

# D. S. 型解析测图仪交会原理与解算方法

张祖勋

**【提要】**本文讨论了利用三个平面交会模型点位置的原理，其中一个平面通过模型点，另外两个平面是通过一个或两个相应象点的“x-平面”和“y-平面”。然后与AP型解析测图仪一样，用共线方程由模型点座标计算未知的由伺服系统控制的象点座标。在这个原理的基础上，推导了DS型解析测图仪上各种作业方式（测点、测绘等高线以及高程断面的扫描）的计算公式。

## 前 言

一般所谓AP型解析测图仪都是以模型点座标为已知数输入计算机，由共线方程将模型点反投影到象片上，求出左、右象点座标 $x_1$ 、 $y_1$ 、 $x_2$ 和 $y_2$ 。然后通过四个伺服系统控制左、右象片盘的 $x$ 、 $y$ 移动。而DS型解析测图仪则以部份象点座标和部分地面座标为已知数，解算其他座标。过去的DS型解析测图是以参考文献〔1〕为基础，即在测绘等高线时，以左象片象点座标 $x_1$ 、 $y_1$ 与等高线高程 $Z_c$ 为已知值，解求联立方程求得右象片象点座标 $x_2$ 、 $y_2$ ，然后再由前方交会求得该等高线点的平面座标 $x$ 、 $y$ 。本文试图以平面交会为基础，在各种作业方式中，都首先由三个平面交会出模型点座标 $X$ 、 $Y$ 或 $Z$ ，然后求得未知待定的象点座标，其解算过程与文献〔1〕、〔2〕中所述的过程不同。

## 一 基本公式

通常我们把下列方程组：

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_1(X-X_s) + b_1(Y-Y_s) + c_1(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s) + b_3(Y-Y_s) + c_3(Z-Z_s)} \\ z &= -f \frac{a_2(X-X_s) + b_2(Y-Y_s) + c_2(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s) + b_3(Y-Y_s) + c_3(Z-Z_s)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

称为共线方程。但是，它是由两个平面方程所组成，第一个式子表示通过投影中心 $(X_s, Y_s, Z_s)$ 与象片上一直线 $(x = \text{常数})$ 的一个平面，以下简称“x平面”，而第二个式子则表示“y平面”。将一组共线方程理解成两个平面方程，对于理解与解算DS型解析测图仪各种形式的交会是很有用的。

另外必须指出的是：象点的象片座标与象点的仪器座标是有区别的。在解算测图仪上作业时象片不作归心，即象片主点与象片盘中心不重合，而是通过测定象片框标，求出象片座标与仪器座标之间的变换参数——即所谓内定向。若考虑到象片的仿射变形、仪器 $x$ 、 $y$ 导轨的不垂直性等因素，它们之间的关系可用仿射变换予以表达：

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= e_{11}x + e_{12}y + \Delta x \\ y_0 &= e_{21}x + e_{22}y + \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $x$ 、 $y$ 是象点的象片座标， $x_0$ 、 $y_0$ 是象点的仪器座标。当只考虑平移旋转时，则系数

$e_{11}$ 、 $e_{12}$ 、 $e_{21}$ 、 $e_{22}$ 就是由旋角 $\theta$ 所组成的正交旋转矩阵元素。在DS型解析测图仪中已知的是象点的仪器座标 $x_0$ 、 $y_0$ ，而不是象片座标，因此有必要建立以象点的仪器座标为基础的“共线方程”。将(1)式代入(2)，并经简化即可得到仪器座标的“共线方程”：

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -f \frac{A_1(X-X_S) + B_1(Y-Y_S) + C_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S) + b_3(Y-Y_S) + c_3(Z-Z_S)} \\ y_0 &= -f \frac{A_2(X-X_S) + B_2(Y-Y_S) + C_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S) + b_3(Y-Y_S) + c_3(Z-Z_S)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中参数：

