我国天文大地网与卫星多普勒网联合平差的初步方案

崔希璋　　刘大杰

【提　要】 本文提出的联合平差方案的要点是，先将天文大地网和卫星多普勒网按原定方案分别单独平差，然后将天文大地网和多普勒网的公共点的单独平差成果进行联合平差。在联合平差时，将公共点上的大地经纬度作为随机参数（即信号），以在天文大地网平差得到的这些点的经纬度值及其方差，作为信号的先验期望和先验方差，而以多普勒网平差得到的这些点在美国的NWL—10D地心坐标系统的坐标值作为相关观测值，列出它们的包含信号和另外几个参数的观测方程式，然后按最小二乘配置法进行平差。

我国的卫星多普勒网已布设完毕，而且天文大地网平差也基本完成，为此，利用卫星多普勒网的成果来加强天文大地网是当前一项十分重要且十分迫切的任务。

为了利用卫星多普勒的成果加强天文大地网，最理想的方法当然是将多普勒网的观测成果和天文大地网的观测成果放在一起，同时进行整体平差。然而，我国的天文大地网平差的计算程序尚未作此考虑，因此，采用这种方法是不现实的。

本文提出的联合平差方案的要点是，先将天文大地网和卫星多普勒网按原定方案分别单独平差，然后将天文大地网和多普勒网的公共点的单独平差成果进行联合平差。在联合平差时，将公共点上的大地经纬度作为随机参数（即信号），以在天文大地网平差中得到的这些点的经纬度值及其方差，作为信号的先验期望和先验方差，而以多普勒网平差得到的这些点在美国的NWL—10D地心坐标系统的坐标值作为相关观测值，列出它们的包含信号和另外几个参数（两个椭球体的转换参数等）的观测方程式，然后按最小二乘配置法进行平差。按这种方案平差的结果与整体平差完全一致，并且能充分利用天文大地网的平差成果，而对多普勒网的平差也无须提出特别要求。联合平差可以在普通的电子计算机上进行。

一　基本原理

设 $\underset{n_1\times 1}{L_1}$ 为天文大地网中的观测值向量，包括方向观测值和电磁波测距仪测得的距离观测值；$\underset{t_1\times 1}{X_1}$ 为公共点上的经纬度未知数，$\underset{t_1\times 1}{Z_1}$ 为天文大地网中的其它未知数，包括定向未知数和其它点上的经纬度未知数；$\underset{n_2\times 1}{L_2}$ 为多普勒计数观测值；$\underset{t_2\times 1}{X_2}$ 为公共点在NWL—10D地心坐标系统中的坐标未知数；$\underset{t_2\times 1}{Z_2}$ 为多普勒网中的其它未知数，包括卫星轨道参数和频偏等。整体平差的观测方程式设为

$$\left.\begin{aligned}E(L_1)&=f_1(X_1,Z_1)\\E(L_2)&=f_2(X_2,Z_2)\end{aligned}\right\}\tag{1,1}$$

参数X_1和 X_2 之间还存在条件式

$$f(X_1,Y)-X_2=0\tag{1,2}$$

式中 $\underset{\tau\times 1}{Y}$为非随机参数。

将 (1,1) 和 (1,2) 式线性化，得

$$\left.\begin{aligned}E(L_1)&=A_1x_1+C_1z_1+f_1(X_1^0,Z_1^0)\\E(L_2)&=A_2x_2+C_2z_2+f_2(X_2^0,Z_2^0)\\Ax_1-x_2&+By+f(X_1^0,Y^0)-X_2^0=0\end{aligned}\right\}\tag{1,3}$$

则可写出误差方程式和条件式

$$\left.\begin{aligned}V_1&=A_1x_1+C_1z_1-l_1\\V_2&=A_2x_2+C_2z_2-l_2\\Ax_1&-x_2-By+W=0\end{aligned}\right\}\tag{1,4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&x_1=X_1-X_1^0\quad,\quad x_2=X_2-X_2^0\quad,\quad y=Y-Y^0\\&z_1=Z_1-Z_1^0\quad,\quad z_2=Z_2-Z_2^0\ ,\\&l_1=-f_1(X_1^0\ ,\ Z_1^0)+L_1\\&l_2=-f_2(X_2^0\ ,\ Z_2^0)+L_2\ ,\\&w=f(X_1^0\ ,\ Y^0)-X_2^0\ 。\end{aligned}\right\}\tag{1,5}$$

