

# UKF 滤波器性能分析及其在 轨道计算中的仿真试验

蔡志武<sup>1</sup> 赵东明<sup>1</sup>

(1 信息工程大学测绘学院 郑州市陇海中路 66 号, 450052)

**摘 要:** 讨论了 UT (unscented transform) 变换的性质, 给出了一种新的扩展型卡尔曼滤波器 UKF (unscented Kalman filter), 它不仅具有较高的精度, 而且不必计算偏导数阵。仿真分析的结果表明, UKF 有良好的状态估计性能, 使用简便, 适合于非线性系统状态估计。  
**关键词:** 卡尔曼滤波; 扩展变换; 扩展卡尔曼滤波  
**中图法分类号:** P228

卡尔曼滤波在线性情况下计算动力系统状态和观测向量的最优预测量, 可看作一种把高斯型随机变量通过线性动力系统解析传播的高效方法。对于非线性模型, 扩展卡尔曼滤波 (unscented Kalman filter, UKF) 首先对非线性系统进行一阶线性化, 从而对高斯型随机变量进行传播, 然后逼近真实的状态分布<sup>[1]</sup>。因此, EKF (extended Kalman filter) 中提供的仅仅是一阶逼近结果 (尽管二阶 EKF 存在, 但其计算复杂性使其很难实用<sup>[2]</sup>)。这种逼近结果可能会为变换后的真实后验均值和协方差带来较大的误差, 并导致次优的性能和滤波的发散。本文通过一种新颖的逼近算法即 UT 算法, 可以较好地克服 EKF 的不足, 由此得到的改进型 UKF 算法较 EKF 方便, 并更易于实现。

## 1 UKF 滤波器

UKF 通过一种更精确的方式实现对状态分布的逼近, 其中代表状态分布的高斯型随机变量是通过一个特定的最小样本点集确定的。这些样本点包含了高斯型随机变量的均值和协方差信息, 而且不管非线性的程度如何, 都能在实际的非线性系统传播时, 精确地获取直到第三阶 (Taylor 级数展开) 的后验均值和协方差。这个最小的样本点 (称为 Sigma 点) 集是通过 UT 变换算法<sup>[3-5]</sup>

获得的。

### 1.1 UT 变换算法

UT 变换是一种计算随机变量在经历非线性变换后的统计特性的方法<sup>[4]</sup>。通过一个非线性函数  $y = f(x)$ , 对随机变量  $x$  (维数为  $L$ ) 进行传播。假设  $x$  具有均值  $\bar{x}$  与协方差  $P_x$ , 为了计算观测值  $y$  的统计特性, 首先根据式

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x} \\ x_i &= \bar{x} + (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_i, i = 1, \dots, L \\ x_i &= \bar{x} - (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_{i-L}, i = L + 1, \dots, 2L \end{aligned} \tag{1}$$

构成一个由  $2L + 1$  个向量  $x_i$  (称为 Sigma 点) 组成的矩阵  $x$ 。其中,  $\lambda = \alpha^2 (L + \kappa) - L$ ,  $\lambda$  是一个尺度参数, 常数  $\alpha$  决定这些向量点在  $\bar{x}$  附近的扩展范围, 通常取一个很小的正值,  $\kappa$  是另一个尺度参数;  $(\sqrt{(L + \lambda)P_x})_i$  是矩阵平方根的第  $i$  列, 矩阵的平方根可通过下三角乔累斯基分解等算法获得。对上式所获得的向量点通过下面的非线性函数进行传播:

$$Y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, 2L \tag{2}$$

通过式 (2) 获得变换后的向量点  $Y_i$ , 然后利用其加权的样本均值和协方差逼近  $y$  的均值和协方差:

$$\bar{y} \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} Y_i \tag{3}$$

$$P_y \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left\{ (Y_i - \bar{y})(Y_i - \bar{y})^T \right\} \quad (4)$$

其中, 权  $W_i$  由下式给出:

$$\begin{aligned} W_0^{(m)} &= \lambda / (L + \lambda) \\ W_0^{(c)} &= \lambda / (L + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1 / \{ 2(L + \lambda) \}, i = 1, 2, \dots, 2L \end{aligned} \quad (5)$$