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= e_{11}a_1 + e_{12}a_2 + t_x a_3 \\ B_1 &= e_{11}b_1 + e_{12}b_2 + t_x b_3 \\ C_1 &= e_{11}c_1 + e_{12}c_2 + t_x c_3 \\ A_2 &= e_{21}a_1 + e_{22}a_2 + t_y a_3 \\ B_2 &= e_{21}b_1 + e_{22}b_2 + t_y b_3 \\ C_2 &= e_{21}c_1 + e_{22}c_2 + t_y c_3 \\ t_x &= \frac{\Delta x}{f} \\ t_y &= \frac{\Delta y}{f} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中的这些参数都是象片外方位元素与象片在仪器上内定向元素的函数。以仪器座标为基础的“共线方程”(3)中的九个变换参数与共线方程(1)的九个变换参数之间的关系可用下列矩阵形式表示：

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & t_x \\ e_{21} & e_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

或

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$$

显然 $\mathbf{R}_0$ 不是一个正交矩阵。但“共线方程”(3)仍是由两个平面方程所组成，仍然将它们称为 $x_0$ 平面与 $y_0$ 平面。

## 二、测绘等高线的交会方式

因为通过三个互不平行或重合的平面可以交会出一个模型点，而在测绘等高线时，模型点的高程应保持为一个常数 $Z_c$ 。因此，

$$Z = Z_c \quad (6)$$

则永远是测绘等高线作业时的三个交会平面之一。另外两个交会平面是由四个象点座标中的两个座标来确定，其中必须有一个 $x$ 座标；另一个是 $y$ 座标。这里可以由不同的组合，但归纳起来可以有以下两种情况：

1. 当 $x$ 、 $y$ 集中在一张象片(例如左象片)上时，即已知某一个象点在该象片上的仪器座标，例如左象片盘 $x'_0$ 与 $y'_0$ ，原来的DS型解析测图仪即属于此。这时可利用 $x'_0$ 、 $y'_0$ 平面与 $Z$ 平面交会出模型点：

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= -f \frac{A'_1(X - X_{S_1}) + B'_1(Y - Y_{S_1}) + C'_1(Z - Z_{S_1})}{a'_3(X - X_{S_1}) + b'_3(Y - Y_{S_1}) + c'_3(Z - Z_{S_1})} \\ y'_0 &= -f \frac{A'_2(X - X_{S_1}) + B'_2(Y - Y_{S_1}) + C'_2(Z - Z_{S_1})}{a'_3(X - X_{S_1}) + b'_3(Y - Y_{S_1}) + c'_3(Z - Z_{S_1})} \\ Z &= Z_c \end{aligned} \right\} (7')$$

其实质是解算下列两个联立方程，求出模型点的平面坐标  $X$ 、 $Y$ ：

$$\begin{aligned} X &= k'_1 Y + m'_1 \\ Y &= k'_2 X + m'_2 \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$k'_1 = -(B'_1 + k'_x b'_3) / (A'_1 + k'_x a'_3)$$

$$m'_1 = \frac{1}{(A'_1 + k'_x a'_3)} \left[ (A'_1 + k'_x a'_3) X_{S_1} + (B'_1 + k'_x b'_3) Y_{S_1} + (C'_1 + k'_x c'_3) (Z_c - Z_{S_1}) \right]$$

$$k'_2 = -(B'_2 + k'_y b'_3) / (A'_2 + k'_y a'_3)$$

$$m'_2 = \frac{1}{(A'_2 + k'_y a'_3)} \left[ (A'_2 + k'_y a'_3) X_{S_1} + (B'_2 + k'_y b'_3) Y_{S_1} + (C'_2 + k'_y c'_3) (Z_c - Z_{S_1}) \right]$$

$$k'_x = \frac{x'_0}{f}$$

$$k'_y = \frac{y'_0}{f}$$

在一般情况下，由于  $k'_1 \ll 1$  与  $k'_2 \ll 1$ ，因此线性方程组 (7) 可以采用迭代法解 [2]。必须指出，由于  $R_0$  是非正交矩阵，即

$$R_0^T \neq R_0^{-1}$$

因此“共线方程” (7') 不存在下列之逆变换，即：

$$(X - X_{S_1}) \approx (Z_c - Z_{S_1}) \frac{A_1 x + A_2 y - a_3 f}{C_1 x + C_2 y - c_3 f}$$

$$(Y - Y_{S_1}) \approx (Z_c - Z_{S_1}) \frac{B_1 x + B_2 y - b_3 f}{C_1 x + C_2 y - c_3 f}$$

