

自由水准网的动态平差

于正林

【提要】 为了解决大规模复测水准网的动态平差, 本文从常规的动态线性数学模型出发, 导出了复测水准网动态平差的基础方程。为平差无起始数据的自由水准网, 文章叙述了伪观测值平差法, 并给出了在进行自由网两期整体平差时附加阵 GT 的具体形式以及在此情况下各种精度的估算公式。最后, 介绍了当两期水准网不完全重合时, 如何进行动态平差的两种处理方法。

以往的各种经典平差方案, 尽管其平差方法各有不同, 但都是把观测值 l 看作观测向量 L 的一组子样, 它们是与观测时间 T 无关的一组随机量。平差时, 通常采用的数学模型是静态线性模型, 即观测向量 L 与未知数向量 X 之间有线性关系

$$L = B \quad X + \Delta \quad (1)$$

$n \times 1 \quad n \times t \quad t \times 1 \quad n \times 1$

事实上, 许多观测量在某些外力的影响下, 随着时间而发生变化。因此, 我们必须用运动的观点来处理这些动态数据。目前, 在复测水准网的动态平差中, 通常采用的数学模型是动态线性模型, 即观测向量 L 与未知数向量 X 及水准点高程速率未知数向量 λ 之间有如下线性关系

$$L = B_x \quad X + B_\lambda \quad \lambda + \Delta \quad (2)$$

$n \times 1 \quad n \times t \quad t \times 1 \quad n \times t \quad t \times 1 \quad n \times 1$

式中 B_x 阵就是 (1) 式中的 B 阵, 而 B_λ 阵是与观测时间 T 有关的系数阵。

多次重复观测为我们提供了动态处理的可能性。为了区分这两类不同的处理方法, 我们把前者叫做静态平差, 后者叫做动态平差。

本文从间接平差的理论出发, 论述复测水准网动态平差的基础方程及自由水准网两期整体平差的解算方案, 并导出精度估算公式。最后提供各水准点在其观测时刻 T 时的最或是高程、水准点高程的速率值以及它们可能达到的精度。

一、基本思想

设水准网的复测次数为 N , 按此法平差的步骤是首先对第一、二两期水准网作整体平差, 第二步: 对第二、三两期水准网作整体平差, 依此类推。这样, 可直接解出相邻两期间各水准点的高程速率未知数 λ 。此法, 对于相邻两期而言, 平差是严密的。

现以第一、二两期为例, 说明自由网两期整体平差的基本思想。

1、误差方程式的列立

设一水准网共有 n 条测段 (或区段), t 个水准点。第一、二期观测高差向量: $L^{(1)}$,

$L^{(2)}$; 对应的高差改正数向量: $V^{(1)}$, $V^{(2)}$; 观测时间向量: $T^{(1)}$, $T^{(2)}$; 对应于观测时刻 $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ 时水准点的最或是高程向量: $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ 。

设未知数向量

$$Y = \begin{pmatrix} X^{(2)} \\ \lambda \end{pmatrix}_{2t \times 1}$$

其中 $X^{(2)}$ 是第二期中心时刻 $T_0^{(2)}$ 时水准点高程的列向量, λ 是水准点高程速率的列向量。第二期的中心时刻由公式

$$T_0^{(2)} = \frac{[t^{(2)}]}{n} \tag{3}$$

计算。式中 $[t^{(2)}]$ 为向量 $T^{(2)}$ 中的所有元素之和。

又设

$$X^{(2)} = X_0^{(2)} + dX^{(2)} \tag{4}$$

式中 $X_0^{(2)}$ 是 $X^{(2)}$ 的近似值, 由 $L^{(2)}$ 的概略值求出。 $dX^{(2)}$ 是 $X^{(2)}$ 的改正数向量。

$$Y = \begin{pmatrix} X_0^{(2)} + dX^{(2)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX^{(2)} \\ d\lambda \end{pmatrix} = Y_0 + dY \tag{5}$$

