

關於參考橢圓體定位的理論

陳永齡

(一) 參攷橢圓體定位的基本要求

參考橢圓體最理想的定位是使它的幾何中心與地球重心相合，它的短軸與地軸（旋轉軸）相合。這樣，如果參考橢圓體的元素選擇極為適當的話，就可以使參考橢圓體面與地球整體的真實形狀——大地水準面——最為接近。這樣定位的橢圓體一般稱為總地球橢圓體。

但是使參考橢圓體的中心與地球的重心相合是一件極為困難的事。沒有在整個地球表面上布設起互相連接的天文大地網和進行全面的重力測量以前，即使僅要求近似地做到這一點，也是不可能的。如果參考橢圓體的中心不能與地球的重心相合，它的短軸自然也不能與地軸相合。因此在一般情況下我們不可能要求參考橢圓體的定位滿足上述理想條件，而僅能要求參考橢圓體的短軸與地球的旋轉軸平行。

參考橢圓體的短軸與地球的旋轉軸平行是參考橢圓體定位的最基本要求。我們知道，天文—大地垂綫偏差的公式就是在這一條件下推導出來的，即

$$\begin{aligned} B &= \varphi - \xi \\ L &= \lambda - \eta \sec \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

對於天文大地網極為重要的拉普拉斯方程式

$$A = \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi = \alpha - (\lambda - L) \sin \varphi \quad (2)$$

也是在此條件下推導出來的。在以上各式中， φ 和 λ 為天文大地網中一個天文點的緯度和經度， B 和 L 為同一點的大地緯度和經度， α 為從這個點上指向一個水平方向的天文方位角， A 為同一方向的大地方位角， ξ 和 η 是這個點上垂綫偏差在子午平面和卯酉平面內的分量。

如果參考橢圓體的短軸不與地球旋轉軸平行，參考橢圓體的赤道平面將不平行於地球的赤道平面，參考橢圓體的起始子午平面也將不平行於地球的起始子午平面。如果天文和大地兩個坐標系統中的這兩個基本平面不分別互相平行，式(1)和式(2)都將不能成立，我們將不能通過比較天文和大地經緯度值來求出天文點上的相對垂綫偏差，也將不能利用拉普拉斯方位角來控制天文大地網中方位角推算的誤差。

由此可見，如果參考橢圓體的定位不能使參考橢圓體的短軸與地球旋轉軸互相平行，在大地網點上進行天文測量將毫無意義。因此我們說這是參考橢圓體定位的基本要求。

(二) 參攷橢圓體的定位元素和大地基準數據

在文獻中很少提到，為了確定參考橢圓體在地球體中的位置，需要幾個定位元素，而且通常都把參考橢圓體的定位元素與大地基準數據不加區分。這個問題值得討論。

從純幾何觀點來看，完全地確定參考橢圓體在地球體內的位置，必須：(1)確定它的幾何中心或它的面上任意一點在一個地球坐標系統中的空間坐標值，這需要3個定位元素；(2)確定參考橢圓體的短軸與地球旋轉軸平行，需要1個定位元素；(3)確定它的起始子午平面與地球的起始子午平面平行，需要1個定位元素，由此可見，參考橢圓體的完全定位需要5個定位元素。

我們知道，參考橢圓體的定位通常是通過確定大地基準點上的大地基準數據來實現的。大地基準數據是大地基準點的大地經緯度和大地高程（超出參考橢圓體面的高程），以及由大地基準點到一相鄰大地點的大地方位角。它們寫成以下形式：

$$\begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 = \xi_0 \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0 \\ H_0 &= h_0 + \zeta_0 \\ A_0 &= \alpha_0 - (\lambda_0 - L_0) \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

以上各式中有關天文和大地緯度、經度、方位角和垂綫偏差分量的符號與式(1)、(2)相同，下標0指的是屬於大地基準點的；大地高程 H_0 是由大地基準點沿垂綫到似大地水準面的正常高 h_0 及似大地水準面沿

