DOI:10.13203/j.whugis1981.01.002

论亏秩自由网平差

刘大杰

［提要］ 本文从传统的测量平差的观点出发来论述和分析亏秩自由网平差之解的性质。着重论证了：

1，按"附加条件法"讨论亏秩自由网平差问题，其结果与"假观测值法"相同，但前者较后者更为恰当。

2，亏秩平差之解具有方差最小性，也具有无偏性，而不是最小有偏。

3，亏秩平差之解与参考系的关系。

此外，本文还讨论了亏秩平差之解与传统的自由网平差之解的关系，亏秩平差与广义逆矩阵的关系，不变量的条件，以及几种算法。

一、引　言

众所周知，在间接平差法（不附条件）中，要求所选择的未知数是函数独立的，且要求误差方程式的系数阵 $\underset{n\times t}{A}$ 是列满秩阵，即要求 $\mathrm{Rank}(A)=t$。此时，所得到的法方程式系数阵 A^TP_LA 就是一个对称的满秩阵，它的秩为 $\mathrm{Rank}(\underset{t\times t}{A^TP_LA})=t$。因此，由法方程式可得到未知数的唯一解。

但是，也可能遇到这样的情况，在一个平差问题中，所选的未知数虽然是函数独立的，而系数阵 $\underset{n\times t}{A}$ 不是列满秩阵，它的秩 $\mathrm{Rank}(A)=t_0<t$，法方程式系数阵 $(\underset{t\times t}{A^TP_LA})$ 的秩也为 $\mathrm{Rank}(A^TP_LA)=t_0<t$。通常称 $d=t-t_0$ 为 A^TP_LA 的秩亏。当 $d>0$ 时，行列式 $\det(A^TP_LA)=0$，称 A^TP_LA 是一个奇异阵或亏秩阵。由于 A^TP_LA 是一个亏秩阵，故法方程式是一个相容的方程组，它有无穷多组解。

例如，在对没有固定水准点的水准网进行间接平差时，如果选取所点的高程作为未知数，那末，这些未知数虽然是函数独立的，但误差方程式的系数阵 $\underset{n\times t}{A}$ 的秩为 $t_0=t-1$，A^TP_LA 的秩亏 $d=1$，法方程式是一个奇异方程。同样，对于三角网、测边网、导线网等，当没有起算数据或起算数据不足时，也会产生这样的法方程式。

为了改变这类平差问题法方程式的奇异性，求得唯一解，传统的方法是假定一组起算数据。但这样得到的解与起算数据的位置有关系。因此，就产生了这样的问题：采用怎样的方法才能改变这种平差问题的奇异性，求得最适当的唯一解？一般将这种平差问题称为亏秩自由网平差，简称为亏秩平差或自由网平差。

亏秩自由网平差问题最初是P.Meissl于1962年提出的。后来，许多学者对这种平差问题进行了更深入的研究和讨论。其中Bjerhammar(1973)、Mittermayer（1971、1972）等主要是利用广义逆矩阵的概念来讨论；而Pelzer（1971，1974）、Wolf（1972）等则是从传统的测量平差的观点来讨论。近几年来，我国测绘工作者也开始重视这种平差问题，并逐渐应用到实际工作中。

那末，求$\hat{x}$的问题也就变成为求函数$\hat{x}^T\hat{x}$在满足（8.10）之第一式的条件极值的问题。

为此，我们组成新的函数

$$\Psi = \hat{x}^T\hat{x} - 2K^T(N_{11}\hat{x}_1 + + N_{12}\hat{x}_2 - W_1) \tag{8.11}$$

式中$2K^T$是拉格朗日乘数向量，或称K为联系数向量。将Ψ对$\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$求导数，并令它们为0，得

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_1 &= N_{11}K\\ \hat{x}_2 &= N_{21}K\end{aligned}\right\}\text{。} \tag{8.12}$$

将上式代入（8.10）之第一式，有

$$(N_{11}N_{11} + N_{12}N_{21})K - W_1 = 0\text{。} \tag{8.13}$$

再令

$$Q_N = (N_{11}N_{11} + N_{12}N_{21})^{-1}, \tag{8.14}$$

则可由（8.13）式解得

$$K = Q_N W_1 = Q_N A_1^T P_L l, \tag{8.15}$$

并有

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_1 &= N_{11}Q_N A_1^T P_L l\\ \hat{x}_2 &= N_{21}Q_N A_1^T P_L l\end{aligned}\right\}\text{。} \tag{8.16}$$

它们的协因数阵即为

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} N_{11}Q_N N_{11}Q_N N_{11} & N_{11}Q_N N_{11}Q_N N_{12} \\ N_{21}Q_N N_{11}Q_N N_{11} & N_{21}Q_N N_{11}Q_N N_{12} \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