天文大地网与多普勒网整体平差也就是利用 (1,4) 式进行平差。

由（1,4）式可得法方程式

$$\left.\begin{array}{llllll}A_1^TP_1A_1x_1+A_1^TP_1C_1z_1 & & +A^TK & -A_1^TP_1l_1 & =0\\C_1^TP_1A_1x_1+C_1^TP_1C_1z_1 & & & -C_1^TP_1l_1 & =0\\ & A_2^TP_2A_2x_2+A_2^TP_2C_2z_2-K & & -A_2^TP_2l_2 & =0\\ & C_2^TP_2A_2x_2+C_2^TP_2C_2z_2 & & -C_2^TP_2l_2 & =0\\ & & +By+w & & =0\\Ax_1 & -x_2 & B^TK & & =0\end{array}\right\}\tag{1,6}$$

式中 P_1、P_2分别为 L_1和L_2的权矩阵。由上式消去 z_1和z_2可得

$$\left.\begin{array}{lllll}N_{11}x_1 & +A^TK & +W_1 & =0\\ & N_{22}x_2-K & +W_2 & =0\\Ax_1 & -x_2 & +By+W & =0\\ & B^TK & & =0\end{array}\right\},\tag{1,7}$$

$$\left.\begin{aligned}N_{11}&=A_1^TP_1A_1-A_1^TP_1C_1\ (C_1^TP_1C_1)^{-1}C_1^TP_1A_1\\W_1&=-A_1^TP_1l_1+A_1^TP_1C_1\ (C_1^TP_1C_1)^{-1}C_1^TP_1l_1\\N_{22}&=A_2^TP_2A_2-A_2^TP_2C_2\ (C_2^TP_2C_2)^{-1}C_2^TP_2A_2\\W_2&=-A_2^TP_2l_2+A_2^TP_2C_2\ (C_2^TP_2C_2)^{-1}C_2^TP_2l_2\end{aligned}\right\}\tag{1,8}$$

再由 (1,7) 式之第三式和第二式可得到

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + By + W \\ K &= \mathbf{N}_{22}x_2 + W_2 \\ &= \mathbf{N}_{22}(Ax_1 + By) + (W_2 + \mathbf{N}_{22}W) \end{aligned}\right\} \tag{1,9}$$

将（1,9）式代入（1,7）式之第一、四式，有

$$\left.\begin{aligned} &(\mathbf{N}_{11} + A^T\mathbf{N}_{22}A)x_1 + A^T\mathbf{N}_{22}By + (W_1 + A^TW_2 + A^T\mathbf{N}_{22}W) = 0 \\ &B^T\mathbf{N}_{22}Ax_1 + B^T\mathbf{N}_{22}By + B^T(W_2 + \mathbf{N}_{22}W) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1,10}$$

可解得

$$\left.\begin{aligned} \hat{y} = &-\{B^T\mathbf{N}_{22}B - B^T\mathbf{N}_{22}A(N_{11} + A^TN_{22}A)^{-1}A^T\mathbf{N}_{22}B\}^{-1}\cdot \\ &\{B^T(W_2 + \mathbf{N}_{22}W) - B^T\mathbf{N}_{22}A(\mathbf{N}_{11} + A^T\mathbf{N}_{22}A)^{-1}(W_1 + A^TW_2 + A^T\mathbf{N}_{22}W)\} \\ \hat{x}_1 = &-(\mathbf{N}_{11} + A^T\mathbf{N}_{22}A)^{-1}\{A^T\mathbf{N}_{22}B\hat{y} + (W_1 + A^TW_2 + A^T\mathbf{N}_{22}W)\} \end{aligned}\right\} \tag{1,11}$$