而必须解求方程组 (7)。

2、当  $x$ 、 $y$  座标被分配在左、右两张象片上，例如已知左片的  $y'_0$  与右片的  $x''_0$  时，可利用三个平面： $y'_0$  平面、 $x''_0$  平面与  $Z$  平面交会模型点。即解算下式联立方程求得模型点的  $X$ 、 $Y$  座标：

$$\begin{aligned} X &= k''_1 Y + m''_1 \\ Y &= k''_2 X + m''_2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$k''_1 = -(B''_1 + k''_x b''_3) / (A''_1 + k''_x a''_3)$$

$$m_1'' = \frac{1}{(A_1'' + k_x'' a_3'')} \{ (A_1'' + k_x'' a_3'') X_{S_2} + (B_1'' + k_x'' b_3'') Y_{S_2} + (C_1'' + k_x'' c_3'') (Z_c - Z_{S_2}) \}$$

$$k_2' = -(B_2' + k_y' b_3') / (A_2' + k_y' a_3')$$

$$m_2' = \frac{1}{(A_2' + k_y' a_3')} \{ (A_2' + k_y' a_3') X_{S_1} + (B_2' + k_y' b_3') Y_{S_1} + (C_2' + k_y' c_3') (Z_c - Z_{S_1}) \}$$

$$k_x'' = \frac{x_0''}{f}$$

$$k_x' = \frac{y_0'}{f}$$

式中凡带有'者表示左片,带有''者表示右片。

从上分析可以看出:上述两种情况的解算方法无大的区别,后者仅将 $k_1''$ 与 $m_1''$ 代替前者的系数 $k_1'$ 与常数项 $m_1'$ 。

在测绘等高线的实时程序中,在首先解得模型点座标,然后再由“共线方程”(3)解算待定的象点仪器座标,予以驱动象片盘的运动。

### 三 量测独立点与测绘地物的交会方式

量测独立点之座标与测绘地物时,可以由 $x_1$ 、 $y_1$ 与 $x_2$ (或 $\Delta x$ )为引数,由相对定向方程(共面条件)解出 $y_2$ (或 $\Delta y$ ),然后再用前方交会求得模型点坐标。这就是原来DS型解析测图仪实时程序中测点程序部分[参考文献3]。为了简化实时程序,可以采用测绘等高线的同样方法,即用 $Z$ 代替 $\Delta x$ ,这时仍用 $Z = Z_T$ 平面与 $x_0$ 、 $y_0$ 平面交会模型点座标 $X$ 、 $Y$ ,并求出待定的象片座标。

这样测绘等高线的程序与测点程序基本一致,其差别仅在于 $Z_c$ 是常数,而后者 $Z_T$ 是个变量,必须实时地输入计算机。

### 四 断面扫描的交会方式

DS型解析测图仪能否在模型座标系统内沿着某一个方向进行断面扫描,如何进行交会,以及对仪器的要求等是这一节讨论的主要问题。

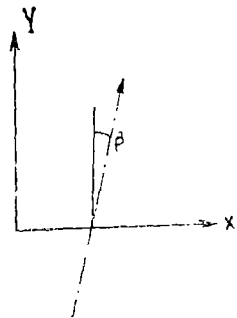
欲使仪器沿模型系统内某一固定方向(它与 $Y$ 轴的夹角为 $\beta$ )进行扫描,如图所示,则三个交会平面中通过模型点的空间平面是:

$$X = pY + q$$

式中:

$$p = \operatorname{tg} \beta$$

若已知的象点座标为左片的象点仪器座标,则三个交会的平面方程为:



图一

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= -f \frac{A'_1(X - X_{S_1}) + B'_1(Y - Y_{S_1}) + C'_1(Z - Z_{S_1})}{a'_3(X - X_{S_1}) + b'_3(Y - Y_{S_1}) + c'_3(Z - Z_{S_1})} \\ y'_0 &= -f \frac{A'_2(X - X_{S_1}) + B'_2(Y - Y_{S_1}) + C'_2(Z - Z_{S_1})}{a'_3(X - X_{S_1}) + b'_3(Y - Y_{S_1}) + c'_3(Z - Z_{S_1})} \\ X &= pY + q \end{aligned} \right\} (9)$$

解此三个联立方程，得模型点座标  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ ，然后再用“共线方程”（3）解求右象点之座标  $x''_0$ 、 $y''_0$  予以驱动。但是当扫描断面通过左方投影中心  $S_1$ ，即  $X_{S_1}$ 、 $Y_{S_1}$  满足该方程时：

$$X_{S_1} = pY_{S_1} + q$$

这方程组（9）无解。因为这时三个平面都包含着投影光线在内，即三平面交于一直线（投影光线）。为了克服这个缺点，这时候必需将右象片座标  $x'_0$  平面换成左象片座标  $x''_0$  平面进行交会：

$$\left. \begin{aligned} x''_0 &= -f \frac{A''_1(X - X_{S_2}) + B''_1(Y - Y_{S_2}) + C''_1(Z - Z_{S_2})}{a''_3(X - X_{S_2}) + b''_3(Y - Y_{S_2}) + c''_3(Z - Z_{S_2})} \\ y''_0 &= -f \frac{A''_2(X - X_{S_1}) + B''_2(Y - Y_{S_1}) + C''_2(Z - Z_{S_1})}{a''_3(X - X_{S_1}) + b''_3(Y - Y_{S_1}) + c''_3(Z - Z_{S_1})} \\ X &= pY + q \end{aligned} \right\} (10)$$

因此，欲使 DS 型解析测图仪能进行断面扫描，则它的左、右象片的  $x$  座标都有可能受到计算机控制，并驱动。在扫描时，以基线中点分界线，当扫描断面位于中点之左边时，则以右片  $x''_0$  座标为已知值， $x'_0$  受计算机控制；反之当扫描断面位于中点之右，则左片之  $x'_0$  为已知值，读入计算机，而  $x''_0$  受计算机控制与驱动。若在 DS 型解析测图仪上，仅设计有一个象片盘的  $x$  运动能受计算机控制，则不可能在整个模型空间范围内进行断面扫描，而只能扫描半个模型。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] G.Inghilleri: A New Analytical Plotter; The Digital Stereocartograph (D.S) ,12 congress of I.S.P.1972
- [ 2 ] G.Inghilleri: The D.S-Type Galileo Analytical Plotters, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing Vol.43 No.11,1977
- [ 3 ] S.Dequal: Software Organization for The Digital Stereocartograph , 12 congress of I.S.P.1972
- [ 4 ] G.Inghilleri: Theory of The D.S Analytical Plotter A,S,P. Analytical Plotter Symposium 1980

# On the Intersection principle of a D.S.Type Analytical plotter and It's Method of Solution

*Zhang Zuxun*

## Abstract

This paper deals with the intersection principle of a D.S. type analytical plotter by using three planes to determine the model points. Of all these planes, one passes through the model point while the other two planes are the so called "x—plane" and the "y—plane", passing through one or two corresponding image points. After that, the unknown image coordinates to be controlled by a servo-system are calculated by a collinear equation the same as that on an AP type analytical plotter. Based upon this principle, the author has derived several formulae for the different types of operation (point determination, contouring and profiling) on a D. S. type analytical plotter.