DOI:10.13203/j.whugis1983.01.003

自由网平差的几个理论问题

陶本藻

【提要】 本文运用广义逆理论，分析了自由网平差的各种方法，指出它们之间的差异仅在于取了不同的最小范数逆。论述了自由网平差残差的性质和参考系。

本文证明了自由网平差与经典自由网平差可以得到相同的残差，並与附加的最小范数条件无关。还证明了最小范数条件决定了网的定位参考系。藉助于这些参考系，这两类平差的坐标可以互相变换。

秩亏自由网平差，由于其理论和实践上的意义，已引起国内外测量学者的广泛注意，近十余年来出现了许多论述和研究的有关文章。例如，国外的主要文章有[1]～[13]等。在这些文献中，主要是对自由网平差提出了各种不同解法，同时也在不同程度上阐述了该法的性质和几何意义。

为了从理论上更全面地理解该法的实质，并探讨如何正确地用于实际，在研究现有有关文献基础上，作者曾在1981年的《论自由网平差》[14]一文中，对平差结果的统计性质，改正数的性质，参考系与最小范数条件，单位权方差和内精度等理论问题作了论证和阐述，并着重说明了自由网平差的结果与经典平差的异同。本文将再进一步研究该法的几个理论问题，包括：用广义逆证明各种解法的一致性，最小二乘原则与确定函数，最小范数条件与参考基准，经典平差与自由网平差的变换，最小范数条件与最小迹的等价性，最后讨论了自由网平差中各协因数阵的秩等问题。

一 用广义逆论证各种解法的一致性

秩亏自由网平差的函数模型和随机模型设为：

$$A\overline{X}=E(l)\qquad D(l)=\sigma^2 I \tag{1.1}$$

$$\underset{n1}{V}=\underset{nu}{A}\,\underset{u1}{X}-\underset{n1}{l} \tag{1.2}$$

其中$R(A)=q<u$，秩亏$d=u-q$

如为不等权观测，(1.1)为$D(l')=\sigma^2P^{-1}$，(1.2)为$V'=A'X-l'$，此时，可令

$$P=WW^T\qquad A=W^TA'\qquad l=W^Tl'\qquad V=W^TV'$$

而变换成等权观测的（1.1）和（1.2）。

平差遵循的原则是

$$V^TV=\min \tag{1.3}$$

$$X^TX=\min \tag{1.4}$$

现有的典型解法很多，如广义逆法（Mittermayer 1971），附加条件法（Mittermayer 1972），直接解法（Wolf 1972），伪观测法（Pelzer 1974），消去条件法（Pelmuter 1979），伪逆直接解法（Cooper 1980）等，这些解法的途径不同，但结果相同，这在相应的文章中都有说明。在研究了这些文献后，可以证明，各法都可用广义逆理论进行综合，并指出各法计算公式的不同是由于采用了不同的最小范数逆。

在（1.3）、（1.4）原则下，（1.2）的解为

$$NX=A^{T}l \tag{1.5}$$

$$X=N_{m}^{-}A^{T}l \tag{1.6}$$

式中最小范数逆N_{m}^{-}满足条件

$$NN_{m}^{-}N=N \qquad (N_{m}^{-}N)^{T}=N_{m}^{-}N \tag{1.7}$$

N_{m}^{-}不唯一，但X唯一。

如选不同的N_{m}^{-}就可得出不同的解法。

广义逆法[1]，选取

$$N_{m}^{-}=N\ (NN)^{-} \tag{1.8}$$

得

$$X=N\ (NN)^{-}A^{T}l \tag{1.9}$$

附加条件法，附加条件为

$$\underset{du}{S^{T}}X=0 \tag{1.10}$$

按附有条件的间接平差可得其解为[2]：

$$\begin{pmatrix}X\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N & S\\S^{T} & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A^{T}l\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{T}l\\0\end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$X=Q_{11}A^{T}l \tag{1.12}$$

按分块求逆法求得

$$\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11} & S(S^{T}S)^{-1}\\(S^{T}S)^{-1}S^{T} & 0\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