法綫到參考橢圓體面的高程異常 ζ_0 之和所組成。这里似大地水准面是介于地球自然表面和參考橢圓體面之間的一個輔助面， h_0 可以由幾何水准測量的結果中得出，因此在大地基準數據中，通常只要給出 ζ_0 就足够了。當採用大地水准面為輔助面時， H_0 將由大地基準點的正高 $h_0^{\text{正}}$ 和大地水准面差距 N_0 之和所組成，所以在正高高程系統中，將以 N_0 代替 ζ_0 作為大地基準數據。

現在我們看，參與式(3)中的所有元素中，那些可以看做是參考橢圓體的定位元素。

為此我們作出表示垂綫偏差的球面三角形，如圖所示。在這個三角形中 u_0 和 θ_0 可由給定的垂綫偏差的子午和卯酉分量 ξ_0 和 η_0 決定，即

$$\xi_0 = u_0 \cos \theta_0$$

$$\eta_0 = u_0 \sin \theta_0$$

當三角形中 φ_0 、 u_0 、 θ_0 已給定時，這個三角形就完全決定了。於是可求得大地緯度 B_0 和大地經度與天文

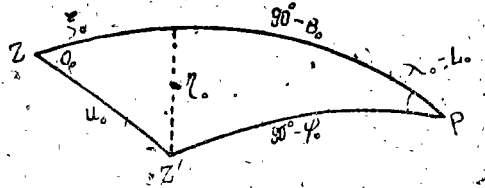


圖 1

經度之差 $\lambda_0 - L_0$ 。除此以外，代表北極方向的 P 的確定，就等於確定了參考橢圓體的短軸方向與地球旋轉軸方向平行；而 PZ' 和 PZ 為天文和大地子午平面，確定其夾角 $\lambda_0 - L_0$ 就等於規定天文和大地起始子午平面互相平行。換一句話說， ξ_0 、 η_0 、 φ_0 這三個元素確定了參考橢圓體的短軸方向、起始子午平面、和大地基準點的大地緯度 B_0 。

其次，在已知 $\lambda_0 - L_0$ 的情況下，利用天文經度 λ_0 這一元素，可以確定大地基準點的大地經度 L_0 。

最後，給定大地基準點上似大地水准面對參考橢圓體面的高程異常 ζ_0 ，再加上由幾何水准測量所得出的大地基準點的正常高 h_0 ，就確定了大地基準點的大地高程 H_0 。 B_0 、 L_0 、 H_0 是確定參考橢圓體面上大地基準點的投影位置與地球自然表面上大地基準點之間的關係的三個坐標值。

由此可見，通過 φ_0 、 $\lambda_0 - L_0$ 、 ξ_0 、 η_0 、 ζ_0 這五個元素，可以完全地確定參考橢圓體在地球體中的位置。所以它們就是參考橢圓體的定位元素。

根據式(3)中的前兩式，在給定定位元 φ_0 、 $\lambda_0 - L_0$ 、 ξ_0 、 η_0 的情況下，可以確定大地基準點的大地坐標 B_0 和 L_0 。

这里值得注意的是，天文方位角 α_0 ，或者由它按照拉普拉斯方程式推算出來的地方方位角 A_0 ，可以不必列入定位元素之中。事實上，只要給定了 ξ_0 、 η_0 ，確定了參考橢圓體的短軸與地球旋轉軸平行，大地起始子午平面與天文子午平面平行，根據天文方位角 α_0 就可以推算地方方位角 A_0 ，因此 A_0 是參考橢圓體這樣定位的結果，而不是定位元素。

關於這點，伊佐托夫曾經指出過(1)：他說：“在這種情況下，起始方位角不但不參與參考橢圓體的定位，而且還取決於參考橢圓體按經緯度給定的定位。”但另一方面，他又說：“彼此獨立的天文經度和天文方位角的誤差，破壞了在大地基準點上存在的拉普拉斯條件，從而導至卯酉面上垂綫偏差分量的兩重性；也就是參考橢圓體定位的兩重性。”其實，既然大地基準點上的拉普拉斯方位角 A_0 不是參考橢圓體的定位元素，它就不會引起定位的兩重性，它的誤差只影響天文大地網在參考橢圓體面上的定向，而不影響參考橢圓體的位置。關於這點以下我們還要討論。

