DOI: 10.13203/j.whugis1959.02.002

綫形鎖（網）的精度

陶本藻、吳俊昶

§1 引 言

五九年二月間在武漢召開的全國測繪科学技术經驗交流会議中，很多生產單位提到：目前在圖根控制測量上广泛地采用了布置在兩个高級控制點之間的三角鎖或不大的三角网，通称为綫形鎖（網）。這样做在工作上甚为方便，因綫形鎖（網）由一高級點出發，連接于另一高級點，綫形鎖（網）內不量基綫，亦不測方位角。但是，对于綫形鎖（網）的精度問題，例如鎖（網）內边長及點位的精度如何；鎖（網）內精度分布的情况如何；以及能否作为等級三角等問題，虽已有几篇文章叙述，但还沒有得到結論。

本文的目的，企圖針对上述問題，提出我們的粗淺看法，希同志們指正。

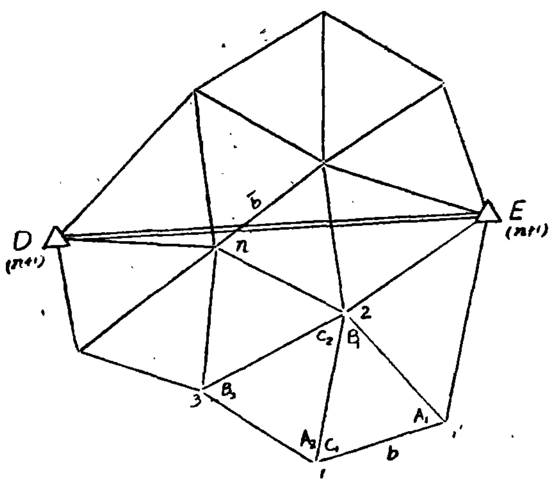
綫形鎖（網）准备用来作三、四等控制，故討論按角度平差進行；为了討論時的便利，圖形采用了理想的等边三角形；討論中沒有提及在綫形鎖（網）兩端測有定向角（連接角）時的情况。

本文的第二節——問題的解法 —— 是中國科学院測量制圖研究所周江文同志提出的。

華东地質局測繪大隊供給了綫形網的資料，我們表示感謝。

§2 問題的解法

（圖一）为聯設在高級點 D、E 間的綫形網，D、E 的位置已確定，設 $\overline{DE}=B$。網內不量基綫，亦不測方位角，这時 $\overline{DE}$ 就是網內唯一的起始边（后称大基綫），而網是自由網。



圖一

現在假設要求綫形網（圖一）中边長 b 的精度，为此必須列出由大基綫 B 推算 b 边精度的权函數式。由大基綫 B 直接列出 b 边的权函數式是复雜的，比較容易的列法是，我們設想起始边在 b，而反求 B 的精度，当不考慮基綫本身的誤差時，其所得的边長相对中誤差应該与以 B 为基綫推求 b 的相对中誤差完全相同。現說明如下：

設由 b 計算 B 的函數式为

$$b \cdot e = B \quad (1)$$

或

$$\ln b + \ln e = \ln B \quad (2)$$

e 称为傳算因數，它是观測角平差值的函數。当不顧及起始边的誤差時，由 B 求 b 的相对中誤差为

$$\frac{m_b}{b} = \frac{m_e}{e} \quad (3)$$

由 b 求 B，則亦有

$$\frac{m_B}{B} = \frac{m_e}{e} \quad (4)$$

由此，为了計算由 B 求 b 的精度，可以設想起始边为 b，列出推求 B 边精度的权函數 $\frac{dB}{B}$，求相对中誤差 $\frac{m_B}{B}$，这就是所求边 b 的相对中誤差 $\frac{m_b}{b}$

权函數 $\frac{d_B}{B}$ 如何作出，尚須詳細說明。为此，我們把边長 B 寫成兩端點縱橫坐标的函數

$$B^2=(X_E-X_D)^2+(Y_E-Y_D)^2$$

微分上式，得

$$d_B=\frac{X_E-X_D}{B}(dX_E-dX_D)+\frac{Y_E-Y_D}{B}(dy_E-dy_D) \qquad (5)$$

方程式的各項均除以大基綫的長度 B

$$\frac{dB}{B}=\frac{X_E-X_D}{B^2}(dX_E-dX_D)+\frac{Y_E-Y_D}{B^2}(dy_E-dy_D) \qquad (6)$$

至于將 dX、dy 表成观测值改正數的函數，一般教科書中已有詳細說明，这里僅以（圖一）中由 b 推 D 點的 dX_D、dy_D 为例，說明其作法。由 b 至 D 沿圖中矢綫方向，共經过 n 个三角形，各三角形頂點以 1、2、……n 表示，D 以 n+1 表示；圖中 A、B 为傳距角，C 为間隔角。由 1 推 n+1 時，得

$$\left.\begin{aligned}dX_D&=\sum_1^{n+1}(C_{Ai}U_{Ai}-C_{Bi}U_{Bi})\Delta X_{i,n+1}-\sum_1^{n+1}\Delta Y_{i,n+1}(\pm U_{ci})\\ dy_D&=\sum_1^{n+1}(C_{Ai}U_{Ai}-C_{Bi}U_{Bi})\Delta Y_{i,n+1}+\sum_1^{n+1}\Delta X_{i,n+1}(\pm U_{ci})\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

式中 C_A 和 C_B 分別代表 ctgA 和 ctgB，U_A、U_B、U_C 分別代表 A、B、C 角的改正數，各角均以弧度表示；U_{ci} 前的符号当間隔角 C_i 在推算路綫（圖一的矢綫）右側取正号，左側取負号。

同樣可以寫出由 b 推 E 點（由 1′ 推 (n+1)′）的 dX_E、dY_E。因起始边 b 作为无誤差，所以 1 和 1′ 點都可視为起始點。有了 dX_D、dy_D、dX_E、dy_E 代入（6）式即可得到权函數 $\frac{dB}{B}$。

又如在網內（圖一）求由 B 推算边長 $\overline{b}$ 的精度，仍可設想起始边为 b。設

$$\overline{b}\cdot E=B \qquad b\cdot e=B \qquad b\cdot\overline{e}=\overline{b} \qquad (8)$$