由（1.11）得

$$NQ_{11}+S(S^{T}S)^{-1}S^{T}=I \tag{1.14}$$

因为$S^{T}Q_{11}=0$，$NS=0$，故上式为

$$(N+SS^{T})\ Q_{11}+\ (N+SS^{T})\ S\ (S^{T}S)^{-1}(S^{T}S)^{-1}S^{T}=I$$

$$Q_{11}=\ (N+SS^{T})^{-1}-S\ (S^{T}SS^{T}S)^{-1}S^{T} \tag{1.15}$$

令

$$Q'=\ (N+SS^{T})^{-1} \tag{1.16}$$

则有

$$Q'(N+SS^{T})=I \qquad Q'N=I-Q'SS^{T} \tag{1.17}$$

$$Q'NS=S-Q'SS^{T}S \qquad Q'S=S(S^{T}S)^{-1} \tag{1.18}$$

下面证明，Q_{11}是N的广义逆N^{+}：

（1）$NQ_{11}N=NQ'N-NS\ (S^{T}SS^{T}S)^{-1}S^{T}N$

$=NQ'N=N\ (I-Q'SS^{T})\ =N-NS(S^{T}S)^{-1}S^{T}=N$

（2）$Q_{11}NQ_{11}=Q'NQ_{11}=\ (I-Q'SS^{T})(Q'-S(S^{T}SS^{T}S)^{-1}S^{T})$

$=Q'-S(S^{T}SS^{T}S)^{-1}S^{T}=Q_{11}$

（3）$(Q_{11}N)^{T}=(Q'N)^{T}=\ (I-S(S^{T}S)^{-1})S^{T}=Q_{11}N$

（4）$(NQ_{11})^{T}=(NQ')^{T}=\ (I-S(S^{T}S)^{-1}S^{T})\ =NQ_{11}$

因此，附加条件法（1.12）中的Q_{11}是N^{+}型的最小范数逆。

直接解法。将（1.5）中的N分块：

$$N=\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$$

式中 N_{11} 为 $R(N_{11})=q$ 的满秩方阵，则

$$NN=\begin{pmatrix} N_{11}N_{11}+N_{12}N_{21} & N_{11}N_{12}+N_{12}N_{22} \\ N_{21}N_{11}+N_{22}N_{21} & N_{21}N_{12}+N_{22}N_{22} \end{pmatrix}$$

取

$$(NN)^{-}=\begin{pmatrix} (N_{11}N_{11}+N_{12}N_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

代入（1.8）得N_m^-，代入（1.6）得

$$\begin{aligned} X_1&=N_{11}\ (N_{11}N_{11}+N_{12}N_{21})^{-1}A_1^T l=\alpha l \\ X_2&=N_{21}\ (N_{11}N_{11}+N_{12}N_{21})^{-1}A_1^T l=\beta l \end{aligned} \tag{1.19}$$

这就是直接法的解算公式[3]，写成

$$X=\begin{pmatrix} N_{11}(N_{11}N_{11}+N_{12}N_{21})^{-1} & 0 \\ N_{21}(N_{11}N_{11}+N_{12}N_{21})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^T l \\ A_2^T l \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

右边的系数阵就是一个最小范数逆。

伪观测法，X的计算公式为[5]