利用矩阵反演公式可将上式化为

$$\left.\begin{aligned} \hat{y} = &\{B^T(A\mathbf{N}_{11}^{-1}A^T + \mathbf{N}_{22}^{-1})B\}^{-1}B^T(\mathbf{N}_{22}^{-1} + A\mathbf{N}_{11}^{-1}A^T)^{-1}\cdot \\ &(A\mathbf{N}_{11}^{-1}W_1 - \mathbf{N}_{22}^{-1}W_2 - W) \\ \hat{x}_1 = &-\mathbf{N}_{11}^{-1}W_1 + \mathbf{N}_{11}^{-1}A^T(A\mathbf{N}_{11}^{-1}A^T + \mathbf{N}_{22}^{-1})^{-1}\cdot \\ &(A\mathbf{N}_{11}^{-1}W_1 - \mathbf{N}_{22}^{-1}W_2 - W - B\hat{y}) \end{aligned}\right\} \tag{1,12}$$

容易理解，天文大地网单独平差就是利用 L_1 进行平差。由（1,4）式的第一式可得到它的法方程式，消去 z_1，就得到 X_1 的估值 $\widetilde{X}_1$ 及其方差 D_{x_1} 为

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= X_1^0 + \widetilde{x}_1 = X_1^0 - N_{11}^{-1}W_1 \\ D_{x_1} &= N_{11}^{-1}\sigma_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{1,13}$$

式中 σ_0 为单位权中误差。同样，多普勒网利用 L_2 单独平差可求得 x_2 的估值 $\widetilde{x}_2$ 及其方差 D_{x_2} 为

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{X}_2 &= X_2^0 + \widetilde{x}_2 = X_2^0 - \mathbf{N}_{22}^{-1}W_2 \\ D_{x_2} &= \mathbf{N}_{22}^{-1}\sigma_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{1,14}$$

现在以公共点的经纬度 X_1 为信号，以 $\widetilde{X}_1$ 和 D_{x_1} 为它的先验期望和先验方差，并令

$$X_1 = \widetilde{X}_1 + x = X_1^0 + \widetilde{x}_1 + x \tag{1,15}$$

则 x 的数学期望为

$$E(x) = 0 \tag{1,16}$$

再以 $\widetilde{X}_2$ 作为观测值，并记

$$L = \widetilde{X}_2 \tag{1,17}$$

相应的观测噪声 Δ 的方差为 $D_{x_2} = \mathbf{N}_{22}^{-1}\sigma_0^2$，则可根据（1,2）式列出如下观测方程式

$$E(L) = f(X_1, Y) \tag{1,18}$$

将此式在 $\widetilde{X}_1$，Y^0 处线性化得

$$E(L) = Ax + By + f(\widetilde{X}_1,\ Y^0) \tag{1,19}$$

或写为

$$l = Ax + By + \Delta \tag{1,20}$$

式中有

$$\begin{aligned} l &= L - f(\widetilde{X}_1,\ Y^0) = \widetilde{X}_2 - A\widetilde{x}_1 - f(X_1^0,\ Y^0) \\ &= \widetilde{x}_2 - A\widetilde{x}_1 - [X_2^{0'} - f(X_1^0, Y^0)] \end{aligned}$$

即

$$l = AN_{11}^{-1}W_1 - N_{22}^{-1}W_2 - W \tag{1,21}$$

于是，可以根据最小二乘配置求非随机参数和信号的估值公式得出

$$\left.\begin{aligned} \hat{y} &= \{B^T(AN_{11}^{-1}A^T + N_{22}^{-1})^{-1}B\}^{-1}B^T(AN_{11}^{-1}A^T + N_{22}^{-1})^{-1}l \\ \hat{x} &= N_{11}^{-1}A^T(AN_{11}^{-1}A^T + N_{22}^{-1})^{-1}(l - B\hat{y}) \end{aligned}\right\} \tag{1,22}$$