式中

$$Y_0 = \begin{pmatrix} X_0^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dY = \begin{pmatrix} dX^{(2)} \\ d\lambda \end{pmatrix}.$$

对于第一、二两期可分别列出误差方程式:

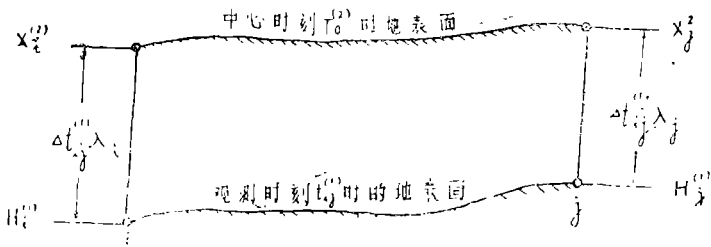
$$\left. \begin{aligned} V^{(1)} &= B^{(1)} dY + U^{(1)} = \begin{bmatrix} B_x^{(1)} & B_\lambda^{(1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dX^{(2)} \\ d\lambda \end{pmatrix} + U^{(1)} \\ V^{(2)} &= B^{(2)} dY + U^{(2)} = \begin{bmatrix} B_x^{(2)} & B_\lambda^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dX^{(2)} \\ d\lambda \end{pmatrix} + U^{(2)} \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

其中系数矩阵 $B_x^{(1)}, B_x^{(2)}$ 的元素是 0 或 ± 1 , $B_\lambda^{(1)}, B_\lambda^{(2)}$ 的元素是 0 或 $\pm \Delta t_i^{(1)}$ 和 $\pm \Delta t_i^{(2)}$ 。而 $\Delta t_i^{(1)}, \Delta t_i^{(2)}$ 分别表示各期观测时间列与第二期中心时刻 $T_0^{(2)}$ 之差。

即

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_i^{(1)} &= t_i^{(1)} - T_0^{(2)} \\ \Delta t_i^{(2)} &= t_i^{(2)} - T_0^{(2)} \end{aligned} \right\}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

现以第一期水准网中的第 i, j 测段为例导出误差方程式的纯量形式。



图一

由图一可以看出：对应于观测时刻 $t_{ij}^{(1)}$ ，相邻两水准点的最或是高程

$$\left. \begin{aligned} H_i^{(1)} &= x_i^{(2)} + \Delta t_{ij}^{(1)} \lambda_i \\ H_j^{(1)} &= x_j^{(2)} + \Delta t_{ij}^{(1)} \lambda_j \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

式中

$$\Delta t_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(1)} - T_0^{(2)}。$$

由水准测量的基本公式可知：i, j 两点间的最或是高差

$$h_{ij}^{(1)} = h_i^{(1)} + V_i^{(1)} = H_j^{(1)} - H_i^{(1)}, \quad (9)$$

式中 $v_{ij}^{(1)}$ 是第一期水准观测高差 $h_{ij}^{(1)}$ 的改正数。(8) 式代入 (9) 式得

$$h_{ij}^{(1)} + v_{ij}^{(1)} = x_j^{(2)} - x_i^{(2)} + \Delta t_{ij}^{(1)} \lambda_j - \Delta t_{ij}^{(1)} \lambda_i,$$

即

$$v_{ij}^{(1)} = -x_i^{(2)} + x_j^{(2)} - \Delta t_{ij}^{(1)} \lambda_i + \Delta t_{ij}^{(1)} \lambda_j - h_{ij}^{(1)},$$

将未知数的近似值代入上式，则得第一期水准网中第 ij 测段的误差方程式

$$v_{ij}^{(1)} = -dx_i^{(2)} + dx_j^{(2)} - \Delta t_{ij}^{(1)} d\lambda_i + \Delta t_{ij}^{(1)} d\lambda_j + u_{ij}^{(1)}, \quad (10)$$