这种解法没有利用G阵，故称之为直接解法。

以上是三种常用的解法，当然，还可以根据广义逆矩阵的计算方法得到一些其它的计算方法。

【算例】

有图一之水准网，观测高差及其权为

$L_1 = +0.023$ 米，　$p_1 = 2$，

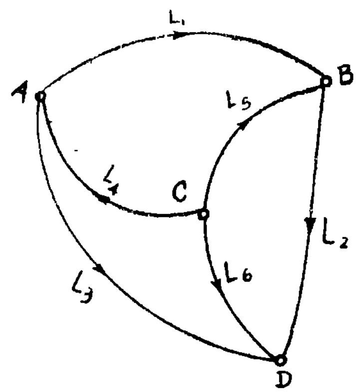
$L_2 = +1.114$ 米，　$p_2 = 2$，

$L_3 = +1.142$ 米，　$p_3 = 2$，

$L_4 = +0.079$ 米，　$p_4 = 1$，

$L_5 = +0.099$ 米，　$p_5 = 1$，

$L_6 = +1.217$ 米，　$p_6 = 1$。



图一

未知数（各点高程）的近似值（即参考系）为

$x_1^0=100.078$ 米，$x_2^0=100.099$ 米，$x_3^0=100.000$ 米，$x_4^0=101.216$ 米。

误差方程式为

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & +1\\ -1 & 0 & 0 & +1\\ +1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & +1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} +2\\ -3\\ +4\\ +1\\ 0\\ +1 \end{pmatrix},$$

这里有 $n=6$，$t=4$，$t_0=3$，$d=t-t_0=1$。

（一）按附加条件法求解

1，附加条件式 $G^Tx=0$，

$$G^T=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,\ 1,) 。$$

2，计算Q。

$$A^TPA=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -2\\ -2 & 5 & -1 & -2\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},\qquad A^TP_Ll=\begin{pmatrix} -11\\ +10\\ -2\\ +3 \end{pmatrix}$$

$$A^TP_LA+GG^T=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 21 & -7 & -3 & -7\\ -7 & 21 & -3 & -7\\ -3 & -3 & 13 & -3\\ -7 & -7 & -3 & 21 \end{pmatrix},$$

$$Q=(A^TP_LA+GG^T)^{-1}=\frac{1}{112}\begin{pmatrix} 41 & 25 & 21 & 25\\ 25 & 41 & 21 & 25\\ 21 & 21 & 49 & 21\\ 25 & 25 & 21 & 41 \end{pmatrix}。$$

3，求$\hat{x}$。

$$\hat{x}=\begin{pmatrix} \hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4 \end{pmatrix}=Q\,A^TP_L\,l=\begin{pmatrix} -1.5\\ +1.5\\ -0.5\\ +0.5 \end{pmatrix}(\text{毫米}),\qquad \hat{X}=X^0+\hat{x}=\begin{pmatrix} 100.0765\\ 100.1005\\ 99.9995\\ 101.2165 \end{pmatrix}(\text{米})。$$

4，求$\hat{Q}$。

$$\hat{Q}=Q-GG^{T}=\frac{1}{112}\begin{pmatrix}13 & -3 & -7 & -3\\ -3 & 13 & -7 & -3\\ -7 & -7 & 21 & -7\\ -3 & -3 & -7 & 13\end{pmatrix}。$$

5，V，$V^{T}P_{L}V$ 和 σ^{2} 的计算（略）。

（二）按利用 $\hat{x}$ 与任意解的关系求解

1，求任意解 $\hat{x}_b$ 和 $\hat{Q}_b$。令 $x_{b4}=0$ （即假定D点为起算点）。

误差方程式变为

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & +1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ +1 & 0 & -1\\ 0 & +1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\ -3\\ -4\\ -1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}。$$

法方程式为

$$\begin{pmatrix}+5 & -2 & -1\\ -2 & +5 & -1\\ -1 & -1 & +3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_{b1}\\ \hat{x}_{b2}\\ \hat{x}_{b3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-11\\ +10\\ +2\end{pmatrix}=0,$$

得

$$\hat{x}_b=\begin{pmatrix}\hat{x}_{b1}\\ \hat{x}_{b2}\\ \hat{x}_{b3}\\ \hat{x}_{b4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ +1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{Q}_b=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}+2 & +1 & +1 & 0\\ +1 & +2 & +1 & 0\\ +1 & +1 & +3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

2，计算 $\hat{x}$

$$\hat{x}=(E-GG^{T})\hat{x}_b=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ +1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5\\ +1.5\\ -0.5\\ +0.5\end{pmatrix}。$$

3，计算 $\hat{Q}$。

$$\hat{Q}=(E-GG^{T})\hat{Q}_b(E-GG^{T})$$

$$=\frac{1}{16\times17}\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+2&+1&+1&0\\+1&+2&+1&0\\+1&+1&+3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{112}\begin{pmatrix}13&-3&-7&-3\\-3&13&-7&-3\\-7&-7&21&-7\\-3&-3&-7&13\end{pmatrix}。$$

（三）按直接解法求解。

（1）由法方程式取线性无关的方程

$$\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&5&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}\hat{x}_4-\begin{pmatrix}-11\\+10\\-2\end{pmatrix}=0。$$

