

特级导线中天文方位角的配置密度

尹任祥

【提要】 本文按照我国特级导线布设方案，讨论了加测天文方位角能否提高横向精度，以及天文方位角应以怎样的密度来配置。所得结论与布柯夫斯基文献[6]不同；对于[6]中不妥之处，亦作了适当的讨论。

在特级导线中如何提高横向精度是一个非常重要的问题，采用条件平差法，以边长和方向作为观测值；对加测的天文方位角分两种情况予以考虑：一种是作为观测值，一种是作为固定值而顾及它们作为起始数据的误差影响，导出了一些精度估算公式。并且应用 ALGOL 语言编制了若干电算程序。根据如下几种参数变化，对直伸导线各点的横向精度进行了计算：

1. 改变导线点数。
2. 改变加测天文方位角个数。
3. 改变天文方位角的权。
4. 加测一个天文方位角，但改变位置。
5. 加测两个天文方位角，但改变它们的位置。

就计算所得数据作了初步分析，认为加测天文方位角是可以提高导线端点横向精度的，其配置密度以间隔 2—3 条边为宜。

本文所得到的天文方位角配置密度的结论与 Borkowski 等人的结论不同，其原因在于他的分析方法欠妥，本文对此作了适当讨论。

(一) 直伸导线各点横向精度估算方法和估算公式

设有等边直伸导线 AB 如图一，起点 A 为固定点，观测了导线各边边长 $s_1—s_5$ 和方向 $L_1—L_n$ ，并且在 A—1，2—3，4—B 上加测有方位角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ；现采用条件平差法来估算导线上各点的横向精度，可列出方位角条件式：

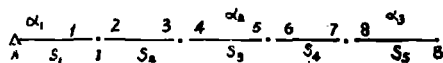


图 一

$$\left. \begin{aligned} -V_1 + V_2 - V_3 + V_4 + V_{\alpha_1} - V_{\alpha_2} + \omega_1 &= 0 \\ -V_5 + V_6 - V_7 + V_8 + V_{\alpha_2} - V_{\alpha_3} + \omega_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若以 AB 为 y 轴，则导线端点 B 横向精度的函数式为：

* 本文系研究生毕业论文的一部分，指导教师是崔希璋教授、於宗俦副教授、刘大杰讲师。

$$\begin{aligned}
 & + \cdots + V_{2i-3} - V_{2i-2} + \cdots - n_1 V_{\alpha_1} - (n_2 - n_1) V_{\alpha_2} - \\
 & - \cdots - (i - n_j) V_{\alpha_{j+1}} \left. \right\} \frac{s}{\rho''} \quad (6)
 \end{aligned}$$

式中 n_j 为 i 点左边最近一个加测方位角之边的起点号。 j 等于 i 点左边加测方位角的个数减去 1。

若假定 $r+1$ 个方位角严格均匀布设, 则 (4) 式中 $n_2 = 2 \cdot n_1$, $n_3 = 3 \cdot n_1$, $\cdots \cdots n_{r-1} = (r-1)n_1$, $n = r \cdot n_1$; B 点横向精度权函数式为:

$$\begin{aligned}
 F_{x_B} = & \left\{ \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_1 - \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_2 + \left(\frac{n}{r} - 2 \right) V_3 - \left(\frac{n}{r} - 2 \right) V_4 + \cdots + V_{\frac{2n}{r}-3} \right. \\
 & - V_{\frac{2n}{r}-2} + \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_{\frac{2n}{r}+1} - \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_{\frac{2n}{r}+2} + \cdots + V_{\frac{4n}{r}-3} \\
 & - V_{\frac{4n}{r}-2} + \cdots \cdots + V_{2n-3} - V_{2n-2} - \frac{n}{r} V_{\alpha_1} - \frac{n}{r} V_{\alpha_2} - \cdots \\
 & \left. - \frac{n}{r} V_{\alpha_r} - V_{\alpha_{r+1}} \right\} \frac{s}{\rho''} \quad (7)
 \end{aligned}$$

i 点横向精度权函数式为:

$$\begin{aligned}
 F_{x_i} = & \left\{ \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_1 - \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_2 + \left(\frac{n}{r} - 2 \right) V_3 - \left(\frac{n}{r} - 2 \right) V_4 + \cdots + \right. \\
 & + V_{\frac{2n}{r}-3} - V_{\frac{2n}{r}-2} + \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_{\frac{2n}{r}+1} - \left(\frac{n}{r} - 1 \right) V_{\frac{2n}{r}+2} + \cdots + \\
 & + V_{\frac{4n}{r}-3} - V_{\frac{4n}{r}-2} + \cdots - \left(i - \frac{n \cdot j}{r} - 1 \right) V_{\frac{2 \cdot n \cdot j}{r}+1} - \\
 & - \left(i - \frac{n \cdot j}{r} - 1 \right) V_{\frac{2 \cdot n \cdot j}{r}+2} + \cdots + V_{2i-3} - V_{2i-2} - \frac{n}{r} V_{\alpha_1} - \\
 & \left. - \frac{n}{r} V_{\alpha_2} - \cdots - \frac{n}{r} V_{\alpha_j} - \left(i - \frac{n \cdot j}{r} \right) V_{\alpha_{j+1}} \right\} \frac{s}{\rho''} \quad (8)
 \end{aligned}$$