式中

$$u_{ij}^{(1)} = -x_i^{(2)} + x_j^{(2)} - h_{ij}^{(1)}。$$

同理，可得第二期水准网中第 ij 测段的误差方程式

$$v_{ij}^{(2)} = -dx_i^{(2)} + dx_j^{(2)} - \Delta t_{ij}^{(2)} d\lambda_i + \Delta t_{ij}^{(2)} d\lambda_j + u_{ij}^{(2)}, \quad (11)$$

式中

$$u_{ij}^{(2)} = -x_i^{(2)} + x_j^{(2)} - h_{ij}^{(2)},$$

$$\Delta t_{ij}^{(2)} = t_{ij}^{(2)} - T_0^{(2)}。$$

2、自由网两期整体平差的解算方案

$$\text{令 } L = \begin{pmatrix} L^{(1)} \\ L^{(2)} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{pmatrix}。$$

则 (6) 式变为

$$V = Bdy + U。 \quad (12)$$

根据最小二乘法原理，在 $V^T P V = \min$ 的原则下，可得

$$V^T P B = 0$$

即

$$B^T P V = 0。 \quad (13)$$

式中 P 为 L 的权阵，若 $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ 相互独立，则有

$$P = \begin{bmatrix} P^{(1)} & 0 \\ 0 & P^{(2)} \end{bmatrix}, \quad P^{(1)}, P^{(2)} \text{ 分别为 } L^{(1)}, L^{(2)} \text{ 的权阵。}$$

将 (12) 式、(13) 式合并得如下基础方程组

$$\left. \begin{aligned} -PV + PBdy + PU &= 0 \\ B^T P V &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

将 (6) 式代入上式，略加计算整理可得如下基础方程组

$$\left. \begin{aligned} -P^{(1)}V^{(1)} + P^{(1)}B_x^{(1)}dx^{(2)} + P^{(1)}B_\lambda^{(1)}d\lambda + P^{(1)}U^{(1)} &= 0 \\ -P^{(2)}V^{(2)} + P^{(2)}B_x^{(2)}dx^{(2)} + P^{(2)}B_\lambda^{(2)}d\lambda + P^{(2)}U^{(2)} &= 0 \\ B_x^{(1)T}P^{(1)}V^{(1)} + B_x^{(2)T}P^{(2)}V^{(2)} &= 0 \\ B_\lambda^{(1)T}P^{(1)}V^{(1)} + B_\lambda^{(2)T}P^{(2)}V^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

它是一组对称的线性方程组。

由基础方程组可得如下法方程式

$$B^T P B dY + B^T P U = 0, \quad (16)$$

简写为

$$N dY + W = 0. \quad (17)$$

其中

$$N = B^T P B, \quad W = B^T P U. \quad (18)$$

由于我们采用的是无起始数据的自由水准网平差，所以，误差方程式的系数矩阵 B 为列不满秩阵。在两期自由水准网的整体平差中，它的秩 $R(B) = 2t - 2$ ，所以，法方程的系数阵 N 是奇异的，即 $\det(N) = 0$ 。

现用伪观测值法解之。

将原误差方程式和假误差方程式联立，则有：

$$\left. \begin{aligned} V &= B dY + U \\ V^* &= G^T dY \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

或写成

$$\begin{bmatrix} V \\ V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ G^T \end{bmatrix} dY + \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

再组成法方程式

$$(N + G G^T) dY + W = 0. \quad (21)$$

此时，法方程式的系数阵 $(N + G G^T)$ 是非奇异的，

$$\text{故} \quad dY = - (N + G G^T)^{-1} W. \quad (22)$$

令

$$(N + G G^T)^{-1} = Q_{2t \times 2t}, \quad (23)$$

则

$$dY = - Q W = - Q B^T P U. \quad (24)$$

另外，由线性代数可知，亏秩相容方程组 $N dY + W = 0$ 的解，可直接写为

$$dY = - N^+ W,$$

此时 $N^+ = (N + G G^T)^{-1} - G G^T = Q - G G^T$,

$$\text{令} \quad Q_Y = Q - G G^T_{2t \times 2t}$$

$$\text{则} \quad dY = - Q_Y W = - Q_Y B^T P U. \quad (25)$$

由 (24)、(25) 两式可以得到如下结论：对于法方程组的解 dY 来说， Q 与 Q_Y 等价。

而附加阵 G^T 是伪观测值 L^* 相应误差方程式的系数阵, 它由以下两式决定

$$\left. \begin{aligned} BG &= 0 \\ G^T G &= E \end{aligned} \right\} \circ \tag{26}$$