（2）计算 Q_N 和 K。

$$\begin{pmatrix}34&-15&-4\\-15&34&-4\\-4&-4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-11\\+10\\-2\end{pmatrix}=0,$$

$$Q_N=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&\frac{19}{4}\end{pmatrix},\qquad K=\begin{pmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{pmatrix}=Q_NW=\begin{pmatrix}-\frac{2}{7}\\+\frac{1}{7}\\-\frac{3}{14}\end{pmatrix}。$$

（3）计算 $\hat{x}$。

$$\hat{x}=\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\\\hat{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&5&-1\\-1&-1&3\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{7}\\+\frac{1}{7}\\-\frac{3}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5\\+1.5\\-0.5\\+0.5\end{pmatrix}\text{（毫米）},$$

（4）求 $\hat{Q}$。

$$\hat{Q}=\begin{pmatrix}N_{11}Q_NN_{11}Q_NN_{11}&N_{11}Q_NN_{11}Q_NN_{12}\\N_{21}Q_NN_{11}Q_NN_{11}&N_{21}Q_NN_{11}Q_NN_{12}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{112}\begin{pmatrix}13&-3&-7&-3\\-3&13&-7&-3\\-7&-7&21&-7\\-3&-3&-7&13\end{pmatrix}。$$

九、几点看法

综合上面的讨论，可以对亏秩自由网平差问题提出以下几点看法。

（1）讨论亏秩自由网平差的方法有两种，一种是从传统的测量平差观点出发，利用假观测值或附加条件式来讨论；一种是从线性代数的观点出发，利用广义逆矩阵来讨论。这两种方法各有优点。按第一种方法讨论时，便于分析和论证估值的最优性质；而按第二种方法讨论时，容易导出未知数的唯一解，并可以根据求广义逆矩阵的方法得到适当的算法。本文着重分析和论证估值的性质，因此主要采用了第一种方法。

（2）按假观测值法或附加条件法都可以得到亏秩自由网的解，其结果也是相同的。但从“$tr(\hat{Q})$ = 最小”来讨论时，按附加条件法讨论更为恰当，笔者已在（二）中说明。

（3）对于一定的参考系，亏秩平差的解 $\hat{x}$ 具有方差最小性（等价于 $tr(\hat{Q})$ = 最小），同时还具有无偏性，而不是最小有偏性。

（4）亏秩自由网平差的解 $\hat{x}$ 与传统的自由网平差所得的任意解 $\hat{x}_0$ 具有一定的关系，因此，可以根据 $\hat{x}_b$ 来求 $\hat{x}$。对于未知数的函数（网中的一些元素）$\Phi = Fx + F^0$，当 $FG = 0$ 时，可以根据任意 $\hat{x}_0$ 来计算，称之为不变量。

（5）如果自由网的参考系可以在一定范围内任意选择，则亏秩平差的结果可以与传统解法的结果在数值上完全相同。因此，亏秩平差对这类自由网意义不大，但可以将亏秩平差所得的 $\hat{Q}$ 作为该网不受起算数据误差影响的内精度值，来衡量整个网的精度。

（6）对于复测自由网，重复平差时可以采用相同的参考系，也可以利用上一次亏秩平差的结果作为参考系。第二种方法在某些方面还稍为有利些。

（7）对于（八）中的三种解法，当所平差的自由网的G阵已知时，采用第一种或第二种较方便（测量上常遇到的自由网，G阵一般是已知的），当G阵不知道时，则宜采用第三种解法。

参 考 文 献

[1] Gotthardt, E : Einfürung in die Ausgleichungsrechnung, 1978.

[2] Mittermayer, E : Zur Ausgleichung freier Netze, ZfV 97 1972.

[3] Meissl, P : Ausgleichungsrechnung (I), 1975

[4] Pelzer, H : Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben, ZfV 99 1974.

[5] Welsch, W : Some Technigues for Monitoring and Analyzing Deformations and Control Nets, 1980.

[6] Bjerhammar, A: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses, 1973.

[7] 南京大学数学系计算数学专业：线性代数，科学出版社 1978.

[8] 崔希璋、刘大杰：具有奇异主子矩阵的法方程式的处理方法，《测绘通报》1981 年第 2 期.

On the Adjustment with Rank-Defects of a Free Networ k

Liu Dajie

Abstract

Based upon the point of view of classical adjustment of observations, this paper deals with the analyses and discussions of the characteristics of the solution of the adjustment with rank-defects of a free network. Conclusions are made concerning the following points :

1, The result obtained from the adjustment with rank-defects of a free net-work by "the method of auxiliary condition", is the same as that by "the method of pseudo-observation", but the former is more appropriate than the latter.

2, The solution of the adjustment with rank-defects has the characteristics of least variance as well as unbiasedness.

3, The relationship between the solution of the adjustment with rank-defects and its system of reference.

besides, the relationship between the solutions of the adjustment with rank-defecst and the classical adjustment of a free network; the relationship between the adjustment with rank-defects and the generalized inverses; the condition of invariant as well as some methods of calculation are also dealt with.