在這五個定位元素中，天文緯度 φ_0 和天文經度 λ_0 是天文觀測的結果（嚴格說起來應當歸化到大地水准面上），其它 ζ_0 、 η_0 、 ξ_0 不是觀測數據。如果僅從確定參考橢圓體位置的觀點來看， ξ_0 、 η_0 、 ζ_0 可以取隨便什麼數值；但定位時所以加入這些數值，是為了使參考橢圓體面與大地水准面最為接近，所以通常是根據天文大地網的成果按弧度測量方法來推算 ξ_0 、 η_0 、 ζ_0 之值。

當一個國家開始天文大地測量的時候，還沒有足夠的資料推算 ξ_0 、 η_0 、 ζ_0 ，通常簡單地假定

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0$$

這時大地基準數據將為

$$B_0 = \varphi_0,$$

$$L_0 = \lambda_0,$$

$$\zeta_0 = 0,$$

$$A_0 = \alpha_0.$$

克拉索夫斯基(2)和伊佐托夫(1)都認為這時 $A_0 = \alpha$ 。參與參考橢圓体的定位，它決定參考橢圓体的短軸與地球旋轉軸平行。實際上就在這個情況下， $A_0 = \alpha$ 。還不是定位元素，因為 $\eta_0 = 0$ 首先決定了在大地基準點上大地與天文子午平面相合，其次 $\xi_0 = 0$ (或 $B_0 = \varphi_0$) 自然就決定了橢圓体短軸與地軸平行。換一句話說，這一特殊情況，除了使大地基準點上法綫與垂綫相合和參考橢圓体面與大地水準面相切外，在定位元素方面，與前面所講的普遍情況並沒有什麼區別。

綜上所述，我們可以得出結論：參考橢圓体的定位元素是大地基準點上的天文緯度和經度 φ_0 、 λ_0 ，它的垂綫偏差分量 ξ_0 和 η_0 ，以及它的高程異常 ζ_0 。由 φ_0 、 λ_0 、 ξ_0 、 η_0 可以組成大地基準數據中的大地緯度 B_0 和大地經度 L_0 ，因此通過大地基準數據中 B_0 、 L_0 、 ζ_0 的具体數值可以體現參考橢圓体的定位關係。至于大地基準數據中的 A_0 不能看作是參考橢圓体的定位元素，而僅是在定位時使參考橢圓体的短軸與地球旋轉軸平行的必然結果。

如果在大地基準數據中，不僅給定大地基準點的大地緯度 B_0 和大地經度 L_0 ，同時還給出垂綫偏差分量 ξ_0 和 η_0 。那末就完全沒有必要給出大地方位角 A_0 ，因為根據天文方位角 α_0 和垂綫偏差分量自然可以按照拉普拉斯方程式推算出來 A_0 之值。通常之所以將大地方位角 A_0 也列在大地基準數據之內，是因為只給定 B_0 和 L_0 ，而不詳細地給出 ξ_0 和 η_0 。

(三) 大地基準點上天文測定誤差的影響

在現有文獻中，都認為大地基準點上的天文測定必須特別精確，否則將引起參考橢圓体定位的“不定性”。對於這個問題也值得討論。

首先需要明確，在參考橢圓体的一定定位的情況下，大地基準點投影到參考橢圓体面上，必然取得一定的大地緯度和大地經度值 B_0 和 L_0 。只要參考橢圓体的定位不變， B_0 和 L_0 值就不應改變；而 B_0 和 L_0 值不改變，就說明參考橢圓体的定位是完全確定的。

從天文大地網實際計算的情況來看，在天文大地網平差之後，所有大地點的大地坐標都是以 B_0 和 L_0 為起始數據在參考橢圓体面上推算出來的。儘管在決定大地基準數據 B_0 和 L_0 時，所利用的天文測定結果 φ_0 和 λ_0 含有某種程度的誤差，只要 B_0 和 L_0 值一經確定，整個天文大地網的大地坐標系統就完全確定了。所以在討論大地基準點上天文測定誤差的影響時，必須以 B_0 和 L_0 值固定不變為前提。