根据上式, 我们给出自由水准网两期整体平差时的附加阵

$$G^T = \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

而每行中 1 的个数等于 t 。易知, 此时的 G^T 阵满足 (26) 式中的两个条件。

因
$$\begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \lambda \end{bmatrix} = Y = Y_0 + dY = \begin{bmatrix} X_0^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX^{(2)} \\ d\lambda \end{bmatrix},$$

故各水准点相应于第二期中心时刻的最或是高程为

$$X^{(2)} = X_0^{(2)} + dX^{(2)}, \tag{28}$$

各水准点高程的最或是速率

$$\lambda = d\lambda. \tag{29}$$

各水准点相应于观测时刻 $t_i^{(1)}$, $t_i^{(2)}$ 时的最或是高程可由下式计算

$$\left. \begin{aligned} H_i^{(1)} &= x_i^{(2)} + \Delta t_i^{(1)} \lambda_i \\ H_i^{(2)} &= x_i^{(2)} + \Delta t_i^{(2)} \lambda_i \end{aligned} \right\} \circ \quad (i = 1, 2, \dots, t) \tag{30}$$

3、精度评定

已知

$$Y = \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \lambda \end{bmatrix},$$

故水准点的高程未知数 $X^{(2)}$ 及高程速率未知数 λ 的协因数阵为

$$Q_y = \begin{bmatrix} Q_{x^{(2)}} & Q_{x^{(2)}\lambda} \\ Q_{\lambda x^{(2)}} & Q_{\lambda} \end{bmatrix} \circ$$

由 (24) 式知 $dY = -QB^T P U$,

由协因数传播律得

$$Q_y = QB^T P Q_{uu} P B Q, \tag{31}$$

经简化可得 Q_y 的最后形式

$$Q_y = Q - G G^T = (N + G G^T)^{-1} - G G^T. \tag{32}$$

或

$$\begin{bmatrix} Q_{x^{(2)}} & Q_{x^{(2)}\lambda} \\ Q_{\lambda x^{(2)}} & Q_{\lambda} \end{bmatrix} = (N + G G^T)^{-1} - G G^T. \tag{33}$$

除了未知数的协因数阵之外, 有时, 我们还要知道其它量如 U, W, \tilde{L}, V 及未知数函数 $F = f dy$ 的协因数阵, 为此我们将这些量结合成一个向量 H 。

令

$$H^T = [U^T \ W^T \ dy^T \ \tilde{L}^T \ V^T \ F^T], \tag{34}$$

将 H 向量中的所有元素都表示成 U 的函数, 则可写出

$$H = \begin{pmatrix} E \\ B^T P \\ -Q B^T P \\ -B Q B^T P \\ E - B Q B^T P \\ -f Q B^T P \end{pmatrix} U \quad (35)$$

由广义协因数传播律得

$$Q_{hh} = \begin{pmatrix} P^{-1} & B & -BQ & -BQB^T & P^{-1} - BQB^T & -BQf^T \\ & N & (-B(Q-GG^T)) & (-B(Q-GG^T)B^T) & (P^{-1} - B(Q-GG^T)B^T) & (-B(Q-GG^T)f^T) \\ & & -(E-GG^T) & -B^T & O & -(E-GG^T)f^T \\ & & QNQ & QB^T & O & (Q-GG^T)f^T \\ & & (Q-GG^T) & ((Q-GG^T)B^T) & O & \\ & & & BQB^T & O & BQf^T \\ & & & (B(Q-GG^T)B^T) & O & (B(Q-GG^T)f^T) \\ & & & & P^{-1} - BQB^T & O \\ & & & & (P^{-1} - B(Q-GG^T)B^T) & \\ & & & & & f(Q-GG^T)f^T \end{pmatrix} \quad (36)$$