现引用以下符号:

A 为条件方程式系数矩阵。

A_1 为条件方程式系数阵中与方向观测值改正数有关的子矩阵,

A_2 为条件方程式系数阵中与方位角观测值改正数有关的子矩阵,

F 为端点 B 横向精度权函数式之系数向量,

F_1 为 F 中与方向观测值改正数有关的部分,

$$P_{i,j} = P_{j,i} = p_{r-i+1, r-j+1}; \tag{16}$$

$$P_{i,j} = h_{i-2} \cdot h_{r-j-1}; \quad i \leq j;$$

例如当 $r = 4, a = 3$ 时

$$P = \begin{pmatrix} 21 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 24 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 24 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 21 \end{pmatrix} \tag{17}$$

将所得 N^{-1} 连同由 (7) 式求得之 F , 以及相应的 Q 一并代入 (9) 式。经整理后即可得到方位角严格均匀布设时导线端点 B , 按 I 法估算横向精度的公式:

$$m_u = \pm \frac{m_{\text{方}} \cdot s}{\rho''} \sqrt{\frac{1}{P_{FI}}} \tag{18}$$

$$\frac{1}{P_{FI}} = \frac{n(n-r)(2n-r)}{3r^2} + \frac{n^2+r}{r} \cdot q - \frac{(n-r)^2 \cdot n^2}{r^4} \cdot \frac{P_z}{q \cdot h_{r-1}} - \frac{2(n-r)^2 \cdot n \cdot \bar{P}_{r-2}}{r^3 \cdot h_{r-1}} - \frac{(n-r)^2 \cdot q \cdot h_{r-2}}{r^2 \cdot h_{r-1}} \tag{19}$$

式中 P_z 表示 r 阶 P 阵所有元素之和。

\bar{P}_{r-2} 表示 $h_{-1} + h_0 + h_1 + \dots + h_{r-2}$ 。

当 $r = n$ 时, 即每条边上都加测方位角时, (11), (18) 同时简化为:

$$m_u = \pm \frac{m_{\text{方}} \cdot s}{\rho''} \sqrt{(n+1)q} \tag{20}$$

而 $r = 1$ 时, 即仅首末边加测方位角时, (11) 及 (18) 同时简化为:

$$m_u = \pm \frac{m_{\text{方}} \cdot s}{\rho''} \sqrt{\frac{n(n^2-1)}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} \cdot q} \tag{21}$$

对于 A, B 为已知点, 仅在首末边加测方位角之附和导线; 按方向进行条件平差并把方位角当作观测值处理; 则可以推导出导线上任意 i 点的纵、横向精度公式; 以及任意边 i 的方位角精度公式; 现仅写出结果如下:

$$m_{a_i} = \pm \frac{m_{\text{方}} \cdot s}{\rho''} \sqrt{\frac{(2(i-1)+q)(2(n-i+1)+q)}{2(n+q)}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\{2(i-1)(i-2) - 2(n-1)(i-1) - (n+1)q\}^2}{n(n+1)(n-1) + 3(n+1)^2 \cdot q + 12r} \tag{22}$$

$$m_{v_i} = \pm \frac{m_{\text{方}} \cdot s}{\rho''} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} i(i-1)(2i-1) + i^2 \cdot q + r - \frac{\{i(i-1)+q\}^2}{2(n+q)} - \frac{1}{6} \frac{\{i(i-1)(3(n+1) - 2(i+1)) + 3i(n+1) \cdot q + 6r\}^2}{n(n+1)(n-1) + 3(n+1)^2 \cdot q + 12r}}$$

$$m_{t_i} = \pm \frac{m_{\text{方}} \cdot s}{\rho''} \sqrt{\frac{(id+r)[(n+1-i)d+r]}{(n+1)d+2r}} \quad (24)$$

$$\text{式中 } r = \frac{m_y^2}{m_{\text{方}}^2 \cdot s^2}, \quad q = \frac{m_A^2}{m_{\text{方}}^2}, \quad d = \frac{m_s^2}{m_{\text{方}}^2 \cdot s^2};$$

m_y 为已知点坐标中误差

m_A 为方位角观测值中误差

$m_{\text{方}}$ 为方向观测值中误差

m_s 为边长观测值中误差

s 为导线边长。

(二) 计算结果和初步分析

运用电子计算机, 对于等边直伸导线在 n 取不同值时, 改变加测方位角个数, 在方位角取不同的权下分别用 I、II 两法就各种情况对导线上各点的横向精度作了估算, 取得了较多的结果。

