+0.60	+0.05	-0.66	-0.13	
						+0.53	+0.03	-0.59	-0.08	
								-0.55	-0.03	
								-0.51	-0.01	
Σ	8		36				56			
	$\chi_{限} \sim 2''50$		$2''50 \sim 1''00$				$1''00 \sim 0''00$			
三角网 II	+3.38	-3.42	+2.50	+1.88	-2.48	-1.78	+0.95	+0.46	-1.00	-0.35
	+3.25	-3.35	+2.40	+1.80	-2.44	-1.75	+0.90	+0.46	-0.88	-0.29
	+3.21	-3.30	+2.35	+1.75	-2.40	-1.68	+0.86	+0.39	-0.81	-0.15
	+3.20	-3.18	+2.32	+1.72	-2.38	-1.63	+0.78	+0.31	-0.74	-0.10
	+3.16	-3.06	+2.24	+1.70	-2.30	-1.62	+0.72	+0.24	-0.72	-0.09
	+3.10	-3.02	+2.15	+1.60	-2.21	-1.51	+0.71	+0.18	-0.70	-0.07
	+3.08	-3.00	+2.11	+1.48	-2.19	-1.35	+0.63	+0.10	-0.52	-0.02
	+2.99	-2.91	+2.05	+1.30	-2.01	-1.35	+0.57		-0.49	0.00
	+2.95	-2.88	+2.03	+1.25	-1.94	-1.20				
	+2.88	-2.80	+1.94	+1.11	-1.86	-1.10				
+2.74		+1.90	+1.09	-1.86	-1.08					
		+1.90	+1.05	-1.82	-1.02					
Σ	21		48				31			

表八

水准线 I				水准线 II			
测段号	往返高差 闭合差 (mm)	测段长 (km)	一公里往返 高差闭合差 (mm)	测段号	往返高差 闭合差 (mm)	测段长 (km)	一公里往返 高差闭合差 (mm)
1	-1.91	4.3	-0.92	1	-0.70	4.5	-0.33
2	-0.93	5.1	-0.41	2	+2.21	2.9	+1.30
3	-0.68	3.4	-0.37	3	+2.58	3.2	+1.44
4	+3.06	6.0	+1.25	4	-2.44	3.8	-1.25
5	-0.34	4.4	-0.16	5	-3.30	4.3	-1.59
6	+1.15	3.8	+0.59	6	+0.39	5.8	+0.16
7	+1.65	3.5	+0.88	7	+1.38	3.5	+0.74
8	-3.30	4.0	-1.65	8	+1.86	4.0	+0.93
9	+0.65	3.9	+0.33	9	-2.45	3.6	-1.29
10	-1.74	5.5	-0.74	10	-2.34	4.8	-1.07
11	-1.96	2.9	-1.15	11	-2.33	4.1	-1.15
12	+0.09	3.4	+0.05	12	+2.30	3.8	+1.18
13	-3.06	3.8	-1.57	13	-3.03	3.3	-1.67
14	-0.47	4.2	-0.23	14	+3.48	4.1	+1.72
15	+3.13	5.3	+1.36	15	-2.83	4.2	-1.38
16	-0.87	4.7	-0.40	16	-2.65	3.8	-1.36
17	-2.83	4.1	-1.40	17	+2.66	4.0	+1.33
18	-0.37	3.7	-0.19	18	+2.82	4.3	+1.36
19	+0.20	3.4	+0.11	19	-2.15	5.1	-0.95
20	+1.26	4.0	+0.63	20	+2.34	2.8	+1.40

(2) 各区间的实测频数 $x_{\text{限}} \sim 2''$.50 为 8, $2''$.50 $\sim 1''$.00 为 36, $1''$.00 $\sim 0''$.00 为 56, 对照表五的可知闭合差的数值分布是符合要求的。

(3) 测角中误差估值 $\hat{\sigma}_B = 0''$.7999 $< 1''$, 因此不必作假设检验即可认为母体 $\sigma \leq 1''$ 。由以上可知该网的观测质量符合要求。

三角网 II: $n = 100$, $\bar{x} = +0''$ 0202, 可认为 $E(x) = 0$, 验算如下:

(1) $\max|x| = 3''$.42 $< 3''$.70, $x_{i_{0.0}}^* - x_i^* = 6''$.80 $< 7''$.40

(2) 各区间的实测频数 $x_{\text{限}} \sim 2''$.50 为 21, $2''$.50 $\sim 1''$.00 为 48, $1''$.00 $\sim 0''$.00 为 31, 对照表五可知闭合差的数值分布偏离正态曲线较多。

(3) 测角中误差估值 $\hat{\sigma}_B = 1''$.1204, 按文献⁽⁶⁾的方法作假设检验, 结果在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, 不能认为母体 $\sigma = 1''$, 应认为 $\sigma > 1''$ 。