其中 E、e、$\overline{e}$ 分別为由 $\overline{b}$ 求 B、由 b 求 B、由 b 求 $\overline{b}$ 的傳算因數。由（8）式易得

$$\overline{e}\cdot E=e$$

或

$$E=\frac{e}{\overline{e}} \qquad (9)$$

取对數

$$\ln E=\ln e-\ln\overline{e}$$

微分得

$$\frac{dE}{E}=\frac{de}{e}-\frac{d\overline{e}}{\overline{e}} \qquad (10)$$

由（8）式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{m_e}{e}&=\frac{m_B}{B}\\ \frac{m_{\overline{e}}}{\overline{e}}&=\frac{m_{\overline{b}}}{\overline{b}}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\frac{de}{e}&=\frac{dB}{B}\\ \frac{d\overline{e}}{\overline{e}}&=\frac{d\overline{b}}{\overline{b}}\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

以（12）式代入（10）式，得由B推算$\overline{b}$的权函數式

$$\frac{dE}{E}=\frac{dB}{B}-\frac{d\overline{b}}{\overline{b}}\qquad(13)$$

其中$\frac{dB}{B}$已經作出（見(6)式）；而$\frac{d\overline{b}}{\overline{b}}$則是由起始边b推算边長$\overline{b}$的函數式，一般教科書中已有說明，这里寫出其最后的式子

$$\left.\begin{aligned}d\overline{b}&=\Sigma C_{Ai}U_{Ai}-\Sigma C_{Bi}U_{Bi}\\ \frac{d\overline{b}}{\overline{b}}&=\frac{\Sigma C_{Ai}U_{Ai}}{\overline{b}}-\frac{\Sigma C_{Bi}U_{Bi}}{\overline{b}}\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

A_i、B_i为由b推$\overline{b}$的傳距角。

§3 線形鎖中最强边与最弱边的精度

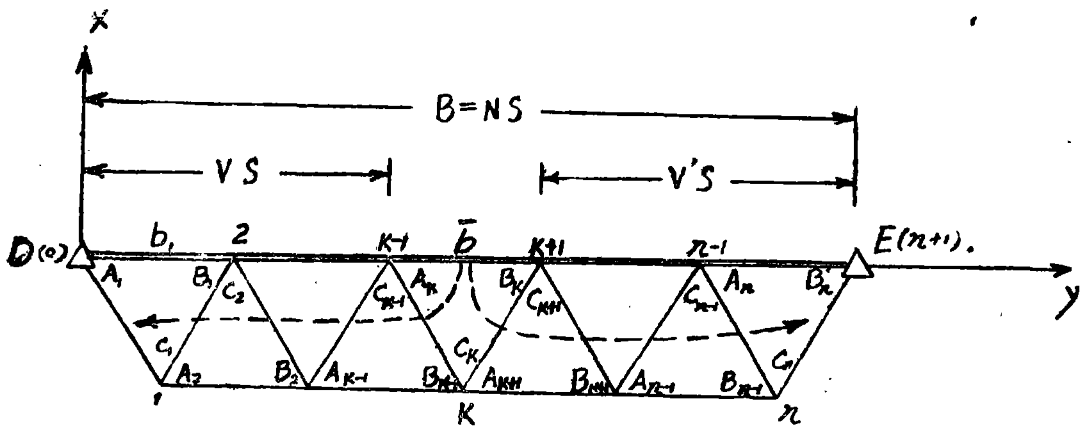


圖 二

在高級點D、E間敷設边長为S的等边三角形鎖，其間有n个三角形（奇數），D、E間的边數为N，則$n=2N-1$，$\overline{DE}=B=NS$；A、B为傳距角，C为間隔角，U_A、U_B、U_C分别表观测角A、B、C的改正數；三角形各頂點以0、1、……n+1名之。选定坐标軸如（圖二）所示。

（一）任意中間边$\overline{b}$的精度

照§2所述，求由B推$\overline{b}$之精度，可設起始边为$\overline{b}$，列权函數$\frac{dB}{B}$，求得的$\frac{m_B}{B}$即为$\frac{m_{\overline{b}}}{\overline{b}}$。由(5)式得

$$dB=\frac{\Delta X_{DE}}{B}(dX_E-dX_D)+\frac{\Delta Y_{DE}}{B}(dY_E-dY_B)$$

由（圖二）知，$\Delta X_{DE}=0$，上式第一項为零；$\Delta Y_{DE}=B$，則权函數式可寫成

$$F_{\overline{b}}=\frac{dB}{B}=\frac{1}{B}(dY_D-dY_D)\qquad(15)$$

$\overline{b}$为起始边，作为无誤差，由 K+1 點出發寫出 dY_E。由 K−1 點出發寫出dY_D。由k+1至E有V′个边，由K−1至D有V个边；N=V+V′+1。于是

$$dY_E=\sum_{k+1}^{n+1}(CU_{Ai}-CU_{Bi})\Delta Y_{i,n+1}+(CU_{Ak}-CU_{ck})\Delta Y_{k+1,n+1}+$$

$$+\sum_{k+1}^{n+1}(\pm U_{ci})\Delta X_{i,n+1}+(-U_{Bk})\Delta X_{k+1,n+1} \qquad (16)$$

$$dY_D=\sum_{k-1}^{0}(CU_{Bj}-CU_{Aj})\Delta Y_{j,o}+(CU_{Bk}-CU_{ck})\Delta Y_{k-1,o}+$$

$$+\sum_{k-1}^{0}(\pm U_{cj})\Delta X_{j,o}+U_{Ak}\Delta X_{k-1,o} \qquad (17)$$

式中$C=ctg60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=C_A=C_B$，$U_c$ 在推算路綫（矢綫）右側取正号，左側取負号，i 由 k+1，k+2，……到 n+1，j 由 k−1，k−2，……到 0。式中各座标差値为

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta Y_{k+1,n+1}=V'S & \Delta X_{k+1,n+1}=0\\ \Delta Y_{k+2,n+1}=(V'-\frac{1}{2})S & \Delta X_{k+2,n+1}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S\\ \Delta Y_{k+3,n+1}=(V'-\frac{2}{2})S & \Delta X_{k+3,n+1}=0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \Delta Y_{n,n+1}=\frac{1}{2}S & \Delta X_{n,n+1}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S\end{array}\right\} \qquad (18)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta Y_{k-1,o}=-VS & \Delta X_{k-1,o}=0\\ \Delta Y_{k-2,o}=-(V-\frac{1}{2})S & \Delta X_{k-2,o}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S\\ \Delta Y_{k-3,o}=-(V-\frac{2}{2})S & \Delta X_{k-3,o}=0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \Delta Y_{1,o}=-\frac{1}{2}S & \Delta X_{1,o}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S\end{array}\right\} \qquad (19)$$