顾及（1,15）和（1,21）式可知，由（1,22）式所得到的结果与（1,12）式的结果是完全一致的。这样，也就证明了按上述配置法来进行联合平差，与整体平差的结果完全一致。

二　观测方程式

根据上述原理进行天文大地网和多普勒网联合平差时，公共点 k 上的观测方程式(1,18)的形式是

$$\begin{pmatrix} E(Lx_k) \\ E(Ly_k) \\ E(Lz_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} + \mu R_1 R_2 R_3 \begin{pmatrix} (N_k + H_k)\cos B_k \cos L_k \\ (N_k + H_k)\cos B_k \sin L_k \\ [N_k(1-e^2) + H_k]\sin B_k \end{pmatrix} \tag{2,1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \\ &R_2 = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix},\quad N_k = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B_k}} \end{aligned}\right\} \tag{2,2}$$

式中符号的含义如下：

Lx_k，Ly_k，Lz_k——由多普勒网平差得到的，在 NWL—10D 地心坐标系中 k 点坐标值。

X_S，Y_S，Z_S——参考椭球体中心在 NWL—10D 地心坐标系中的坐标值。

ω、ε、ψ 和 μ——两个椭球体上的直角坐标系之间的欧拉角和比例尺因子。

L_k，B_k，H_k——k 点在参考椭球体上的大地经纬度和大地高，由它们构成联合平差中的信号。

a，e——参考椭球体的长半轴和偏心率。

N_k——参考椭球体在 k 点处的卯酉圈曲率半径。

(2,1) 式的线性形式为

$$\begin{pmatrix} lx_k \\ ly_k \\ lz_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_S \\ dy_S \\ dz_S \end{pmatrix} + R_{10}R_{20}R_{30}\begin{pmatrix} X_{K0} \\ Y_{K0} \\ Z_{K0} \end{pmatrix} d\mu + \mu_0 R'_{10}R_{20}R_{30}\begin{pmatrix} X_{K0} \\ Y_{K0} \\ Z_{K0} \end{pmatrix} d\omega +$$

$$+\mu_0 R_{10}R'_{20}R_{30}\begin{pmatrix} X_{K0} \\ Y_{K0} \\ Z_{K0} \end{pmatrix} d\varepsilon + \mu_0 R_{10}R_{20}R'_{30}\begin{pmatrix} X_{K0} \\ Y_{K0} \\ Z_{K0} \end{pmatrix} d\psi +$$

$$+\mu_0 R_{10}R_{20}R_{30}\begin{pmatrix} -Y_{K0} \\ X_{K0} \\ 0 \end{pmatrix} dL_K + \mu_0 R_{10}R_{20}R_{30} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{a^2} N_{k0}^3 e^2 \cos^2 B_{k0} - N_{k0} - H_{k0}\right) \sin B_{k0} \cos L_{k0} \\ \left(\frac{1}{a^2} N_{k0}^3 e^2 \cos^2 B_{k0} - N_{k0} - H_{k0}\right) \sin B_{k0} \sin L_{k0} \\ \left(\frac{N_{k0}^3 e^2}{a^2} (1-e^2) \sin^2 B_{k0} + N_{k0}(1-e^2) + H_{k0}\right) \cos B_{k0} \end{pmatrix} \cdot dB_k$$

$$+\mu_0 R_{10}R_{20}R_{30}\begin{pmatrix} \cos B_{k0} \cos L_{k0} \\ \cos B_{k0} \sin L_{k0} \\ \sin B_{k0} \end{pmatrix} dH_k + \begin{pmatrix} \Delta_{xk} \\ \Delta_{yk} \\ \Delta_{zk} \end{pmatrix} \qquad (2,3)$$