現在研究大地基準點上天文經緯度 φ_0 、 λ_0 測定誤差的影響。將式(3)的第一、二兩式微分，得

$$\begin{aligned} dB_0 &= d\varphi_0 - d\xi_0 \\ dL_0 &= d\lambda_0 - d\eta_0 \sec\varphi_0 \end{aligned} \quad (4)$$

當 B_0 、 L_0 不變時， $dB_0 = dL_0 = 0$ ，由以上兩式得出

$$\begin{aligned} d\xi_0 &= d\varphi_0 \\ d\eta_0 &= d\lambda_0 \cos\varphi_0 \end{aligned} \quad (5)$$

即天文經緯度的測定誤差將影響大地基準點上的垂綫偏差分量 ξ_0 、 η_0 含有與之相應的誤差。

那末，誤差 $d\xi_0$ 和 $d\eta_0$ 對於天文大地網的結果將產生什麼影響呢？首先，它們將影響水平方向歸算中的垂綫偏差改正；其次它們將影響推算高程異常的結果，從而影響水平距離的歸算結果；最後， $d\eta_0$ 將影響大地基準點上拉普拉斯方位角的結果。現在分別討論這些影響的性質。

最重要的一點是要明確，大地基準點上 ξ_0 和 η_0 的誤差是否會影響其它天文點上求定 ξ 和 η 的結果。由垂綫偏差分量的方程式

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L) \cos\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

可以看出，決定 ξ 和 η 值的幾個元素中， φ 和 λ 是在每個天文點上獨立測定的， B 和 L 是從大地基準點給定的大地坐標值 B_0 和 L_0 推算的。當 B_0 和 L_0 值固定不變時， B 和 L 只受天文大地網中觀測誤差的影響，而不受 ξ_0 和 η_0 的影響。這裡只存在一個問題，當 η_0 有誤差時，將影響大地基準點上的大地方位角 A_0 也含有誤差，從而可能影響大地坐標 B 、 L 的推算值。關於這個問題我們以下還要討論，結論是 A_0 的誤差與天文大地網中一般拉普拉斯方位角的誤差相同，對於推算大地坐標的結果沒有特殊的影響。由此可以得出結論，大地基準點上天文測定 φ_0 和 λ_0 的誤差並不影響天文大地網中其它天文點的垂綫偏差

值，也就是說，各點的垂綫偏差值基本上是獨立的。

水平方向歸算中的垂綫偏差改正正是根據每個測站上的垂綫偏差分量分別計算的。既然大地基準點上的垂綫偏差值基本上不影響其它大地點的垂綫偏差值，因此從這一方面來看，大地基準點上天文測定的精度可以與一般天文點上的測定精度相同，而不需要特別精密。

其次研究 $d\xi$ 和 $d\eta$ 對於推算高程異常的影響。無論按照天文水準或天文重力水準推算高程異常時，每一個天文點上的 ξ 、 η 值決定該點大地水準面與參考橢圓體面之間的傾角。既然各點的垂綫偏差值是彼此獨立的，每個點上垂綫偏差值的誤差對於推算高程異常的結果就只能產生局部的影響。因此從這一方面來看，大地基準點上天文測定的精度也不需要比其它天文點特別精密。

最後討論天文測定誤差對於拉普拉斯方位角的影響問題。根據式(3)的最後一式，當 $dL_0 = 0$ 時可以寫出：

$$dA_0 = d\alpha_0 - d\lambda_0 \sin \varphi_0 \quad (7)$$

這裡我們捨去 $d\varphi_0$ 對於 A_0 的影響，因為這一項是極為微小的。對於大地基準點以外的拉普拉斯方位角，因為 L 值是由天文大地網推算的，它受大地網中各種觀測誤差的影響而可能產生誤差 dL ，所以這時推算拉普拉斯方位角的誤差可用下式表示：