顧及 B=NS 並將式（16）、（17）、（18）、（19）代入（15）式，即可寫出权函數式$F_{\overline{b}}$，其系數$f_{\overline{b}}$与条件方程式的系數一併列入表（一）。

按最小二乘法，条件观測平差中平差値函數的权倒數可按下式求之

$$\frac{1}{P}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}-\frac{[df\cdot3]^2}{[dd\cdot3]}\cdots\cdots \qquad (20)$$

其中 a、b、c 为条件方程式的系數，f 为权函數式的系數。

由表（一）可得：

$$[aa]=[bb\cdot1]=[cc\cdot2]=[dd\cdot3]=\cdots\cdots=+3$$

$$[af]=[cf\cdot2]\cdots\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2n}$$

$$[bf\cdot1]=[df\cdot3]\cdots\cdots=0$$

$$[ff]=\frac{1}{6N^2}\,\frac{8V^3+6V^2+V}{3}+\frac{1}{6N^2}\,\frac{8V'^3+6V'^2+V'}{3}$$

$$+\frac{1}{3N^2}\left\{V^2+V'^2+(V+V')^2\right\}+\left(\frac{3}{4N^2}\right)(V+V')$$

將这些系數代入（20）式得

$$\frac{1}{P_{\bar{b}}}=\frac{1}{P_{\frac{dB}{B}}}=\frac{4\left(V^{3}+V'^{3}\right)+6\left(V^{2}+V'^{2}\right)+5\left(V+V'\right)+3\left(V+V'\right)^{2}}{9N^{2}} \tag{21}$$

（21）式就是計算由B推任意中間边$\bar{b}$的权倒數值的公式。

由是，任意中間边$\bar{b}$的相对中誤差为

$$\frac{m_{\bar{b}}}{\bar{b}}=\mu\sqrt{\frac{1}{P_{\bar{b}}}}=\mu\sqrt{\frac{4\left(V^{3}+V'^{3}\right)+6\left(V^{2}+V'^{2}\right)+5\left(V+V'\right)+3\left(V+V'\right)^{2}}{9N^{2}}} \tag{22}$$

式中μ为單位权中誤差（測角中誤差）。

表（一）

三角形編号	角度編号	条件方程式										权函數		
		1	2	3		k−1	k	k−1		n−1	n	f_b	$f_{\bar{b}}$	f_γ
1	A	1										$(N-\frac{1}{2})\frac{C}{N}$	$-\frac{C}{2N}$	$-\frac{CV'}{NV}\frac{1}{2}$
	B	1										$-(N-\frac{1}{2})\frac{C}{N}$	$+\frac{C}{2N}$	$+\frac{CV'}{NV}\frac{1}{2}$
	C	1										$\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{V'}{NV}$
2	A		1									$(N-\frac{2}{2})\frac{C}{N}$	$-\frac{2}{2}\frac{C}{N}$	$-\frac{CV'}{NV}\frac{2}{2}$
	B		1									$-(N-\frac{2}{2})\frac{C}{N}$	$+\frac{2}{2}\frac{C}{N}$	$+\frac{CV'}{NV}\frac{2}{2}$
	C		1									0	0	0
3	A			1								$(N-\frac{3}{2})\frac{C}{N}$	$-\frac{3}{2}\frac{C}{N}$	$-\frac{CV'}{NV}\frac{3}{2}$
	B			1								$-(N-\frac{3}{2})\frac{C}{N}$	$+\frac{3}{2}\frac{C}{N}$	$+\frac{CV'}{NV}\frac{3}{2}$
	C			1								$\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{V'}{NV}$
⋮												⋮	⋮	⋮
k−1	A					1						$(N-\frac{k-1}{2})\frac{C}{N}$	$-V\frac{C}{N}$	$-\frac{CV'}{NV}(V-1)$
	B					1						$-(N-\frac{k-1}{2})\frac{C}{N}$	$+V\frac{C}{N}$	$+\frac{CV'}{NV}(V-1)$
	C					1						0	0	0

k	A						1					$(N-\frac{k}{2})\frac{C}{N}$	$+V'\frac{C}{N}$	$-\frac{CV'}{NV}(V-\frac{1}{2})$
	B						1					$-(N-\frac{k}{2})\frac{C}{N}$	$+V\frac{C}{N}$	$+\frac{CV'}{NV}(V-\frac{1}{2})$
	C						1					$\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$-(V+V')\frac{C}{N}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{V'}{NV}$
	A							1				$(N-\frac{k+1}{2})\frac{C}{N}$	$+V'\frac{C}{N}$	$-\frac{C}{N}V'$
k+1	B							1				$-(N-\frac{k+1}{2})\frac{C}{N}$	$-V'\frac{C}{N}$	$+\frac{C}{N}V'$
	C							1				0	0	0
⋮														
	A									1		$\frac{2}{2}\frac{C}{N}$	$+\frac{2}{2}\frac{C}{N}$	$-\frac{C}{N}\frac{2}{2}$
n−1	B									1		$-\frac{2}{2}\frac{C}{N}$	$-\frac{2}{2}\frac{C}{N}$	$+\frac{C}{N}\frac{2}{2}$
	C									1		0	0	0
	A										1	$\frac{1}{2}\frac{C}{N}$	$+\frac{1}{2}\frac{C}{N}$	$-\frac{C}{N}\frac{1}{2}$
n	B										1	$-\frac{1}{2}\frac{C}{N}$	$-\frac{1}{2}\frac{C}{N}$	$+\frac{C}{N}\frac{1}{2}$
	C										1	$\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2N}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2N}$

（二）最强边的精度

由（21）式可以看出，不同的中間边其精度是不同的。現在來討論，最强边和最弱边在綫形鎖中的分布情形。

最强边的精度最高，其权 $P_{\bar{b}}$ 最大。当 N 为定値時，其权 $P_{\bar{b}}$ 隨边数 V 变化。

由公式（21），当下式最小時，相应的 $P_{\bar{b}}$ 最大

$$Z=4(V^3+V'^3)+6(V^2+V'^2)+5(V+V')+3(V+V')^2$$

用 $V'=N-V-1$ 代入上式，求 Z 的最小值，使

$$\frac{dZ}{dV}=0$$

得 $$12N(V-V')=0$$

N 不能为零，則

$$V=V' \tag{23}$$

取二階導數

$$\frac{d^2Z}{dV^2}=24N>0$$

可知当 $V=V'$ 時，得 Z 的最小值。

就是說当 $V=V'$ 時，即 $\bar{b}$ 在中央時其权最大，由此得出結論：綫形鎖的最强边在鎖段的中央。从(21)式中 V 与 V′ 的对称性，可見边長从中央推向二端時精度逐漸降低，也就是說最弱边在鎖段的兩端。根据（21）式，設 $N=5$，V 分別等于 1，2，……5，計算 $\bar{b}$ 边的权倒數值并列入表（二）。