括号内表示该协因数阵的实际计算表达式，特别在上机计算时，用此式计算较为有利。它们的协方差阵

$$D_{hh} = \sigma_0^2 Q_{hh} \quad (37)$$

式中 σ_0^2 是单位权方差，它的估值由下式计算

$$\sigma_0^2 = V^T P V / r = \frac{V^{(1)T} P^{(1)} V^{(1)} + V^{(2)T} P^{(2)} V^{(2)}}{2(n-t+1)} \quad (38)$$

二、几种平差方案的比较

为了便于说明问题，我们暂作如下规定：

第 I 方案：自由网分期平差法，即经典的间接观测平差法，不同之处在于未确定起始数据；

第 II 方案：采用参考文献[1]中的“速率高差逐次平差法”。此法是先进行速率条件平差，求出速率的第一次平差值 $\lambda'_{(i)}$ ，由 $\lambda'_{(i)}$ 将第一、二期的观测高差分别归算到它们中心时刻的观测高差 $h_{T_1(i)}$ 和 $h_{T_2(i)}$ ，然后对 $h_{T_1(i)}$ 和 $h_{T_2(i)}$ 分别进行高差条件平差，求出高差的第一次平差值 $h'_{T_1(i)}$ 和 $h'_{T_2(i)}$ ；由第一次高差平差值计算第二次速率值 $\lambda''_{(i)}$ ，

再进行高差平差,直到前后两次计算出的速率值相等或达到预定的精度要求时,则停止计算。

第Ⅲ方案:自由网两期整体平差法,即本方案。

现以东北水准网为例进行比较,其比较结果列于表一、表二和表三内。表一、表二表示平差结果的比较,表三表示有关精度指标的比较。表中的Ⅲ是指中心时刻按 $T_0^{(2)} = [t_1^{(2)}] / n \approx 1978$ 年计算的结果,Ⅲ*是指中心时刻按 $(T_0^{(1)} + T_0^{(2)}) / 2 \approx 1969$ 年计算的结果。

东北网的简况如下: $n = 21$, $t = 17$, 组成 5 个水准环。水准路线的总长 2300 公里,区段距离在 20~270 公里之间变动。第一周期中大部份为Ⅱ等观测成果,第二周期中的观测高差均为Ⅰ等成果。各种方案均以距离定权,Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ等定权时的比例常数为 $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; 各期中的观测时间差较大,第一周期中观测时间的最大差数为 20 年,第二周期中观测时间的最大差数为 8 年。

水准点最或是高程比较表

表一

	第一期中心时刻的高程差 $ \Delta H $				第二期中心时刻的高程差 $ \Delta H $			
	0~1 ^{mm}	1~2 ^{mm}	>2 ^{mm}	ΔH_{max}	0~1 ^{mm}	1~2 ^{mm}	>2 ^{mm}	ΔH_{max}
Ⅲ~Ⅰ	2	0	15	12.9 ^{mm}	7	2	8	4.1 ^{mm}
Ⅲ~Ⅱ	12	5	0	2.0	9	3	5	3.5
Ⅲ~Ⅲ*	平差结果一致							

水准点高程速率比较表

表二

	0~0.1 ^{mm}	0.1~0.2 ^{mm}	0.2~0.3 ^{mm}	>0.3 ^{mm}	$ \Delta \lambda _{max}$
Ⅲ~Ⅰ	5	2	2	8	0.91 ^{mm}
Ⅲ~Ⅱ	5	6	6	0	0.30
Ⅲ~Ⅲ*	平差结果一致				