$$dA = d\alpha + d\lambda \sin \varphi + dL \sin \varphi \quad (8)$$

這裡也同樣捨去了 $d\varphi$ 對於 A 的微小影響。

我們的問題是研究 dA 是否在某種程度上受 dA_0 的影響。如果由於大地基準點上的拉普拉斯方位角帶有誤差 dA_0 ，因而引起所有其它拉普拉斯方位角都帶有“附加的誤差”，那末就有充足的理由說，必須使大地基準點上的 dA_0 儘可能微小，也就是說，必須使大地基準點上的天文經度 λ_0 和天文方位角 α_0 的測定特別精確。從式(8)來看，天文經度 λ 和天文方位角 α 是獨立測定的，它們不會受 dA_0 的影響。能夠受 dA_0 的影響的，只有式(8)中的 dL 一項。 dL 代表天文大地網中各種觀測誤差對於該點大地經度 L 的綜合影響，其中包括網中所有基綫、所有拉普拉斯方位角、所有水平角觀測的誤差對於大地經度 L 的影響。在 astronomical 大地網平差時，我們根據每一鎖段兩端的拉普拉斯方位角列出該鎖段的方位角條件式。任一拉普拉斯方位角的誤差都將使之有關的方位角條件式不符值產生誤差，因而影響平差的結果，這時大地基準點上拉普拉斯方位角的誤差 dA_0 與任一拉普拉斯方位角的誤差 dA 都起着同樣的作用。從天文大地網的平差過程來看，完全可以確信，絕不會由於大地基準點上的拉普拉斯方位角的誤差 dA_0 而使整個天文大地網產生一個扭轉。誤差 dA_0 所產生的扭轉影響將為其它拉普拉斯方位角所控制，不會得到天文大地網中的所有各部分。任一其它拉普拉斯方位角的誤差也只能對天文大地網的相應局部產生影響。因此我們說，大地基準點上的拉普拉斯方位角並沒有什麼獨特的作用，它的誤差 dA_0 對於任一大地點的大地坐標並不產生獨特的影響。換一句話說，我們認為所有拉普拉斯方位角的作用都是相同的，大地基準點上拉普拉斯方位角也不例外。它們共同決定天文大地網的定向，猶如所有基綫共同決定天文大地網的尺度一樣。而且由於式(8)中的 $d\alpha$ 一般很小(3)，比式中另外兩項 $d\lambda$ 和 dL 都小，一般可以認為 dA 主要決定於天文方位角和天文經度的測定誤差 $d\alpha$ 和 $d\lambda$ ，因此各個拉普拉斯方位角可以看作是互相獨立的。

根據以上的分析，可以得出結論，大地基準點上天文測定誤差的影響与其它天文點上天文測定誤差的影響是相同的，認為大地基準點上的天文經緯度和天文方位角必須特別精確地測定，是沒有充足根據的；它們只要与其它天文點上測定的精度相同就可以了。

(四) 關於我國參攷橢圓體定位的問題

最後，談一談我國參攷橢圓體的定位問題。

我國現在採用的大地坐標系統為“1954年北京坐標系”〔4〕它是在1954年東部地區若干一等鎖環聯合平差之後所確定的。在確定這個坐標系時，並沒有指定那一點作為大地基準點，也沒有在任何點上作過特別精密的天文測定。計算大地坐標的起始數據是由與蘇聯相接的幾個三角鎖段傳引過來的。因此就常引來這樣的問題：“1954年北京坐標系”是否可以算作一個獨立的坐標系，它與蘇聯的參攷橢圓體定位是否完全一致，今後是否應根據我國天文大地網的資料研究最適合於我國情況的參攷橢圓體定位。

根據我們前几節討論的結果，大地基準點上并不需要作特別精確的天文測定，任意一個按一等天文精度測定過的拉普拉斯點都可採用為大地基準點。只要選定一個拉普拉斯點，並把它在“1954年北京坐標系”中的大地經緯度值 B_0 和 L_0 以及高程異常值 ζ_0 固定下來，與這個坐標系統相應的參考橢圓體定位就確定下來。因此應當認為這個坐標系是獨立的坐標系。

儘管我國的大地基準數據是從蘇聯推算過來的，但是當時推算的幾個鎖段由於精度不足，現已部分地重新布設，並按1954年北京坐標系計算它們的大地坐標。這樣推算的坐標值必然會與蘇聯相應點的坐標值有所不同。因而嚴格說起來，由於推算我國大地基準數據誤差的影響，我國參考橢圓體的定位與蘇聯參考橢圓體的定位不可能完全一致。明確這一點是很重要的。因為今後我國和蘇聯天文大地網互相連接的地方將要很多，按照我國坐標系統所推算的大地坐標值與蘇聯大地坐標值的差別不能完全看作是測量的誤差，其中還有推算我國大地基準數據的誤差，也就是定位不完全一致的誤差在內。