下面列出部分计算结果并进行初步分析。计算结果的图表, 均详细注明了计算时的各种参数。

1. n 为定值时, 横向精度随点位而变化的情况。图三是 $n=10$ 时, 导线上各点 (横坐标表示点号) 中误差变化曲线 (纵坐标表示横向中误差, 以米为单位), i 为除两端外中间加测之方位角数目。

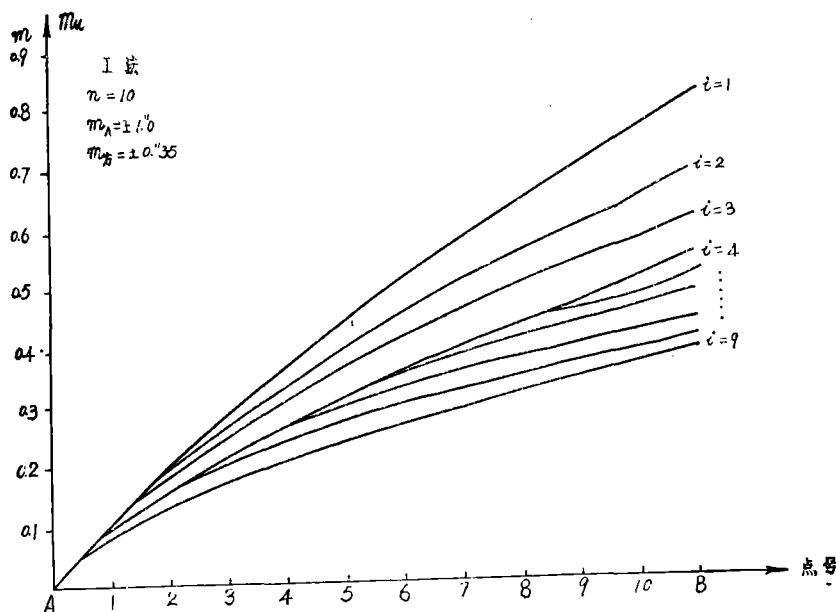


图 3

图四是 $n = 16$ 时之情形。图所示意义与图三同。从 n 取不同值所绘的曲线来看，加测方位角总能使横向精度有所改善，然而加测一、二、三条几种情况之间提高的幅度较大。图五是导线端点 B 之横向精度随加测方位角数目变化的情况。图中横坐标表示加测方位角数目，纵坐标表示 B 点横向中误差。由图可见，当 i 自 1 增至 3 时的中误差下降的幅度占 i 自 1 增至 15 时中误差总下降量之 44%。