表（二） N＝5

V	0	1	2	3	4
$\frac{1}{P_{\bar{b}}}$	1.87	1.07	0.80	1.07	1.87

当 $V=V'$ 時，（21）式成为

$$\frac{1}{P_{\bar{b}}}=\frac{8V^3+24V^2+10V}{9N^2}=\frac{N^2+3N-4}{9N} \tag{24}$$

若用 $N=\frac{n+1}{2}$ 代入，則

$$\frac{1}{P_{\bar{b}}}=\frac{n^2+8n-9}{18(n+1)} \tag{25}$$

（24）与（25）兩式就是計算最强边（中央边）权倒數值的公式。

最强边的相对中誤差为

$$\frac{m_{\bar{b}}}{\bar{b}}=\mu\sqrt{\frac{N^2+3N-4}{9N}}=\frac{\mu}{3}\sqrt{N+3-\frac{4}{N}} \tag{26}$$

或

$$\frac{m_{\bar{b}}}{\bar{b}}=\mu\sqrt{\frac{n^2+8n-9}{18(n+1)}} \tag{27}$$

式中 N 为中間边的个數，n 为三角形的个數。

(3)最弱边的精度

当 $V=0$，$\bar{b}=b_1$（圖二），但 b_1 还不是最弱边，根据（二）的分析，最弱边应为 b。

为求最弱边 b 的精度，設起始边为 b，列出权函數 $\frac{dB}{B}$，求得的 $\frac{m_B}{B}$ 即为最弱边的相对中誤差 $\frac{m_b}{b}$。

仍由（5）式

$$dB=\frac{\Delta X_{DE}}{B}(dX_E-dK_D)+\frac{\Delta Y_{DE}}{B}(dY_E-dY_D)$$

由（圖二）可知，$\Delta X_{DE}=0$，$\Delta Y_{DE}=B$；又因 b 为起始边，D 及 1 作为起始點，所以 $dY_D=0$，这样（5）式可寫成

$$dB=dY_E \tag{28}$$

最弱边的权函數

$$F_b=\frac{dB}{B}=\frac{dY_E}{B} \tag{29}$$

由（7）式得

$$dY_E=\sum_1^{n+1}(CU_Ai-CU_Bi)\,\Delta Y_{i,n+1}+\sum_1^{n+1}(\pm U_Ci)\,\Delta X_{i,n+1} \tag{30}$$

式中 i 由 1，2，……到 n+1，各坐标差值为

$$\left.\begin{array}{ll}
\triangle Y_{1,n+1}=\left(N-\frac{1}{2}\right)S & \triangle X_{1,n+1}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S \\
\triangle Y_{2,n+1}=\left(N-\frac{2}{2}\right)S & \triangle X_{2,n+1}=0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\triangle Y_{K,n+1}=\left(N-\frac{k}{2}\right)S & \triangle X_{K,n+1}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\triangle Y_{n,n+1}=\frac{1}{2}S & \triangle X_{n,n+1}=+\frac{\sqrt{3}}{2}S
\end{array}\right\} \quad (31)$$

顧及 $B=NS$ 并將（30）、（31）兩式代入（29）式即得权函數式 F_b，其系數列于表（一）f_b 行。

由表（一）得

$$[aa]=[bb\cdot 1]=[cc\cdot 2]=[dd\cdot 3]=\cdots\cdots=+3$$

$$[af]=[cf\cdot 2]=\cdots\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2N}$$

$$[bf\cdot 1]=[df\cdot 3]=\cdots\cdots=0$$

$$[ff]=\frac{C^2}{12N^2}(2N)(2N-1)(4N-1)+\frac{3}{4N^2}N$$

將上列各數代入（20）式得

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{P_b}=\dfrac{4N^2-3N+5}{9N} \\
\text{或} \\
\dfrac{1}{P_b}=\dfrac{2n^2+n+9}{9(n+1)}
\end{array}\right\} \quad (32)$$

（32）就是計算最弱边 b 的权倒數值的公式。

仍令 $N=5$，算得 $\frac{1}{P_b}=2.00$，与表（二）的結果比較，可見最弱边为 b 是正確的。

最弱边 b 的相对中誤差

$$\frac{m_b}{b}=\mu\sqrt{\frac{4N^2-3N+5}{9N}}=\frac{\mu}{3}\sqrt{4N-3+\frac{5}{N}} \quad (33)$$

或

$$\frac{m_b}{b}=\mu\sqrt{\frac{2n^2+n+9}{9(n+1)}} \quad (34)$$

公式（33）、（34）即为一般文献中三角形單鎖鎖長的相对中誤差。

將式（24）和（32）作比較，可見当 N較大時，最强边（中央边）的权倒數值約为最弱边权倒數值的 $\frac{1}{4}$。

§4 線形鎖中的最大点位誤差

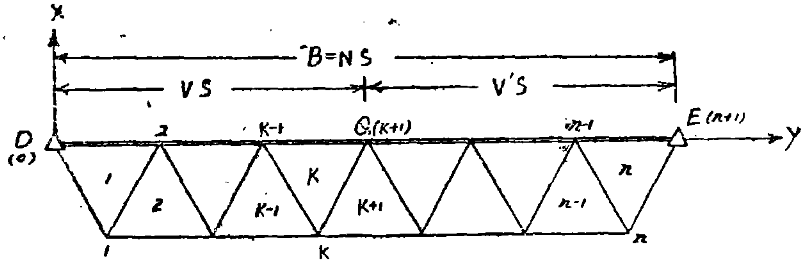


圖 三

(圖三)中，应用符号同前，求鎖中任意點的縱橫向誤差。設 DQ 間的边數为 V，QE 間的边數为V′。由 B 推算 Y_Q，按§2的(13)式，可設起始边为b，列出权函數

$$\frac{dE}{E}=\frac{dB}{B}-\frac{dY_Q}{Y_Q} \tag{35}$$

由此求得的 $\frac{m_E}{E}$，就是以B为起始边推算的 $\frac{m_{Y_Q}}{Y_Q}$。应当指出，这里的 Y_Q 即为長度 $\overline{DQ}$，因此适用§2的規則。

(35)式中

$$dY_Q=\sum_1^{k+1}(CU_{Ai}-CU_{Bi})\,\Delta Y_{i,K+1}+\sum_1^{k+1}(\pm U_{Ci})\,\Delta X_{i,K+1}$$