参数  $\beta$  包含  $x$  分布的先验信息。

进一步的分析<sup>[5,8]</sup>表明, UT 变换后的均值与非线性变换后真实均值的差别仅在三阶以上的高阶项中。通过 UT 变换获得的协方差与非线性变换后的真实协方差符合较好, 引入的误差包含在四阶以上的高阶矩中。这说明, 与线性化的做法

$$\bar{y}_{LIN} = f(\bar{x}) \quad (6)$$

$$(P_y)_{LIN} = A_x P_x A_x^T \quad (7)$$

相比, UT 变换所得的结果更加接近真实的均值和协方差, UT 变换算法具有更好的统计特性, 经 UT 变换后的函数均值可达三阶精度, 协方差可达四阶精度。

1.2 UKF 算法

在 EKF 中需要计算雅可比矩阵, 对于受摄轨道计算来说, 状态转换矩阵或敏感矩阵的计算是非常复杂的, 通常需要解变分方程。在 UKF 算法的实现中, 不需要计算雅可比矩阵, 只需通过 UT 变换获得预测点的期望和方差, 计算简便。

UT 变换具有良好的期望及方差传递特性, 将 UT 变换算法应用到递归估计中就得到了 UKF 滤波方法。标准的 UKF 计算流程如下。

1) 初始化

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= E[x_0] \\ P_0 &= E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \\ k &\in \{1, \dots, \infty\} \end{aligned}$$

2) 计算 Sigma 点

$$\begin{aligned} X_{k-1} &= [\hat{x}_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \sqrt{(d_x + \lambda) P_{k-1}} \hat{x}_{k-1} \\ &\quad - \sqrt{(d_x + \lambda) P_{k-1}}] \end{aligned}$$

3) 预测

$$\begin{aligned} X_{k|k-1}^* &= F[X_{k-1}, u_{k-1}] \\ \hat{x}_k^- &= \sum_{i=0}^{2d_x} W_i^{(m)} X_{i,k|k-1}^* \\ P_k^- &= \sum_{i=0}^{2d_x} W_i^{(c)} [X_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-] \cdot \\ &\quad [X_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-]^T + R^v \\ X_{k|k-1} &= [\hat{x}_k^- \hat{x}_k^- + \sqrt{(d_x + \lambda) P_k^-} \hat{x}_k^- \\ &\quad - \sqrt{(d_x + \lambda) P_k^-}] \\ Y_{k|k-1} &= H[X_{k|k-1}] \end{aligned}$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2d_x} W_i^{(m)} Y_{i,k|k-1}$$

4) 改正

$$\begin{aligned} P_{y\hat{y}} &= \sum_{i=0}^{2d_x} W_i^{(c)} [Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-] \cdot \\ &\quad [Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-]^T + R^n \\ P_{x\hat{y}} &= \sum_{i=0}^{2d_x} W_i^{(c)} [X_{i,k|k-1} - \hat{x}_k^-] \cdot \\ &\quad [Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-]^T \\ K_k &= P_{x\hat{y}} P_{y\hat{y}}^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k^-) \\ P_k &= P_k^- - K_k P_{y\hat{y}} K_k^T \end{aligned}$$

其中,  $\lambda$  是复合尺度参数;  $d_x$  是状态向量的维数;  $R^v$  是过程噪声协方差矩阵;  $R^n$  是测量噪声协方差矩阵;  $W_i$  是按照式(5)计算的权。

2 仿真试验

以低轨卫星为目标, 从地面站对其进行水平角、高度角及距离观测。为简化计算, 卫星的轨道摄动仅考虑二阶带谐项摄动和大气阻力摄动。卫星“真实”星历通过 DE 算法<sup>[5]</sup> 积分得到, 观测数据根据真实星历与已知的测站坐标来模拟。

取 J2000 为空间参考系, TT 为时间参考系, 依据卫星的动力学性质, 卫星运动的状态空间模型可描述如下。

状态矢量:

$$y(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

动力模型:

$$y(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ a_0(t) + a_{J_2}(t) + a_{DRG}(t) \end{bmatrix} + w'(t)$$

状态预测:

$$\bar{y}_{k+1} = y_k^* + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} v(t) \\ a_0(t) + a_{J_2}(t) + a_{DRG}(t) \end{bmatrix} dt + w_k$$