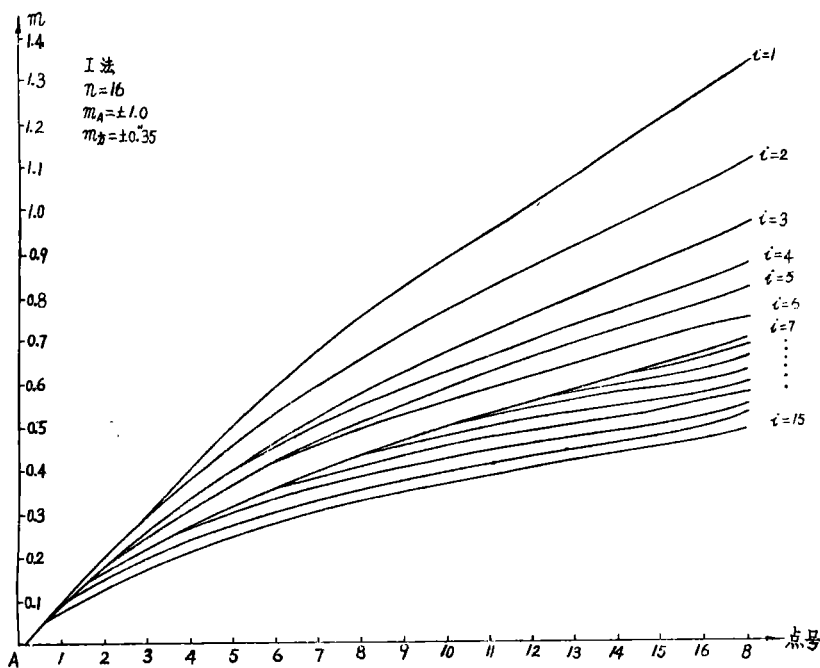


图 4

2. I 法与 II 法估算结果之比较。图六绘出了两种方法估算的导线各点横向误差曲线。虚线为 II 法所算，实线为 I 法所算；可见在导线各点上均有 $m_{u_{II}} \geq m_{u_I}$ ；在端点 B 上相差很小；而当 $i = n - 1$ 时，在端点 B 上有 $m_{u_I} = m_{u_{II}}$ ；这与 (20) 式相符。在其它点上 $m_{u_{II}} - m_{u_I}$ 稍大些，最大能到 0.058。这说明方位角当作观测值处理要好些。

3. 方位角配置的最佳位置。为了找出方位角布设的最佳位置，对于 n 取不同值时，仅加测一个方位角，但把它布设在各种不同位置上进行了精度计算。图七绘出了一种结果；曲线旁所注 i 表示加测方位角的起点点号。可以看出 $i = 5$ 时精度较好，也就是说以均匀布设为宜。对于加测两个方位角也改变加测位置作了精度估算；图八绘出 $n = 14$ ，当第一个方位角设置在 3—4 边上，而第二个方位角设置在 3—13 之间不同位置上时中误差随点号变化的曲线；显然当第二个方位角处于 3—14 之中央处时精度最高。图九是两个方位角同时改变位