$$X=\ (N+GG^T)^{-1}A^T l=Q_0'A^T l \tag{1.21}$$

或

$$X=\ (N+SS^T)^{-1}A^T l=Q'Al \tag{1.22}$$

式中 $AG=0$，$G^TG=I$，$AS=0$，$S^TS\neq I$。

在附加条件法中，已证明

$NQ'N=N$，　$(Q'N)^T=Q'N$，　$(NQ')^T=NQ'$

所以Q'是N^-型的满足上述三个条件的最小范数逆，Q_0'也可类似证明。但Q'和Q_0'都不是N^+。

消去条件法，在直接解法中，令

$$G_1=N_{11}^{-1}N_{12} \qquad A_2=A_1G_1$$

$$\overline{A}=A_1+A_2G_1^T \tag{1.23}$$

在（1.20）式进行变换[8]，即得消去条件法的解：

$$X_1=\ (\overline{A}^T\overline{A})^{-1}\overline{A}^T l \tag{1.24}$$

$$X_2=G_1^TX_1 \tag{1.25}$$

可见，取用的最小范数逆与直接解法同，只是计算程序不同。

伪逆直接解法[9]，直接对误差方程取最小二乘最小范数解，得

$$X=A^+l \tag{1.26}$$

因为

$$A^+=A^T\ (AA^T)^-A\ (A^TA)^-A^T \tag{1.27}$$

代入得

$$X=A^T\ (AA^T)^-\ A\ (A^TA)^-\ A^Tl=\ \gamma A^Tl \tag{1.28}$$

下面证明γ是N的最小范数逆。

（1）$N\gamma N=NA^T(AA^T)^-\ A\ (A^TA)^-N=A^TAA^T(AA^T)^-A$

$=A^TA=N$

（2）$(\gamma N)^T=\ (A^T(AA^T)^-A(A^TA)^-A^TA)^-=\ (A^T(AA^T)^-A)^T$

$$=A^T(AA^T)^-A=\gamma N$$

以下再证明各种解法X的协因数阵均是N^+。

(1.9)的协因数：

$$Q_{XX}=N(NN)^-N(NN)^-N=N^+ \tag{1.29}$$

(1.12)的协因数：

$$Q_{XX}=Q_{11}NQ_{11}=Q_{11}=N^+ \tag{1.30}$$

(1.20)的协因数：

$$Q_{XX}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha^T & \alpha\beta^T\\ \beta\alpha^T & \beta\beta^T\end{pmatrix}=N(NN)^-N(NN)^-N=N^+ \tag{1.31}$$

(1.21)和(1.22)的协因数分别是

$$Q_{XX}=(N+GG^T)^{-1}-GG^T=N^+ \tag{1.32}$$

$$Q_{XX}=Q'-Q'SS^TQ'=N^+ \tag{1.33}$$

证明与$Q_{11}=N^+$类似，不再重复。

(1.26)的协因数：

$$Q_{XX}=A^+(A^+)^T=(A^TA)^+=N^+ \tag{1.34}$$

实际上，以上各法求X的公式都可归结为

$$X=N_m^-A^Tl \tag{1.35}$$

$$Q_{XX}=N_m^-N(N_m^-)^T=N^+ \tag{1.36}$$

亦即，尽管各法出发点不同，但都可归结为取用最小范数逆的不同，最小范数解(1.35)和协因数(1.36)完全相同。

二　最小二乘原则与确定函数

在最小二乘原则(1.3)下，由(1.5)可得最小二乘解的一个特解为

$$X=N^-A^Tl \tag{2.1}$$

显然，最小二乘解不唯一。代入(1.2)得平差改正数为

$$V=(AN^-A^T-I)l \tag{2.2}$$

只要N^-是N的广义逆，AN^-A^T总是一个不变量。设G和$\overline{G}$均是N的广义逆，按广义逆性质有

$$AGA^TA=A \qquad A\overline{G}A^TA=A \tag{2.3}$$

于是有

$$AGA^TA=A\overline{G}A^TA$$

$$AGA^TAGA=A\overline{G}A^TAGA$$

因$A^TAGA=A^T$，故必有

$$AGA^T=A\overline{G}A^T \tag{2.4}$$

这就证明了AN^-A^T是个不变量。

自由网平差求得的X是满足最小范数条件的最小二乘解，它是最小二乘解的一个特解，将(1.6)代入(1.2)得

$$V=(AN_m^-A^T-I)l \tag{2.5}$$

其结果与任何最小二乘解(2.1)的V相同。

如令（2.1）中的N^-为

$$N^- = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}^- \begin{pmatrix} N_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

式中N_{11}的秩$R(N_{11}) = q$，且满秩，则（2.1）的解为

$$\underset{q1}{X_1} = N_{11}^{-1}A_1^T l \qquad \underset{d1}{X_2} = 0 \tag{2.6}$$