$\frac{dB}{B}$ 可按(29)式寫出。

將这些關系代入(35)式，并顧及 B=NS，Y_Q=VS，化簡后將权函數式的系數填入表(一)fy欄內。由表求得[ff]，[af]，[bf·1]……，[aa]，[bb·1]……，并代入(20)式，經过整理后得任意點Q的縱向相对誤差的权倒數为

$$\frac{1}{P_{\frac{dy_Q}{Y_Q}}}=\frac{4VV'^2+5V'}{9NV} \tag{36}$$

上式的右面乘以 V^2S^2，得任意點 Q 的縱向誤差的权倒數

$$\frac{1}{P_{yQ}}=\frac{4V^2V'^2+5VV'}{9N}S^2 \tag{37}$$

同理，我們可推出任意點 Q 的橫向誤差的权倒數

$$\frac{1}{P_{xQ}}=\frac{4V^2V'^2+5VV'}{9N}S^2 \tag{38}$$

由此，任意點點位誤差的权倒數为

$$\frac{1}{P_Q}=\frac{8V^2V'^2+10VV'}{9N}S^2 \tag{39}$$

为了求得最大的點位誤差，求 $\frac{1}{P_Q}$ 的最大值，亦即当N为定值時，

$$Z=8V^2V'^2+10VV'=\text{最大}$$

取上式的一階導數为零得

$$(16VV'+10)\ (V'-V)=0$$

V、V′是正整數，則

$$V=V' \tag{40}$$

而

$$\left(\frac{d^2Z}{dV^2}\right)_{V=V'}=-32V^2-20<0$$

可見当$V=V'=\frac{N}{2}$（N偶數）時，Z得最大值，即中央點點位誤差最大。

根据（39）式，令$N=6$，$S=1$；V分別等于0，1，……6，計算任意點Q的點位誤差的权倒數值，并列入表（三）。

表（三）

V	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{P_Q}$	0	4.6	11.0	13.7	11.0	4.6	0

当$V=V'$時，按（37）、（38）、（39）式得

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_{yQ}}&=\frac{1}{P_{xQ}}=\frac{N^3+5N}{36}S^2\\ \frac{1}{P_Q}&=\frac{N^3+5N}{18}S^2\end{aligned}\right\}^{*} \tag{41}$$

这就是綫形鎖中計算最大（中央點）點位誤差的权倒數值的公式。

最大點位誤差

$$m_Q=\mu S\sqrt{\frac{N^3+5N}{18}} \tag{42}$$

根据國家三、四等三角的要求，令$S=4$公里，$\mu=\pm2.''5$或$S=6$公里，$\mu=\pm1.''8$，計算最大點位誤差，其結果为

	n＝5 N＝3	n＝7 N＝4	n＝9 N＝5
$\frac{1}{P_Q}$	$2.3S^2$	$4.7S^2$	$8.3S^2$
m_Q	m 0.07	m 0.11	m 0.14

这个精度还是滿意的。

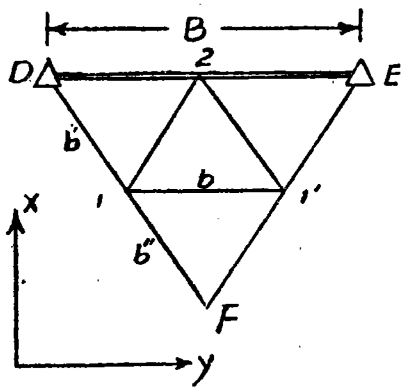
---

*这个公式和測繪通報三卷三期“綫形鎖精度”一文中的（22）式相同。

§5　綫形网的精度

敷設在二个高級三角點間的綫形網是一种好的加密方案。特别是，目前各生產單位通常采用單級布網法，綫形網就是一种有利的方案。本節僅用几种理想圖形来簡單地說明綫形網可能達到的精度和網內精度分布的情况。

（一）四个三角形



图四

（圖四），在高級三角點 DE 間敷設四个等边三角形的綫形網，此網僅有四个圖形条件。

我們要求：1）由B推b的权倒數值；2）由B推b′的权倒數值；3）由B推$\overline{DF}$的权倒數值。

1）求由B推b的权倒數值如§2所述，欲求由B推b的精度，可設起始边为b而求$\frac{m_B}{B}$，引用前述的各种符号，权函數式可寫成

$$F_b=\frac{dY_E-dY_D}{B} \tag{43}$$

求得b边的权倒數值

$$\frac{1}{P_b}=\frac{5}{6} \tag{44}$$

这里三角形11′F不起作用，因此这就是綫形鎖中由B推b的权倒數值。

2）求由B推b′的权倒數值，按（32）式当N＝2時的权倒數值为

$$\frac{1}{P_{b'}}=\frac{5}{6} \tag{45}$$

3）求由B推$\overline{DF}$的权倒數值　按前述，仍設起始边为b，权函數式可寫成

$$F_{\overline{DF}}=\frac{dB}{B}-\frac{d\,\overline{DF}}{\overline{DF}} \tag{46}$$

式中$\frac{dB}{B}$已在前面推出，而

$$d_{\overline{DF}}=db'+db''$$

或

$$\frac{d_{\overline{DF}}}{\overline{DF}}=\frac{1}{2}\left(\frac{db'}{b'}+\frac{db''}{b''}\right)$$

此后求得由B推$\overline{DF}$的权倒數值

$$\frac{1}{P_{\overline{DF}}}=\frac{2}{3} \tag{47}$$

如果由大三角形DEF直接傳算$\overline{DF}$的权倒數值，一般文献中已有証明，它是等于$\frac{2}{3}$可見$\overline{DF}$的精度經四个三角形傳算，与經一个大三角形傳算完全相同。

比較（44）及（45）式，可知 b′ 与 b 的精度相同。

（二）九个三角形

（圖五），在高級三角點 D·E 間敷設九个等边三角形的綫形網，它由二重鎖組成。此網除九个圖形条件外，倘有以點 2 为極的圓周条件和極条件。

我們要求：(1)由 B 推 b 的权倒數値；(2)由 $\overline{b}$ 推 b 的权倒數値；(3)由 B 推 b′的权倒數値；(4)由 B 推 $\overline{b}$ 的权倒數値；(5)由 B 推 $\overline{DF}$ 的权倒數値。