置但保持与中央相对称的情况下, 所绘中误差曲线; 可见以 $i = 3, j = 7$ 精度为好, 也就是说在各种情况下对端点 B 而言, 都是以均匀布设为宜。

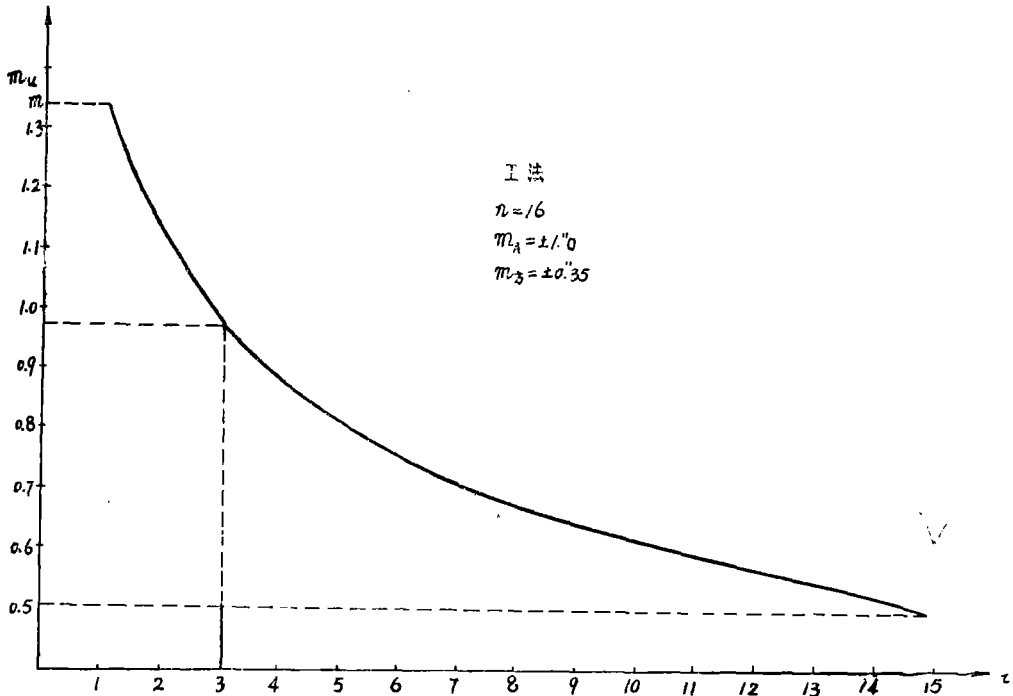


图 5

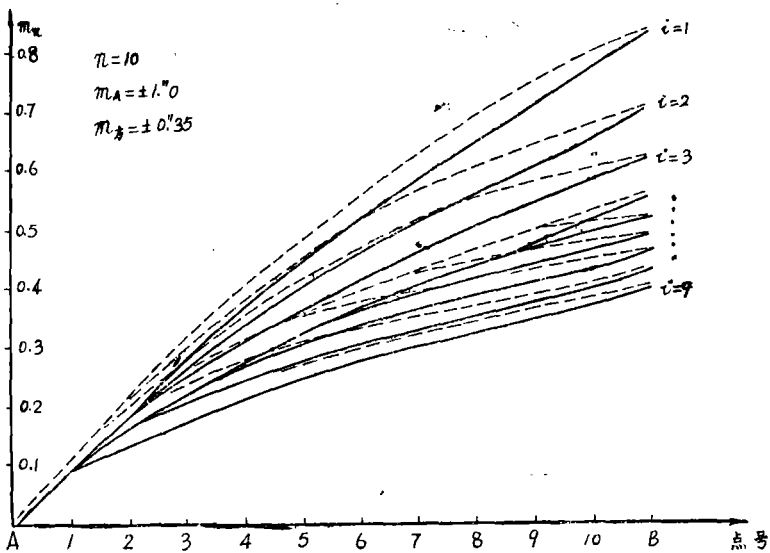


图 6

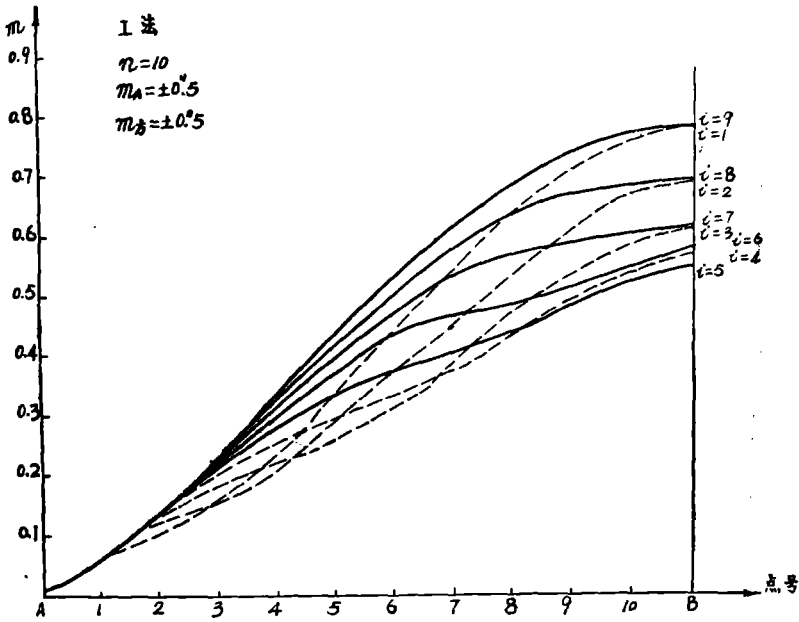


图 7

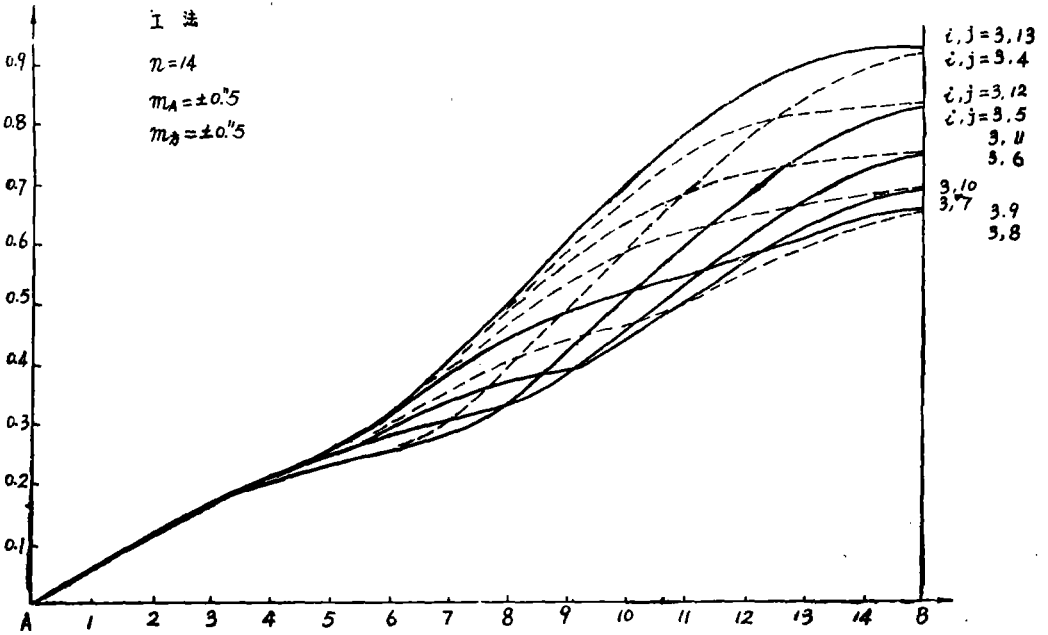


图 8

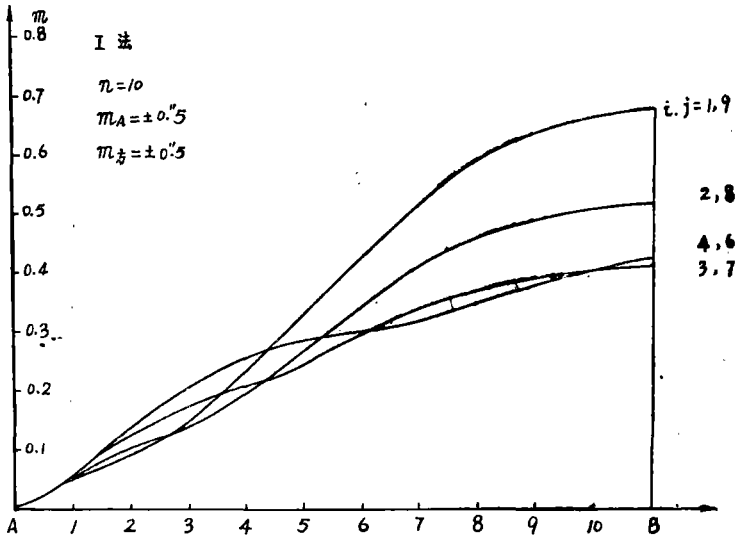


图 9

4. 方位角观测精度的改变对横向精度的影响。为比较方位角观测精度的改变，即在不同的 m_A 下，端点 B 横向精度情况，把方法 I 和方法 II 的估算出来的数值列于表一；由表可以看出，随着 M_A 变大， M_u 亦增大，但就同一 m_A 而言，方位角增多，精度总是有所改善的，从两种估算法都可得出这一结论。

5. 相对精度的变化情况；因为特级导线的一个重要的精度指标是端点相对于起始点的相对点位误差应小于百分之一，所以我们还应分析一下随着方位角增多，相对精度的变化情况。表二中 r 为方位角条件数，在每个 m_A 下分三栏分别列出 m_u 。一端点 B 之横向误差， $\frac{m_u}{s}$

一相对横向中误差；第三栏为每增加一个方位角，横向中误差减小的百分比（表中用小数表示）；由这些数字可以看出， r 由 0—1 时，横向中误差减少的百分比最大，其次是 1—2、2—3、3—4、4—5 逐渐减少；而到 5—6 之后，减小的幅度就基本保持在 6—7% 之间。

表三是 $n = 16$ 时之估算结果，其相对中误差减少的百分比仍有表二相同的趋势。由表二、表三还能看出端点 B 之相对横向精度要达到百万分之一，需要加测 6—7 个方位角；在方位角观测精度差的情况下，甚至每边加测还是达不到，这说明除加测方位角外还应从其它途径来进一步提高横向精度。