这是经典自由网平差情形。可见，自由网平差的V与经典平差的相同。

由此，自由网中观测量的平差值及其线性函数都与经典平差同，因此，它们是网中的确定函数，这种函数与附加的最小范数条件无关，仅取决于最小二乘原则。

作者在[14]中，对网中无偏函数$Z = F^TX$建立了如下无偏条件

$$F^TN_m^-N = F^T \tag{2.7}$$

对于网中观测量的平差值

$$\overline{l} = l + V = AX \tag{2.8}$$

因为

$$AN_m^-N = AN_m^-A^TA = AN^-A^TA = A$$

满足（2.7），网中确定函数为最优无偏估计。这在经典平差已作过证明，这一结论是显然的。

改正数平方和为

$$\begin{aligned} V^TV &= l^T(I - AN^-A^T)(I - AN^-A^T)l \\ &= l^T(I - AN^-A^T)l \end{aligned} \tag{2.9}$$

故$(I - AN^-A^T)$为幂等阵，其秩等于其迹：

$$R(I - AN^-A^T) = tr(I) - tr(AN^-A^T) = n - q \tag{2.10}$$

由（2.9）得：

$$\frac{1}{\sigma^2}V^TV = l'^T(I - AN^-A^T)l' \tag{2.11}$$

式中$l' = \frac{1}{\sigma}l$，l'为$N\left(\frac{1}{\sigma}E(l), I\right)$向量。根据二次型分布定理，$l'$为正态向量，$(I - AN^-A^T)D(l')$为幂等，则（2.11）为$x^2$变量，数学期望为$R(I - AN^-A^T)$。故有

$$\frac{1}{\sigma^2}V^TV \sim x^2_{(n-q)} \tag{2.12}$$

$$E\left(\frac{V^TV}{n-q}\right) = \sigma^2 \tag{2.13}$$

可见，$\mu^2 = \frac{V^TV}{n-q}$为σ^2的无偏估计，其结果也与经典平差同。

三 最小范数条件与参考基准

[14]中已指出，最小范数条件（1.4）与附加的未知参数条件（1.10)等价。其中特征向

量阵S，在水准网中为

$$\underset{1u}{S^T} = (1 \quad 1 \cdots 1) \tag{3.1}$$

测边网中为

$$\underset{3u}{S^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 1 & 0 \\ 0 & 1 \cdots\cdots 0 & 1 \\ -y_1^0 & x_1^0 \cdots\cdots -y_m^0 & x_m^0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

并已说明，自由网平差与经典平差类似，同样存在着参考基准，所不同的是，这特参考基准并不是外部配置的，而是依赖于选定的近似参考系确定的内参考基准。由于水准网中重心高程的改正数为零，测边网中重心坐标不变和各点至重心点向经距离平方为权的向经方位角的带权平均数不变，所以水准网的内参考基准是固定重心点的高程，测边网是固定重心点的坐标以及上述的一个重心方位角。

在给定近似参考系前题下，确定网中内参考基准依赖于最小范数条件，它与最小二乘原则无关。

保持网中确定函数不变，内参考基准与其它参考基准是可以互相转换的。

设对自由网作经典平差，结果为（2.6），全部参数的估值为$\tilde{X}^T = (\tilde{X}_1^T \quad \tilde{X}_2^T)$，由于经典平差的外部配置是可以任意选定的，即可令X中任意d个元素为零，设另一不同外部配置的解为$\tilde{\tilde{X}}^T = (\tilde{\tilde{X}}_1^T \quad \tilde{\tilde{X}}_2^T)$，$\tilde{\tilde{X}}_2^T$与$\tilde{X}_2^T$一样为零向量。法方程（2.1)不同的特解必然满足下式：

$$\tilde{X} = \tilde{\tilde{X}} + \underset{d1}{SD} \tag{3.3}$$

式中S即特征向量阵，可由（3.1)、(3.2）等确定，D为变换参数矩阵，对于水准网$D=\delta H$为高程平移量，对于测边网

$$D^T = (\delta x \quad \delta y \quad \delta \varphi) \tag{3.4}$$

其元素分别是纵、横坐标平移量和网的旋转量）。

前已证明，自由网平差中，不论取哪一个最小二乘特解，观测量的平差值是确定函数。事实上，

$$l + V = A\tilde{X} = A(\tilde{\tilde{X}} + SD) = A\tilde{\tilde{X}} \tag{3.5}$$