至於今後是否應根據我國天文大地網的資料研究最適合於我國情況的參考橢圓體定位問題，這是一個比較複雜的問題，決定於許多因素。

一般國家在天文大地網布設到相當程度時，都要研究最適合於本國範圍內的參考橢圓體的大小和它最適宜的定位，並根據這樣決定的參考橢圓體定位進行天文大地網平差最後大地坐標的計算。這樣作的目的有二：一是為了使天文大地網的平差結果完全正確，另一是在參考橢圓體面與大地水準面最為接近的情況下，才能使大地網的各元素值與地面真實情況符合得最好。

我們知道，為了達到上述第一目的，只有應用“平展法”處理天文大地網時，才有必要選擇參考橢圓體最適宜的大小和定位，否則天文大地網平差不可能獲得正確的結果。如果採用“投影法”把地面上的項測數據嚴格投影到參考橢圓體面上，天文大地網平差的正確性並不依賴於所選擇的參考橢圓體和它的定位是否最為適當。

上述第二目的是與天文大地網的成果對於實際使用是否便利有關的。如果所採用的參考橢圓體的大小和定位使得參考橢圓體面在國家相當大的面積內與大地水準面相距較大，勢必引起在參考橢圓體面上所計算出來的邊長（即大地網給出的邊長值）與由地面歸算到“海水面”上的邊長相差較大。如果參考橢圓體面與大地水準面有較大的傾斜，由大地網給出的邊長值在國內不同地區將與“海水面”上的邊長構成不同的比例。這些都會給使用大地測量成果帶來不便。此外，大地點上垂綫偏差值的系統性的增大對於布設下一級的三角測量也是不便的。

我國重力測量的成果還不多，還沒有根據天文重力水準計算高程異常的準確資料。在僅根據天文水準所得出的高程異常圖中，我們看到東部沿海地區的高程異常達到50—60米，由東向西有規律地逐漸減小。這說明按1954年北京坐標系所確定的參考橢圓體定位使我國東部的高程異常達到較大的數值，而且參考橢圓體面與大地水準面有明顯的傾斜。按照這個定位，在我國東部地區大地網所給出的邊長與實際“海水面”上的邊長相差達1:100000左右，而參考橢圓體面與大地水準面的傾角約達2"左右。當然，上述高程異常的推算沒有利用重力測量數據，結果相當粗略，還不能作為最後論斷的充足的根據。但是由此也可看出，我國參考橢圓體的定位是否恰當的問題，還是值得研究的。

另外一方面，如果改變我國參考橢圓體的定位，就將整個改變我國的大地坐標系統，從而引起把所有已成的地形圖修正到新坐標系統的問題。這也是不能不慎重考慮的問題。

最後，相鄰國家具有統一的大地坐標系統，無論從科學或從實用的觀點來考慮，都有一定的好處。

所以，決定我國參考橢圓體最後定位的問題是個複雜的問題，須要從多方面來考慮。為此，我們應當首先根據現已擁有的大量的天文大地測量資料研究對於我國可能是最適宜的參考橢圓體的大小和定位。只有比較最適宜的定位和現行定位的差別，才能根據上述几方面的考慮，作出正確的決定。

參 考 文 獻

(1) A. A. 伊佐托夫：關於建立大地測量起始數據的理論，蘇聯“中央測繪科學研究所著作集”第96期，1953年，譯文載“測量制圖譯報”1958年第8期。

(2) 克拉索夫斯基：大地測量學下卷，莫斯科，1942年，中譯本大地測量學下卷第二分冊§86，頁556—556。

(3) A. A. 伊佐托夫：關於拉普拉斯方位角，蘇聯“測繪科技生產論文集”第14期，1946年，譯文載“測量制圖譯報”1959年第1期。

(4) 胡明城：關於我國參考橢圓體大小的選擇和定向問題，測繪通報第二卷第三期，1956年。