(1)由 B 推 b 的权倒數値

$$\frac{1}{P_b}=\frac{35}{27}\approx\frac{4}{3} \tag{48}$$

(2)由 $\overline{b}$ 推 b 的权倒數値

$$\frac{1}{P_{b1}}=\frac{5}{3} \tag{49}$$

(3)由 B 推 b′ 的权倒數値

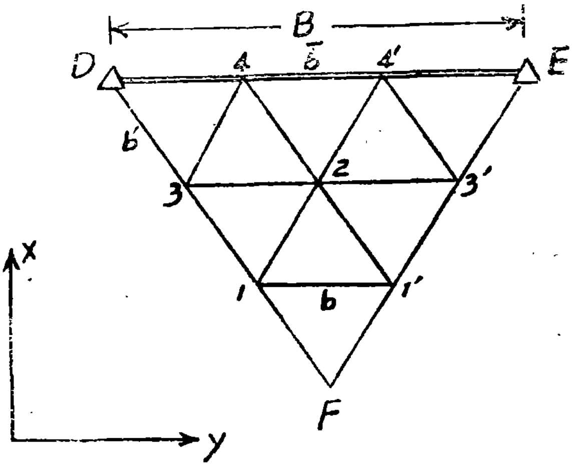
$$\frac{1}{P_{b'}}=\frac{26}{27} \tag{50}$$

(4)由 B 推 $\overline{b}$ 的权倒數値

$$\frac{1}{P_{\overline{b}}}=\frac{14}{27}\approx\frac{1}{2} \tag{51}$$

(5)由 B 推 $\overline{DF}$ 的权倒數値

$$\frac{1}{P_{\overline{DF}}}=\frac{2}{3} \tag{52}$$



图五

比較上列結果可知，边長精度最佳处在 $\overline{DE}$ 之中央，离 $\overline{DE}$ 愈远，精度愈低，如 b 边的精度就比 b′ 的精度低。

比較（43）及（49）式，可見大基綫优于短基綫。（49）式求得的就是中點六边形中离 $\overline{b}$ 最远边的权倒數値。

比較（52）及(47)式，可知 $\overline{DF}$ 經一个大三角形的傳遞与經过九个小三角形的傳遞其边長精度相同。

（三）十六个三角形

（圖六），在高級三角點 D、E 間敷設十六个等边三角形的綫形網，它由三重鎖組成。此网除了十六个圖形条件外，倘有以 2、4 及 4′ 为極的三个圓周条件及三个極条件。

我們要求：(1)由B推b的权倒數値；(2)由B推 $\overline{DF}$ 的权倒數値。

(1)由 B 推 b 的权倒數値

$$\frac{1}{P_b}=\frac{34}{21}\approx\frac{5}{3} \tag{53}$$

(2)由B推 $\overline{DF}$ 的权倒數値

$$\frac{1}{P_{\overline{DF}}}=\frac{11}{12} \tag{54}$$

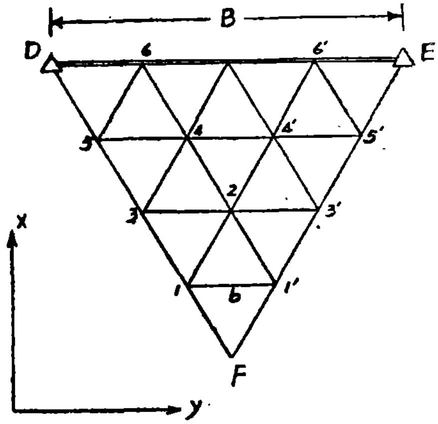


圖 六

比較（44）、（48）及（53）式，可知綫形網層次增多，离大基綫$\overline{DE}$最远边的边長精度逐漸降低，但降低得很緩慢。

比較（47）、（50）及（54）式，可知隨着三角形个數增多，由大三角形傳遞$\overline{DF}$的边長精度比小三角形傳遞的边長精度要高，但相差不大。

§6 綫形鎖(网)作为等級控制时三角形的个数

利用上面已經導出的公式，進一步討論以綫形鎖（網）作为國家或城市三、四等加密網時，三角形的容許个數。

網的布置及观測精度根据國家規范* 及城市規范 ** 規定：三等三角網的測角中誤差为±1.″8，平均边長为8公里；四等三角網的測角中誤差为±2.″5，平均边長为2－6公里（城市为2－5公里）。

（一）綫形鎖

按公式（32），当三角形个數n分别为5、7、9、11時，用三、四等三角的測角精度，計算最弱边的相对中誤差并列入表（四）及表（五）。

表（四）　　　$\mu=\pm1.''8$

	n=5 N=3	n=7 N=4	n=9 N=5	n=11 N=6
$\frac{1}{Pb}$	1.2	1.6	2.0	2.4
$\frac{mb}{b}$	$\frac{1}{104000}$	$\frac{1}{91000}$	$\frac{1}{81000}$	$\frac{1}{74000}$

表（五）　　　$\mu=\pm2.''5$

$\frac{mb}{b}$	$\frac{1}{75000}$	$\frac{1}{65000}$	$\frac{1}{58000}$	$\frac{1}{53000}$

上表所列數据說明，綫形鎖的精度是相当理想的。根据城市規范規定：三角鎖（網）最弱边的相对誤差，三等要求$\frac{1}{80000}$；四等要求$\frac{1}{55000}$（國家規范沒有規定，它們的精度是相应的）。这样从表（四）及表（五）中可以看出，当三角形个數不超过九个時边長精度可以滿足規范要求。

（二）綫形網

按§5計算得的最弱边（离大基綫$\overline{DE}$最远的边）的权倒數值，用三、四等三角的測角精度，換算成边相对中誤差，其値列于表（六）。

---

* 國家測繪總局，總参測繪局：一二三四等三角測量細則，1958。

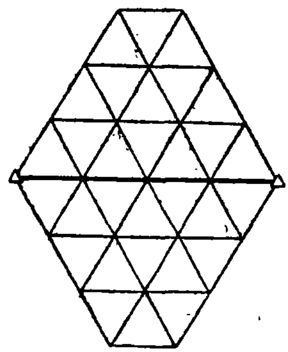
** 建筑工程部．城市測量規范，1959。

表（六）

	$\frac{1}{Pb}$	$\frac{m_b}{b}$（$\mu=\pm1.''8$）	$\frac{m_b}{b}$（$\mu=\pm2.''5$）
四 个 三 角 形	0.83	$\frac{1}{126000}$	$\frac{1}{91000}$
九 个 三 角 形	1.33	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{72000}$
十 六 个 三 角 形	1.67	$\frac{1}{88000}$	$\frac{1}{63000}$