$n = 10; \quad m_{\text{方}} = \pm 0''.3535;$

表 一

加测 方位角数	估算法 $m_A \cdot m_u$	I		II	
		M_A (秒)	M_u (米)	M_A (秒)	M_u (米)
1		$\pm 0''.5$	± 0.4772	$\pm 0''.5$	± 0.4810
		$\pm 0''.7$	± 0.6104	$\pm 0''.7$	± 0.6189
		$\pm 1''.0$	± 0.8231	$\pm 1''.0$	± 0.8397
2		$\pm 0''.5$	± 0.3836	$\pm 0''.5$	± 0.3857
		$\pm 0''.7$	± 0.5053	$\pm 0''.7$	± 0.5097
		$\pm 1''.0$	± 0.6954	$\pm 1''.0$	± 0.7041
3		$\pm 0''.5$	± 0.3324	$\pm 0''.5$	± 0.3347
		$\pm 0''.7$	± 0.4445	$\pm 0''.7$	± 0.4494
		$\pm 1''.0$	± 0.6173	$\pm 1''.0$	± 0.6269
4		$\pm 0''.5$	± 0.2898	$\pm 0''.5$	± 0.2906
		$\pm 0''.7$	± 0.3942	$\pm 0''.7$	± 0.3959
		$\pm 1''.0$	± 0.5539	$\pm 1''.0$	± 0.5571
5		$\pm 0''.5$	± 0.2724	$\pm 0''.5$	± 0.2744
		$\pm 0''.7$	± 0.3705	$\pm 0''.7$	± 0.3749
		$\pm 1''.0$	± 0.5195	$\pm 1''.0$	± 0.5283
6		$\pm 0''.5$	± 0.2550	$\pm 0''.5$	± 0.2571
		$\pm 0''.7$	± 0.3481	$\pm 0''.7$	± 0.3545
		$\pm 1''.0$	± 0.4887	$\pm 1''.0$	± 0.4977