其中,  $r(t)$  为位置矢量;  $v(t)$  为速度矢量;  $a_0$  为地球中心引力加速度;  $a_{J_2}$  为地球非球形引力  $J_2$  项摄动加速度;  $a_{DRG}$  为大气阻力;  $w'(t)$  为力学噪声;  $w_k$  为状态噪声。

由于观测在站心地平系下进行, 因此首先需要将 J2000 下的卫星坐标转换到当地地平系下, 不考虑光行差、大气折射等微小项修正, 则系统的测量模型可描述为:

$$\begin{aligned} S &= [S_E \ S_N \ S_Z]^T \\ A &= \arctan \left( \frac{S_E}{S_N} \right) + v_A \end{aligned}$$

$$E = \arctan \left( \frac{S_z}{\sqrt{S_E^2 + S_N^2}} \right) + v_E$$
$$\rho = \sqrt{S_E^2 + S_N^2 + S_z^2} + v_\rho$$

其中,  $S$  为地平系坐标;  $A$  为方位角;  $E$  为高度角;  $\rho$  为距离;  $S_E$  为东向轴的坐标分量;  $S_N$  为北向轴的坐标分量;  $S_z$  为天顶轴的坐标分量;  $v_A$  为方位角的测量噪声;  $v_E$  为高度角的测量噪声;  $v_\rho$  为距离量的观测噪声。

设作为真值的精确估计为:

$$y_0 = \begin{bmatrix} -6\,345.000\,\text{E}3 \\ -3\,723.000\,\text{E}3 \\ -580.000\,\text{E}3 \\ +2.169\,000\,\text{E}3 \\ -9.266\,000\,\text{E}3 \\ -1.079\,000\,\text{E}3 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\text{E}-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\text{E}-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\text{E}-6 \end{bmatrix}$$

滤波的初始值为:

$$y_0^* = \begin{bmatrix} -6\,345.000\,\text{E}3 + 100 \\ -3\,723.000\,\text{E}3 - 100 \\ -580.000\,\text{E}3 + 100 \\ +2.169\,000\,\text{E}3 - 0.1 \\ -9.266\,000\,\text{E}3 + 0.1 \\ -1.079\,000\,\text{E}3 - 0.1 \end{bmatrix}$$

$$P_0^* = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

起始观测历元为 UTC1999 年 3 月 1 日 00 时 00 分 00 秒, 观测频率为 1 Hz, 观测误差为  $\sigma_A = 0.01^\circ \times \cos(E)$ ,  $\sigma_E = 0.01^\circ$ ,  $\sigma_\rho = 1\text{ m}$ 。取观测数据 100 组, 分别用 UKF 和 EKF 进行滤波计算, 定轨结果如图 1、图 2 所示。

由图 1、图 2 可见, 在该滤波计算中, 结果精度基本相当。这是由于观测历元的时间间隔很短, 其非线性较弱。

考察在强非线性情形下的性能, 观测历元间隔取一个周期  $t = 38\,048\text{ s}$ , 观测间隔取 10 个周期, 分别用两种方法进行滤波计算, 所得结果如图 3、图 4 所示。