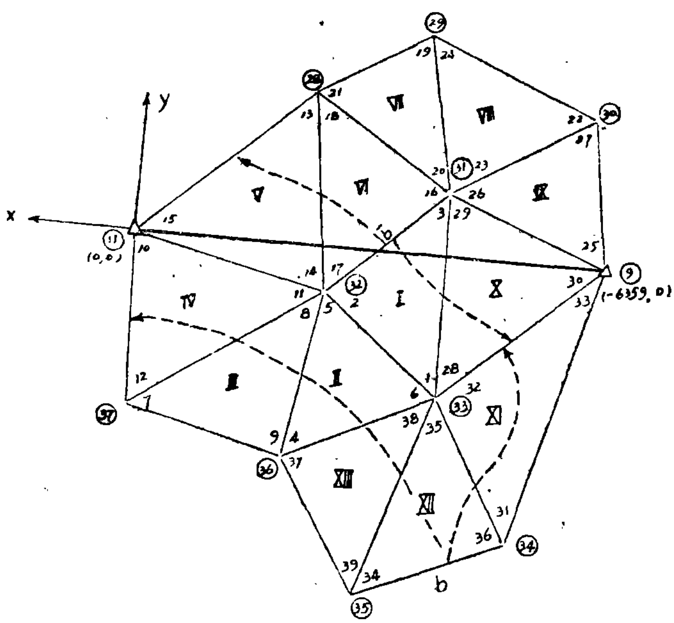
表（六）的結果說明，在大基綫一边布置十六个三角形（三重鎖）時，边長精度可以滿足規范要求。也就是說当大基綫在中央，上下各用三重鎖，見（圖七），可以滿足三、四等三角的边長精度要求。

最后应当指出：上述結論是根据理想圖形得出的，在实际作业時，当然不会有这样的圖形，由于規范中規定了三角形的角度不得不小于30°，故实际的精度不会与上述結論差得太远，上述結論可作參考。



圖七

§7 算　例



圖八

（圖八）为華东地質局在某地布置的控制網，⑨与⑪为三等三角點，其它皆为四等三角點。網內$\overline{⑨-⑪}$为起始边，我們来求最远边b及中央边$\bar{b}$的精度。

为了計算的便利，采用（圖八）所示的座标系統，已知$\overline{⑨-⑪}$的近似長度为6359公尺。求得各點的近似座标（公尺）为：

點	⑨	⑪	㉘	㉛	㉜	㉝	㉞	㉟	㊱	㊲
x	−6539	0	−2277	−4167	−2675	−4223	−5332	−3316	−2208	−78
y	0	0	+2021	+823	−566	−1896	−3823	−4613	−2879	−2308

推求最远边 b 的精度時，以 b 为起始边，由點㉞及㉟出發，分别算出點⑨与點⑪的座标誤差 dx_9 及 dx_{11}，而权函數式为

$$F_{\overline{b}}=dx_9-dx_{11}$$

同样，推求中央边 $\overline{b}$ 的精度時，以 $\overline{b}$ 为起始边，由點㉛及㉜出發，分别算出點⑨与點⑪的座标誤差 dx_9 及 dx_{11}，而权函數式为

$$F_{\overline{b}}=dx'_9-dx'_{11}$$

其中：

$$dx_n=\sum_{1}^{n-1}(ctgA_iU_{a_i}-ctgB_iU_{b_i})\triangle X_{i,n}-\sum_{1}^{n-1}(\pm U_{C_i})\triangle y_{i,n}$$

dx 中系數的計算按表（七）進行，权函數 F_b 及 $F_{\overline{b}}$ 的系數列于表（八）。

表　　（七）

三角形編号	間隔角頂點	x (公里)	y (公里)	x_n-x_i	y_n-y_i	CtgA	−CtgB	权函數式的系數 U_A	$(y_n-x_i)ctg_A$	U_B	$-(x_n-x_i)ctg_B$	U_C	$-(\pm1)(y_n-y_i)$
								由 B 推 b 的权函數 F_b			dx_9		
XII	㉞	−5.33	−3.82	−1.03	+3.82	+0.833	−0.887	v_{34}	−0.858	v_{35}	+0.914	$+v_{36}$	−3.82
XI	㉝	−4.22	−1.90	−2.14	+1.90	+1.000	−0.660	v_{31}	−2.140	v_{33}	+1.412	$-v_{32}$	+1.90
	⑨	−6.36	0	0	0								
											dx_{11}		
XII	㉟	−3.32	−4.61	+3.32	+4.61	+0.152	−0.887	v_{36}	+0.505	v_{35}	−2.945	$-v_{34}$	+4.61
XIII	㉝	−4.22	−1.90	+4.22	+1.90	+0.809	−0.115	v_{39}	+3.414	v_{37}	−0.485	$+v_{38}$	−1.90
II	㊱	−2.21	−2.88	+2.21	+2.88	+0.431	−0.561	v_6	+0.953	v_5	−1.240	$-v_4$	+2.88
III	㉜	−2.68	−0.57	+2.68	+0.57	+0.063	−0.873	v_9	+0.170	v_7	−2.340	$+v_8$	−0.57
IV	㊲	−0.08	−2.31	+0.08	+2.31	+0.972	−0.247	v_{11}	+0.078	v_{10}	−0.120	$-v_{12}$	+2.31
	⑪	0	0	0	0								
								由 B 推 $\overline{b}$ 的权函數 $F_{\overline{b}}$			dx'_9		
I	㉛	−4.17	+0.82	−2.19	−0.82	+0.112	−0.896	v_2	−0.245	v_1	+1.962	$-v_3$	−0.823
X	㉝	−4.22	−1.90	−2.14	+1.90	+0.399	−0.528	v_{29}	−0.854	v_{30}	+1.130	$+v_{28}$	−1.896
	⑨	−6.36	0										
											bx'_{11}		
VI	㉜	−2.68	−0.57	+2.68	+0.57	+0.262	−0.873	v_{16}	+0.702	v_{18}	−2.340	$-v_{17}$	+0.566
V	㉘	−2.28	+2.02	+2.28	−2.02	+0.378	−0.739	v_{14}	+0.862	v_{15}	−1.685	$+v_{13}$	+2.021
	⑪	0	0										

应用分組平差解算函數的权倒數值，第一組为圖形条件方程式，第二組为圓周条件及極条件方程式。改化后第二組条件式及权函數式的系數列于表（八）的 A、B、C、D、E、G 及 f_b'、$f'_{\bar{b}}$ 欄。