其中

$$\begin{pmatrix} lx_k \\ ly_k \\ lz_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lx_k \\ Ly_k \\ Lz_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{S0} \\ Y_{S0} \\ Z_{S0} \end{pmatrix} - \mu_0 R_{10}R_{20}R_{30}\begin{pmatrix} X_{k0} \\ Y_{k0} \\ Z_{k0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{k0} \\ Y_{k0} \\ Z_{k0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_{k0}+H_{k0})\cos B_{k0}\cos L_{k0} \\ (N_{k0}+H_{k0})\cos B_{k0}\sin L_{k0} \\ [N_{k0}(1-e^2)+H_{k0}]\sin B_{k0} \end{pmatrix}, \quad R'_{10} = \begin{pmatrix} -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 & 0 \\ -\cos\omega_0 & -\sin\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R'_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varepsilon_0 & \cos\varepsilon_0 \\ 0 & -\cos\varepsilon_0 & -\sin\varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad R'_{30} = \begin{pmatrix} -\sin\psi_0 & 0 & -\cos\psi_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0 \end{pmatrix} \qquad (2,4)$$

式中下标“0”均表示用它们的近似值代入计算的数值。如果将大地高作为已知数据，则dH_k这一项去掉。如果联合平差还考虑参考椭球体的定位和定向等问题，观测方程还可作适当变换。当然，观测方程也可以采用其它形式。

三　计算步骤与程序框图

联合平差的实际步骤是：

1、输入天文大地网平差所得到的各公共点之大地经纬度 L_k、B_k 和它们的方差阵，大地高 H_k 及其方差阵，输入多普勒网平差所得到的各公共点的地心直角坐标及其方差阵。

2、给定非随机参数的近似值，先取

$$\mu_0 = 1, \quad \omega_0 = \varepsilon_0 = \psi_0 = 0,$$

输入 X_{S0}, Y_{S0}, Z_{S0}。

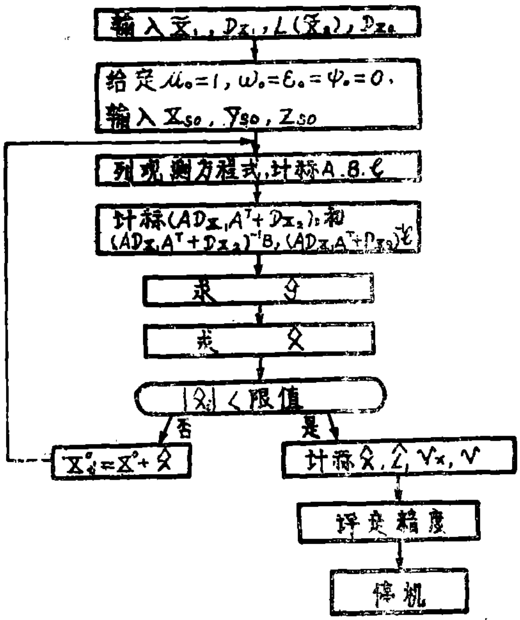
3、列观测方程式（线性形式）

4、按最小二乘配置法求 $\hat{y}$ 和 $\hat{x}$。

5、当 $\hat{x}$ 各中分量之绝对值超过给定的限值时，以求得的 $\hat{Y}$ 和 $\hat{X}$ 作为参数的新的近似值重复（3）、（4）的计算。

6、计算最后结果并评定其精度。

程序设计的框图如下：



A primary program for the Combined Adjustment of Astro–geodetic and Doppler–satellite Nets in China

Cui Xizhang　　Liu Dajie

Abstract

This paper deals with a program of combined adjustment. Its main point is as follows. At first, the astro-geodetic net and Doppler-satellite net are adjusted respectively according to its own original program; secondly, the separately adjusted results of common points between the astro-geodetic net and Doppler-satellite net are to be jointly adjusted again. In the combined adjustment, the geodetic longitudes and latitudes of common points are regarded as random parameters (these are signals), the values of longitude and latitude of these points and variances obtained by the astro-geodetic adjustment are regarded as priori expectations and priori variances of signals, and their coordinates in the American NWL-10D coordinate system obtained by the Doppler net adjustment are regarded as correlated values of observation. Then observation equations which contain signals and other some non-random parameters (e.g transformation parameters between two ellipsoids, etc) are given. Finally it is adjusted according to the least squares collocation.