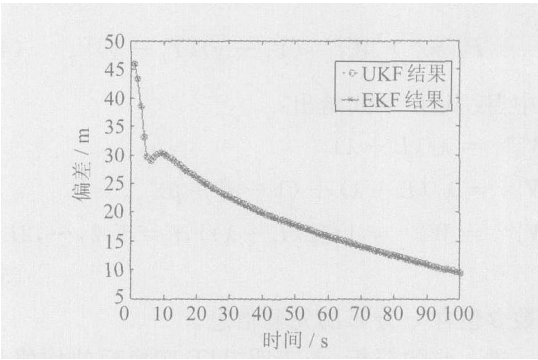


图 1 UKF 及 EKF 的滤波值与真值的位置偏差  
Fig. 1 Position Deviation of UKF and EKF Result

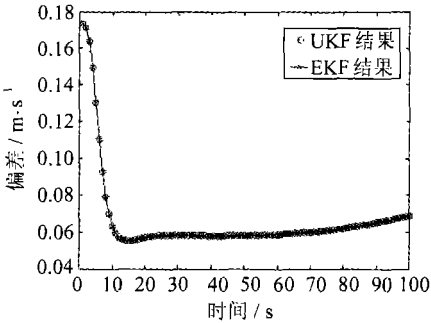


图 2 UKF 及 EKF 的滤波值与真值的速度偏差  
Fig. 2 Velocity Deviation of UKF and EKF Result

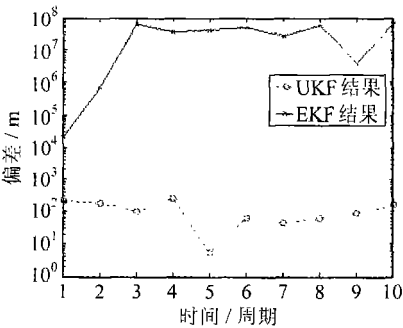


图 3 UKF 及 EKF 的滤波值与真值的位置偏差  
Fig. 3 Position Deviation of UKF and EKF Result

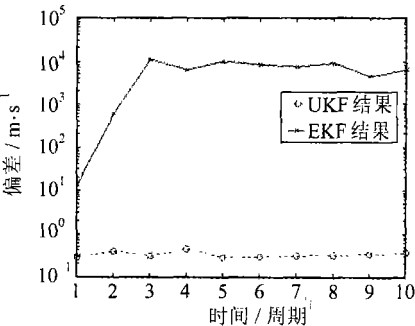


图 4 UKF 及 EKF 的滤波值与真值的速度偏差  
Fig. 4 Velocity Deviation of UKF and EKF Result

可见, EKF 结果偏差太大, 且不收敛, 而 UKF 则可在保证一定精度的情况下获得较好的

结果。

3 结 语

本文的研究表明了 UT 变换可以很好地预测系统的新状态和观测量,由此得到的 UKF 滤波算法具有两个显著的优点。其一是能够精确地预测非线性系统的状态量并进行滤波估计,对于高斯型噪声可达三阶精度,尤其对强非线性系统效果显著;其二是这种算法更容易实现,滤波过程中无需计算非线性系统中的偏导数矩阵,应用方便。仿真试验中比较了 UKF 和 EKF 两种算法,验证了 UKF 的良好滤波性能。此外,采用平方根形式的 UKF<sup>[4,8]</sup> 计算效率还有待进一步提高。

参 考 文 献

[ 1 ] Simon H. Adaptive Filter Theory [ M ]. Verlag: Prentice-Hall, 1996  
[ 2 ] 史忠科. 最优估计的计算方法[ M ]. 北京: 科学出

版社, 2001  
[ 3 ] Wan E A, Nelson A T. Kalman Filtering and Neural Networks[ M ]. New York: Wiley Publishing, 2001  
[ 4 ] Julier S J, Uhm ann J K, Durrant H F. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems. American Control Conference[C]. Seattle, Washington, 1995  
[ 5 ] Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits: Models, Methods and Applications[ M ]. New York: Springer-Verlag, 2000  
[ 6 ] 冯康. 数值计算方法[ M ]. 北京: 国防工业出版社, 1978  
[ 7 ] 刘广军. 组合导航系统的数据处理与仿真[ D]: [ 学位论文 ]. 郑州: 信息工程大学, 2002  
[ 8 ] 赵东明. 卫星跟踪卫星任务的引力谱分析和状态估计方法[ D]: [ 学位论文 ]. 郑州: 信息工程大学, 2004

第一作者简介: 蔡志武, 博士生, 研究兴趣为空间大地测量。  
E-mail: czwletters@yahoo.com.cn

Unscented Kalman Filter for Non-linear Estimation

CAI Zhiwu<sup>1</sup> ZHAO Dongming<sup>1</sup>

(1 Surveying and Mapping Institute, Information Engineering University, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** The extended Kalman filter is one of the most widely used methods for tracking and estimation of non-linear systems through linearizing non-linear models. In recent several decades people have realized that there are a lot of constraints in application of the EKF for its hard implementation and intractability. In this paper a new estimation method is proposed, which takes advantage of the Unscented Transformation method thus approximating the true mean and variance more accurately. The new method can be applied to non-linear systems without the linearization process necessary for the EKF, and it does not demand a Gaussian distribution of noise and what's more, its ease of implementation and more accurate estimation features enables it to demonstrate its good performance in numerical experiments of satellite orbit simulation.

**Key words:** Kalman filter; unscented transformation; unscented Kalman filter

About the first author: CAI Zhiwu, Ph. D candidate, his field of interest is space geodesy.  
E-mail: czwletters@yahoo.com.cn