表二

$n = 10, m_{\text{方}} = \pm 0''.3535, I \text{ 法估算}, S = 275^{\text{km}}$

r	$\pm 0''.5$			$\pm 0''.7$			$\pm 1''.0$		
	m_u	m_u/s	$\frac{m_u}{m_{u_{i-1}}} \frac{m_u}{m_{u_i}}$	m_u	m_u/s	$\frac{m_u}{m_{u_{i-1}}} \frac{m_u}{m_{u_i}}$	m_u	m_u/s	$\frac{m_u}{m_{u_{i-1}}} \frac{m_u}{m_{u_i}}$
0	1.3632	1/202000		1.5116	1/182000		1.7865	1/154000	
1	0.7247	1/379000	0.47	0.8594	1/320000	0.43	1.0917	1/252000	0.39
2	0.4772	1/576000	0.34	0.6104	1/451000	0.29	0.8231	1/334000	0.25
3	0.3836	1/717000	0.20	0.5053	1/544000	0.17	0.6954	1/395000	0.16
4	0.3324	1/827000	0.13	0.4445	1/619000	0.12	0.6173	1/445000	0.11
5	0.2898	1/949000	0.13	0.3942	1/698000	0.11	0.5539	1/496000	0.10
6	0.2777	1/1008000	0.06	0.3705	1/742000	0.06	0.5195	1/529000	0.06
7	0.2550	1/1078000	0.06	0.3481	1/790000	0.06	0.4887	1/563000	0.06
8	0.2366	1/1162000	0.07	0.3247	1/847000	0.07	0.4576	1/601000	0.06

表三

$n = 16, m_{\text{方}} = \pm 0''.3535, I$ 法估算, $S = 425^{\text{km}}$

r	$\pm 0''.5$			$\pm 0''.7$			$\pm 1''.0$		
	m_u	m_u/s	m_u	m_u/s	m_u	m_u	m_u	m_u/s	m_u
			$\frac{m_u}{m_{u_{i-1}}}$		$\frac{m_u}{m_{u_{i-1}}}$				$\frac{m_u}{m_{u_{i-1}}}$
0	2.4546	1/173000		2.5562	1/166000	2.7599	1/154000		
1	1.3339	1/319000	0.46	1.5129	1/281000	1.8361	1/232000	0.41	0.33
2	0.8271	1/514000	0.38	1.0177	1/418000	1.3310	1/319000	0.33	0.28
3	0.6439	1/660000	0.22	0.8221	1/517000	1.1068	1/384000	0.19	0.17
4	0.5411	1/785000	0.16	0.7075	1/601000	0.9686	1/439000	0.14	0.12
5	0.4776	1/890000	0.12	0.6323	1/672000	0.8737	1/486000	0.11	0.10
6	0.4371	1/972000	0.08	0.5838	1/728000	0.8101	1/525000	0.08	0.07
7	0.4003	1/1062000	0.08	0.5385	1/789000	0.7512	1/566000	0.08	0.07
8	0.3655	1/1163000	0.09	0.4973	1/855000	0.6989	1/608000	0.08	0.07

(三) 天文方位角的配置密度

根据对估算结果的分析 and 比较，从理论上来说对于天文方位角配置密度不存在上限，也就是加测得越多，精度越高。但从实际加测后，精度提高的幅度来权衡，我们认为每隔 2—3 条边加测一个为宜。

由图三， $n=10$ 时， $i=1$ 到 $i=4$ 四条曲线的间隔较宽， $i=4$ 到 $i=9$ 五条曲线就很密集了。所以加测 4 条为好，这就相当于隔 2—3 条边加测一个。同样由图四， $n=16$ 时， $i=1$ 到 $i=7$ 之七条曲线间隔较宽，而 $i=7$ 到 $i=15$ 之九条曲线就很密集了，以加测 7 条为好，而这也相当于隔 2—3 条边加测一个。

同样由表二、表三也能大致得到隔 2—3 条边加测一个的结论，对于单导线来说按这种密度布设方位角，可能仍然达不到百万分之一精度，若再加大密度，精度提高又很有限，只有采取别的提高横向精度的途径了；例如加测几排三角锁以及在适当位置加测边长来提高精度也是可取的关于导线三角混合锁的精度估算我们也正在进行一些研究。