式中顾及了$AS = 0$。

再一次说明，确定函数与最小范数条件无关，作不同的外部配置，自然求出的协因数也不同，例如，$Q_{\tilde{X}\tilde{x}}$与$Q_{\tilde{\tilde{x}}\tilde{\tilde{x}}}$就不相同。

但是，当将外部配置转向内参考基准时，也就是不用经典平差，而是附加最小范数条件，则就有X的协因数迹为最小的优良性质。

现对$\tilde{X}$作相似变换，得

$$X = \tilde{X} + SD \tag{3.6}$$

则有

$$X^T X = (\tilde{X} + SD)^T (\tilde{X} + SD)$$

按照最小范数条件（1.4），得

$$\frac{dX^TX}{dD}=2\ (\tilde{X}+SD)^TS=0$$

$$S^T\ (\tilde{X}+SD)\ =0$$

$$(S^TS)\ D+S^T\tilde{X}=0 \tag{3.7}$$

因S^TS为满秩阵，$R\ (S^TS)\ =d$，解得

$$D=-\ (S^TS)^{-1}S^T\ \tilde{X} \tag{3.8}$$

代入（3.6），即得由任一经典平差的$\tilde{X}$转换成自由网平差的X计算公式：

$$X=\tilde{X}-S(S^TS)^{-1}S^T\tilde{X}=H\tilde{X} \tag{3.9}$$

$H=I-S(S^TS)^{-1}S^T$，为幂等阵，称为H_{ELMERT}变换阵。

由（3.9）知，X与$\tilde{X}$的协因数有如下关系：

$$Q_{XX}=\ (I-S(S^TS)^{-1}S^T)\ Q_{\tilde{X}\tilde{X}}\ (I-S(S^TS)^{-1}S^T) \tag{3.10}$$

此式可用来换算X的协因数

$$\begin{aligned}tr(Q_{XX})&=tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}})-tr\ (S(S^TS)^{-1}S^TQ_{\tilde{X}\tilde{X}})\\&\quad-tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}}S(S^TS)^{-1}S^T)+tr(S(S^TS)^{-1}S^TQ_{\tilde{X}\tilde{X}}S(S^TS)^{-1}S^T)\\&=tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}})-tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}}S(S^TS)^{-1}S^T)\end{aligned} \tag{3.11}$$

$(S^TS)^{-1}$正定，可令$(S^TS)^{-1}=WW^T$，于是

$$\begin{aligned}tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}}S(S^TS)^{-1}S^T)&=tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}}SWW^TS^T)\\&=tr\ (W^TS^TQ_{\tilde{X}\tilde{X}}SW)\ \geqslant 0\end{aligned}$$