从以上验算结果看, 该网三角形闭合差的最大值和互差虽均小于限值, 但观测质量并未

能达到预定的精度要求。

水准线 I: $n = 20$, $\bar{x}_{\text{公里}} = -0.1995^{\text{mm}}$ 可认为 $E(x) = 0$, 验算如下:

$$(1) \max |x_{\text{公里}}| = 1.65^{\text{mm}} < x_{\text{限}}^* (1.80^{\text{mm}}) \quad x_{\text{上}}^* - x_{\text{下}}^* = 2.90^{\text{mm}} < \text{互差限值} (3.50^{\text{mm}})$$

(2) 各区间的实测频数 $x_{\text{限}} \sim 1.5^{\text{mm}}$ 为 2; $1.5^{\text{mm}} \sim 0.5^{\text{mm}}$ 为 9; $0.5^{\text{mm}} \sim 0.0$ 为 9; 对照表六可知闭合差数值分布是符合要求的。

(3) 每公里高差中误差估值 $\hat{\sigma}_h = 0.6225^{\text{mm}}$, 按规范规定 $\sigma_M = 0.5^{\text{mm}}$ 则 $\sigma_h = \sqrt{2} \sigma_M = 0.7^{\text{mm}}$, 因此不必作假设检验即可认为母体 $\sigma_h \leq 0.7^{\text{mm}}$ 。

由以上可知该水准线的观测质量是符合要求的。

水准线 II: $n = 20$, $\bar{x}_{\text{公里}} = -0.024^{\text{mm}}$ 可认为 $E(x) = 0$, 验算如下:

$$(1) \max |x_{\text{公里}}| = 1.72^{\text{mm}} < 1.80^{\text{mm}}, \quad x_{\text{上}}^* - x_{\text{下}}^* = 3.31^{\text{mm}} < 3.50^{\text{mm}}.$$

(2) 各区间的实测频数 $x_{\text{限}} \sim 1.5^{\text{mm}}$ 为 3; $1.5^{\text{mm}} \sim 0.5^{\text{mm}}$ 为 17; $0.5^{\text{mm}} \sim 0.0$ 为 2; 对照表六可知闭合差的数值分布偏离正态曲线较多。

(3) 每公里高差中误差估值 $\hat{\sigma}_h = 0.8790^{\text{mm}}$ 按文献⁽⁶⁾方法作假设检验, 结果在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下不能认为母体 $\sigma_h = 0.7^{\text{mm}}$, 应认为 $\sigma_h > 0.7^{\text{mm}}$ 。

从以上验算结果看, 该水准线的各测段往返高差闭合差的最大值和互差虽均小于限值, 但观测质量是低于规范要求的。

现行规范对闭合差限值的规定因未顾及闭合差个数的多少, 因此往往不是过宽就是过严。例如当闭合差个数 n 较大时, 规范的标准就显得过严, 由于各种随机因素的影响, 当 n 较大时是会有少数几个绝对值较大的闭合差出现的, 这是符合概率分布规律的, 因此根据它并不能说明观测质量不好, 因而有时的返工并非是必要的。反之, 当闭合差个数较小时, 规范的标准就显得过宽, 这就有可能把本来不好的观测成果作为合格成果验收。另一方面, 即使全部闭合差绝对值均小于限值, 如它们的数值分布不合理, 一般说明观测质量不好, 关于这方面规范中又没有明确的标准, 以致难以保证成果质量良好, 这点从以上算例的三角网 II 和水准线 II 的验算过程中可以看出。总之, 闭合差限值的标准应该是既能保证观测成果的质量良好, 同时又要避免不必要的返工以节约人力财力, 提高经济效益, 本文对于闭合差限值的几点意见, 就是按这个原则提出的。另外本文虽着重讨论的是三角形闭合差和往返高差闭合差的限值标准, 但这些原则同样适用于其它闭合差限值的确定, 例如极条件闭合差限值、边长、方位角闭合差限值…等等。

我们提出的这些意见涉及到规范有关章节的修订, 这个问题供大家讨论。

参 考 文 献

[1] 复旦大学数学系: 《概率论》1979。

[2] Л. Н. Болышев, Н. В. Смирнов; ТАБЛИЦЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО СТАТИСТИКИ ИЗДАТЕЛЬСТВО (НАУКА) 1965.

[3] 李庆海、陶本藻: 《数理统计在测量上的应用》, 测绘出版社, 1982。

[4] М·费史: 《概率论及数理统计(波)》王福保等译 上海科学技术出版社 1962。

[5] 张世箕:《测量误差及数据处理》,科学出版社,1979。

[6] 张方仁:中误差的统计特性,《武汉测绘学院学报》,2,1982。

On the Probability Distribution of the Extreme Range of Sequenced Statistical Quantities and the Limiting Value of Discrepancy

Zhang Fangren

Abstract

In order to guarantee the accuracy of measurements the observations must be checked. In practice it is required that all kinds of discrepancy should not exceed their respective limiting values. But in the current official specification, the numbers of observation are not taken into account for defining the limiting values of discrepancy, this is not reasonable. So in this paper the author derived and calculated the probability distribution of extreme range by means of the principle of mathematical statistics, and put forward some requirements for checking the observations in the field works.