表（八）

三角形编号	角度编号	圓周条件 A ㉜	B ㉛	C ㉝	極条件 D ㉜	E ㉛	G ㉝	权函數 F_b f_b	f'_b	权函數 $F_{\bar{b}}$ $f_{\bar{b}}$	$f'_{\bar{b}}$
Ⅰ	1	−0.333	−0.333	+0.666	+1.887	−1.340	−0.547			+1.962	+1.664
	2	+0.666	−0.333	−0.333	−0.003	+0.790	−0.787			−0.245	−0.543
	3	−0.333	+0.666	−0.333	−1.884	+0.550	+1.334			−0.823	−1.121
Ⅱ	4	−0.333		−0.333	+1.377		−1.466	−2.880	−2.016		
	5	+0.666		−0.333	−0.233		+1.323	+1.240	+2.104		
	6	−0.333		+0.666	−1.144		+0.143	−0.953	−0.088		
Ⅲ	7	−0.333			+1.287			+2.340	+1.427		
	8	+0.666			−0.543			+0.570	−0.343		
	9	−0.333			−0.744			−0.170	−1.084		
Ⅳ	10	−0.333			+0.783			+0.120	+0.876		
	11	+0.666			+0.263			−0.078	+0.678		
	12	−0.333			−1.046			−2.310	−1.554		
Ⅴ	13	−0.333			+1.427					−2.021	−1.621
	14	+0.666			+0.067					−0.862	−0.463
	15	−0.333			−1.494					+1.685	−2.084
Ⅵ	16	−0.333	+0.666		+0.977	−0.133				−0.702	−1.059
	17	+0.666	−0.333		+0.427	−1.563				−0.566	−0.923
	18	−0.333	−0.333		−1.404	+1.696				+2.340	+1.982
Ⅶ	19		−0.333			+0.853					
	20		+0.666			+0.083					
	21		−0.333			−0.936					
Ⅷ	22		−0.333			+1.513					
	23		+0.666			−0.087					
	24		−0.333			−1.426					
Ⅸ	25		−0.333			+1.063					
	26		+0.666			−0.057					
	27		−0.333			−1.006					
Ⅹ	28		−0.333	+0.666		+1.570	−0.090			−1.896	−1.356
	29		+0.666	−0.333		−0.230	−0.930			−0.854	−0.314
	30		−0.333	−0.333		−1.340	+1.020			+1.130	+1.670

	31			−0.333			+2.463	−2.140	−2.531		
XI	32			+0.666			+0.363	+1.900	+1.509		
	33			−0.333			−2.826	+1.412	+1.022		
	34			−0.333			+1.273	−5.468	−3.490		
XII	35			+0.666			−0.477	+3.859	+5.837		
	36			−0.333			−0.796	−4.325	−2.347		
	37			−0.333			+0.730	+0.485	+0.828		
XIII	38			+0.666			+0.490	+1.900	+2.243		
	39			−0.333			−1.220	−3.414	−3.071		

由表（八）求得

$[AA]=+4.000$　　$[BB\cdot1]=+3889$　　$[CC\cdot2]=+3.733$

$[DD\cdot3]=+21.723$　　$[EE\cdot4]=+18.210$　　$[GG\cdot5]=+25.450$

$[Af_b']=+2.436$　　$[Bf_b'\cdot1]=+0.406$　　$[Cf_b'\cdot2]=+0.978$

$[Df_b'\cdot3]=+0.774$　　$[Ef_b'\cdot4]=+0.443$　　$[Gf_b'\cdot5]=-3.258$

$[f'_bf'_b]=+92.104$

由此求得最远边b的权倒數値

$$\frac{1}{P_b}=63.45$$

按相对誤差計算

$$\frac{1}{P_b}=1.57$$

由平差結果，求得此三角網的測角中誤差为±1.″09，于是最远边的相对中誤差为

$$\frac{m_b}{b}=\frac{1}{151000}$$

若測角中誤差为±1.″8或±2.″5，求得相应的$\frac{m_b}{b}$为$\frac{1}{91000}$或$\frac{1}{65000}$滿足三、四等三角的規范要求。

原机關曾把中央边$\overline{b}$視作基綫以推求b的精度，結果为$\frac{1}{133000}$，說明用大基綫推得b边的精度較佳，另外还說明用中央边作为基綫推求网內某边的精度与以大綫基推求該边的精度相近。

仍由表（八）得

$[Af'_{\bar{b}}] = -1.927$　　$[Bf'_{\bar{b}} \cdot 1] = -2.812$　　$[Cf'_{\bar{b}} \cdot 2] = -0.576$

$[Df'_{\bar{b}} \cdot 3] = -4.999$　　$[Ef'_{\bar{b}} \cdot 4] = -4.541$　　$[Df'_{\bar{b}} \cdot 5] = -1.146$

$[f'_{\bar{b}} f'_{\bar{b}}] = +22.133$

由此得中央边$\bar{b}$的权倒數値

$$\frac{1}{P_{\bar{b}}} = 16.75$$

按相对誤差計算

$$\frac{1}{P_{\bar{b}}} = 0.415$$

于是中央边的相对中誤差为

$$\frac{m_{\bar{b}}}{\bar{b}} = \frac{1}{294000}$$

算例說明綫形網的精度是相当好的。

§8 結　語

从上面的討論，我們提出下列几點作为本文的結語。

（一）在兩个高級三角點間敷設的綫形鎖（網），是一种好的加密方案，而綫形網作为城市局部地區的布網方案是値得考慮采用的。綫形鎖（網）的特點在于不需量基綫，不測方位角，布網灵活方便，精度分布均匀。

（二）綫形鎖的最强边在鎖段中央，最弱边为鎖段兩端的測边，中央點的點位誤差最大；綫形網的最弱边在离開中央边的最远处。

（三）近似估算綫形鎖最弱边的相对誤差及最大點位誤差，可以根据§3、4中推出的公式進行。对于綫形網可以假定中央边为基綫（如圖八的$\bar{b}$），用一般三角测量圖形权倒數估算公式估算其精度。

（四）綫形鎖（網）与相鄰高級三角點相距較远時，可以作为國家及城市局部地區的三、四等加密控制，此時与相鄰高級三角點不加連系（若附近有高級三角點時，最好与一點相連而成附合網——本文不討論）。§6中各表的數据——三角形的容許个數，作为布網時的參考。

（五）当綫形鎖（网）作为等級控制時，应当采用嚴密平差。要計算最远边b的相对誤差，可設b为起始边，按§2的方法列出权函數式，与介算法方程式的同時計算此函數的权倒數値，从而求得最远边b的相对中誤差。

（六）綫形鎖（网）同样是加密圖根控制的好方案，应当优先采用。平差可采用簡略的近似方法。