由此可见，在（3.11）中，

$$tr(Q_{XX})\leqslant tr(Q_{\tilde{X}\tilde{X}}) \tag{3.12}$$

因为$\tilde{X}=N^-A^Tl$，故

$$Q_{\tilde{X}\tilde{X}}=N^-A^TAN^-=N_r^- \tag{3.13}$$

N_r^-为N的反射广义逆，为N^-型，而Q_{XX}已证明是N的N^+，（3.12）也就成为

$$tr(N^+)\leqslant tr\ (N_r^-) \tag{3.14}$$

这是自由网平差中最小范数条件，与X的协因数迹为最小等价性的又一证明，同时也给出了N^+是N^-中具有最小迹这一性质的一个验证。

四　协因数阵及其秩

在自由网平差，研究各类矩阵的秩，特别是协因数阵的秩，不仅有理论意义，而且对理解该法的性质很有帮助。

未知参数平差值x的协因数阵是

$$Q_{XX}=N(NN)^-N(NN)^-N=N^+ \tag{4.1}$$

其秩

$$R(Q_{XX})=R(N^+)=R(N)=q \tag{4.2}$$

这是因为

$$R(N)\geqslant R(N^+N)\geqslant R(N^+NN^+)=R(N^+)$$

$$R(N^{+}) \geqslant R(N^{+}N) \geqslant R(NN^{+}N) = R(N)$$

故必有 $$R(N^{+}) = R(N) \tag{4.3}$$

由此，X 是 u 元 q 维正态向量，其分布限于 q 维子空间。

观测量平差值 $\overline{l} = l + V = AX$ 的协因数阵是

$$Q_{\overline{l}\overline{l}} = AQ_{XX}A^{T} = AN^{+}A^{T} = J \tag{4.4}$$

$J^{2} = AN^{+}A^{T}AN^{+}A^{T} = AN^{+}A^{T} = J$，为幂等阵。

$$R(Q_{\overline{l}\overline{l}}) = R(J) = tr(J) = tr(NN^{+})$$

NN^{+} 也是幂等阵，故上式为

$$R\ (Q_{\overline{l}\overline{l}}) = R(NN^{+}) = q \tag{4.5}$$

由此，$\overline{l}$ 也是 q 维正态向量，但是 n 元的，其分布也限于 q 维子空间。

由于 V 与 $\overline{l}$ 互独立，即 $Q_{V\overline{l}} = 0$，故 V 的协因数阵为

$$Q_{VV} = Q - Q_{\overline{l}\overline{l}} = I - J \tag{4.6}$$

$I - J$ 亦为幂等阵，则有

$$R(Q_{VV}) = R(I - J) = tr(I) - tr(J)$$
$$= n - q \tag{4.7}$$

由此，V 是 n 元 n－q 维正态向量，n－q 即为网中多余观测数，V 的分布属于 n－q 维子空间。

如按经典平差，参数 X 为 $q\times 1$ 阶，$R(Q_{XX}) = q$，X 为 q 维向量，而 $R(Q_{\overline{l}\overline{l}}) = q$，$R\ (Q_{VV}) = n - q$，它们的秩数完全与自由网平差同。可见，两种方法所研究空间也相同。

参 考 文 献

[1] E. Mittermayer: A generalisation of the least squares method for adjustment of free networks 《Bulletin Géodesique》 No 104,1972

[2] E.Mittermayer: Zur Ausgleichung freier Netze 《Z f V》 (12) 1972

[3] H.Wolf: Helmerts lösung zum Problen der freien Netze mit singulärer Normalgleichungsmetrin 《Z f V》 (5) 1972

[4] H.Wolf: Die Helmert invers bei freien geodectischen Netze 《Z f V》 1973

[5] H.Pelzer: Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben 《Z f V》 (5)、(11) 1974

[6] Gottharot: Zur Bestimmung der inversen eine singulärer Normalgleichungsmatrix, 《Z f V》 (3) 1974

[7] K.R.Koch: Herleitung der Methode der kleinsten Quadrate 《Z f V》 (12) 1975

[8] A.Perelmuter: The Adjustment of free Nets 《Bulletin Géodesique》 (4) 1979

[9] M.A.R.Cooper: A singular braced quadrilateral 《Survey Review》 (198) 1980

[10] K.R.Koch: Parameterschälzung und Hypothesentests in linearen Modellen 1980

[11] A.Bjerhammar: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses 1973
[12] P. Meissl: Die Innere Genauigkeit eines Punkthaufeus 《Z f V》 (5.6) 1962
[13] W.Welsch: 《对变形和控制网进行监视和分析的若干技术问题》 武汉测绘学院译 1980
[14] 陶本藻：论自由网平差 《中国科学院测地所测量与地球物理集刊》 第四号，1982
[15] 周江文：越组约化理论 《误差理论》 1979
[16] Z.M.Mikhail: Observations and least squares 1976
[17] 刘大杰：论亏秩自由网平差 《武汉测绘学院学报》 (1) 1981

Some Theoretical Problems in the Adjustment of Free Networks

Tao Benzao

Abstract

In this paper various approaches to the adjustment of free networks on the basis of the theory of generalized inverse are analyzed. It has been pointed out that the difference between them lies in the adoption of different least norm inverses. The nature of the residuals of free networks, and of the reference systems is also dealt with.

It has been proved that the residuals thus obtained are the same as those obtained by the classical adjustment of free networks and are independent of the additional least norm condition. It was shown that the least norm condition determines the orientation of reference system of the network. The coordinates from these two types of adjustment can be converted with each other by means of these reference systems.