注① 表一、表二中未注单位的数字为水准点的个数。

② 平差时,以 10^k 的Ⅰ等观测高差为单位权观测。

表三

方案号	Ⅰ		Ⅱ	Ⅲ	Ⅲ*
	第 1 期	第 2 期			
$V^T PV$	93.62	144.03	203.60	211.19	211.19
M_0	4.33	5.37	4.51	4.60	4.60
M_H	11.9~28.5	11.4~25.2	10.5~21.9	11.3~22.1	8.2~26.1
M_λ				1.0~4.3	1.0~4.3
$t_R Q_H$	361.0	193.5		238.0	192.8
$t_R Q_\lambda$				2.5	2.5

为节省篇幅,其它几个地区的试算结果就不再一一列举了。试算结果表明:

1、若有两期以上的水准观测成果,则采用动态平差较之分期的静态平差优越。当各期中观测时刻离差越大时,方案 I、III 的平差结果之差也就越大。由此建议:今后如进行水准网平差,在有复测成果时,应首先考虑采用动态平差法;

2、采用第 III 平差方案,其平差结果与中心时刻的选取无关。在 $T_0^{(1)}$ 、 $T_0^{(2)}$ 相差较大时,中心时刻最好选取 $T_0^{(1)}$ 、 $T_0^{(2)}$ 的平均数。这样做可使法方程系数阵中的元素大小较为均匀;

3、比较两种动态平差方案 II、III,其平差结果较为一致,其中速率值的结果更趋于一致;

4、从动态平差的理论来说,方案 II、III 都是严密的,但从解算法方程的方法看,方案 III 采用一次解算法,而方案 II 则采用迭代法。试算情况表明,当各期中观测时间离差较大时,迭代次数将明显增多;

5、就同一型号的计算机而言,方案 II 一次内存解算的容量要比方案 III 大些。这是由于方案 II 是将法方程分为两组,逐次迭代,因此一次解算时的未知数大为减少;其次是由于方案 II 中法方程式未知数的个数只与水准环的个数有关,而与测线上的水准点个数无关。方案 III 中法方程式未知数的个数则与水准点个数有关,如同一测线上分的区段数较多,则水准点的个数将迅速增大。特别是采用自由网平差时,法方程式系数阵中 0 元素的个数极少,因此方案 III 一次内存的解算功能将低于方案 II。

为了弄清楚动态平差与静态平差之间的关系,再举一个有趣的例子。唐山地区 70 年、71 年的水准网, $n_{70} = 33$, $n_{71} = 34$, 水准点个数均为 $t = 23$, 观测等级均为 I 等。由于各期中的观测时间相同,因此两期的观测时间差为一常数,动态平差时,如选取中心时刻 $T_0 = 71$, 则 $\Delta t_1 \equiv -1$, $\Delta t_2 \equiv 0$ 。计算结果是:方案 III 算出的高程最或是值与方案 I 的计算结果一致,方案 III 算出的高程速率值与方案 I 分期计算出高程差一致,仅有个别点有微小差异,而两者的最大互差 $d\lambda_{m,x} = 0.05^m$ 。由此我们可得到一个重要结论:在两期水准网中,若各期中的观测时间为一常数,则分期静态平差与两期动态平差的结果一致。这个结论可以理论上给予证明,在此不再多述。

三、一点补充

以上我们讨论了两期水准网的观测路线和水准点完全重合的情况,但在实际工作中,往往由于某些水准点的破坏或增补,原有线路的改变等等原因,使两期水准网的图形不能完全重合。在这样的情况下应如何进行动态平差?

在两期复测水准网中,若第一期观测的测段(或区段)数为 n_1 , 水准点的个数为 t_1 ; 第二期观测的测段(或区段)数为 n_2 , 水准点的个数为 t_2 ; 两期中,重复观测的水准点个数为 t_0 。

令两期的观测值总数为 n , 网中的水准点总数为 t , 则有下式成立

$$\left. \begin{aligned} n &= n_1 + n_2 \\ t &= t_0 + r \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中 r 为两期未重复观测的水准点个数。

此时,应按下述原则确定未知数的个数,水准点最或是高程未知数的个数为 t , 水准点

高程速率未知数的个数为 t_0 。例如在图二的水准网中。

$$\begin{cases} n_1 = 19 \\ n_2 = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 13 \\ t_2 = 14, \end{cases} \quad t_0 = 12,$$