上述关于天文方位角的配置密度的结论与 Borkowski 等人的结论不同。Borkowski 在文献〔6〕中给出了两端测有天文方位角的等边直伸导线端点的横向中误差公式为：

$$m_q = m_{\beta} \cdot L \sqrt{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1-2w^2)}{4}} \tag{10}^*$$

上式保留原文中的符号。 $w^2 = \frac{m_A^2}{m_{\beta}^2}$ ；L 为导线边长，n 为点数（见图十）。（10）* 是文献

〔6〕中的公式编号。

Borkowski 认为：“上式中第一部分表示测角误差，第二部分表示方位角条件对导线端点横向误差的影响。当以一定精度观测拉普拉斯方位角时，只有当上式根号下第二项大于 0，利用方位角条件才能起到减小横向误差的作用。在此基础上得到表达式：

$$n \geq 2w^2 + 1 \tag{11}^*$$

它可以确定一等导线中两方位角间的最短距离。”（引自《测绘译丛》1980.6.P23）。

按照这种观点〔5〕若以 $W=1.64$ 及 $W=2$ 代入（11）* 则分别求得：

$$n > 7 \text{ 或 } 9$$

即是说两拉普拉斯方位角间隔边数至少应在七或九条以上。这与我国天文大地网中原有的拉普拉斯方位角的间距基本一致，因此无须再加密。

Borkowski 之公式是就图十之自由导线导出的，图十中起点为 A，终点为 B，边 A—1，



图十

$n-B$ 上加测了天文方位角，列立一个方位角条件进行平差，对 B 点横向精度作估算；这时显然有（采用与该文一致的符号）：

$$\frac{1}{P_F} = \frac{[ff]}{[P]} - \frac{\left(\frac{af}{P}\right)^2}{\left(\frac{aa}{P}\right)} ;$$

$$\text{因} \quad \left[\frac{aa}{P} \right] = n-1+2w^2 \quad ; \quad \left[\frac{af}{P} \right] = \frac{n(n-1)}{2} + n \cdot w^2 \quad ;$$

$$\left[\frac{ff}{P} \right] = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 w^2 \quad ;$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{P_F} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 w^2 - \frac{n^2(n-1+2w^2)}{4} \quad ; \quad (25)$$

$$m_a = m_\beta \cdot L \sqrt{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 w^2 - \frac{n^2(n-1+2w^2)}{4}} \quad (26)$$

将上式根号下第二、三两项合并即得(10)*式。以上推导是将天文方位角作为观测值。也可将它作为固定值而考虑它们作为起始数据的误差影响，导出结果相同。

(23) 式中右边第一项是测角误差对导线端点 B 横向精度的影响；第二项是起始方位角的误差对导线端点 B 横向精度的影响；而第三项才是方位角条件对导线端点 B 横向精度的影响。把二、三两项合并起来称之为方位角条件对横向精度的影响，并得出一个所谓方位角条件能发挥提高横向精度之作用应该满足的不等式，这是不对的。事实上第二项不因方位角条件存在与否而变化；即使末边 n-B 上未加测方位角、方位角条件不存在，在推算 B 点的横向精度时，仍然存在起始方位角 α_{A-1} 测定误差之影响。真正的“方位角条件对横向精度的影响”是第三项，它永远是正的。倘若条件不存在，它就是 0。所以文献〔6〕的不等式(11)*是不妥的。当然，由(11)*式得到的间隔边数应在七或九条以上的结论也就不对了。

参 考 文 献

- 〔1〕 崔希璋等：广义测量平差 武汉测绘学院 1979
- 〔2〕 李岳生、黄友谦：数值逼近 人民教育出版社 1978
- 〔3〕 达尼洛夫：精密导线测量 测绘出版社。1959
- 〔4〕 希洛夫：最小二乘法 中国人民解放军测绘学院 1959
- 〔5〕 杨 诚：我国特级导线布设方案初步探讨 测绘科技通讯 1980. 3
- 〔6〕 K. Borkowski, Anordnung und Dichte von Laplace-Azimuthen und bei der präzision polygonierung. Vermessungstechnik. 1976, Heft 5
- 〔7〕 张志新：论特级导线的精度国家测绘总局科研所 业务参考资料 80 (1)

The Distribution Density of Astronomical Azimuth in High Precision Traverse

Yin Renxiang

Abstract

Based on the project programme of high precision traverse in our country, the questions whether the lateral accuracy can be increased by adding measurements of Astronomical Azimuths and what density is suitable for the distribution of Astronomical Azimuth are discussed. In this paper, the obtained conclusion is different from that presented by K. Borkowski[6], and the shortcoming in the document [6] is also discussed.