故 $n = 39, r = 3, t = 15$ 。

列立误差方程式时，对于那些与 t_0 个重复观测的水准点有关的测段（或区段）而言，其形式仍同（6）式，即

$$V_m = B_x dx + B_\lambda d\lambda + U \tag{40}$$

$m \times 1 \quad m \times 1 \quad t \times 1 \quad m \times t_0 \quad t_0 \times 1 \quad m \times 1$

对于那些与 r 个未重复观测的水准点有关的测段（或区段）而言，其形式为

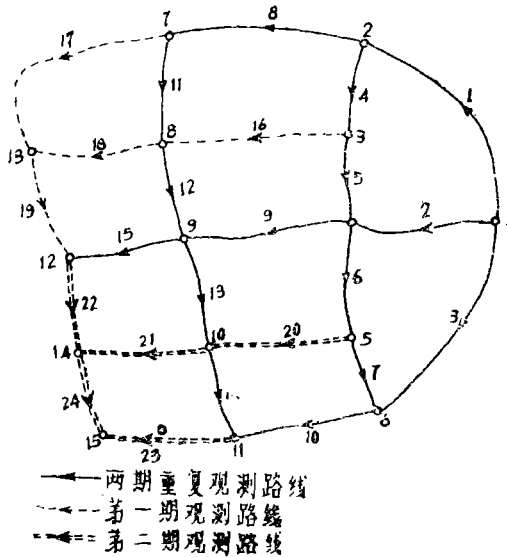
$$V_d = B_x dx + O d\lambda + U \tag{41}$$

$d \times 1 \quad d \times t \quad t \times 1 \quad d \times 1$

至于前两式中 m 及 d 的个数，应视具体网形而定，但应满足等式

$$m + d = n$$

如在图二中 $m = 32, d = 7$ 。



图二

此时，附加阵 G^T 的形式是

$$G^T = \begin{pmatrix} \frac{t \text{ 个}}{1/\sqrt{t} \quad 1/\sqrt{t} \dots 1/\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1/\sqrt{t_0} \quad 1/\sqrt{t_0} \dots 1/\sqrt{t_0}}{t_0 \text{ 个}} \end{pmatrix} \tag{42}$$

它仍满足条件 $BG = 0, G^T G = E$ 。

有了上述的误差方程式和附加阵 G^T ，以下的计算就不会有什么困难了。这里仅写出单位权方差的估算公式

参 考 文 献

- [1] 於宗俦等: 全国复测水准网的动态平差 武汉测绘学院学报 1980年第一期
- [2] 崔希璋等: 广义测量平差 武汉测绘学院 1978年
- [3] 南京大学数学系计算数学专业编: 线性代数 科学出版社 1978年
- [4] В. А. 玛兹科娃: 苏联欧洲西部地区现代地壳垂直运动精确速率图和对运动周期的一些看法 中译本 地震与地壳形变 1980年第一期
- [5] М. И. Сиягга: Некоторые основные вопросы изучения современных Вертикальных Движений земной коры Геодезия и Картография No. 2, 1962
- [6] W. Welsch: Some techniques for monitoring and analyzing deformations and control nets 武汉测绘学院 1980年复印

On the Dynamic Adjustment of Free Levelling Networks

Yu Zhenglin

Abstract

In order to solve the problem of dynamic adjustment of repeating levelling networks covering a vast area, the author starts out from a classical dynamic linear mathematical model, and then derives a basic equation for the dynamic adjustment of repeating levelling networks. On account of the adjustment of free levelling networks without datum, this paper deals with the pseudoobservation adjustment method, and gives a concrete form of the supplementary matrix G^T in performing the overall free-net-adjustment in two periods and has derived different kinds of formulas for accuracy estimating in this case. Finally, two methods for dynamic adjustment are given, when the levelling networks of two periods do not coincide completely.