文章编号：1671-8860(2008)07-0701-05 文献标志码：A

顾及测站点上重力场信息的大地水准面高的拟合方法

程芦颖[1,2] 许厚泽[1]

(1 中国科学院测量与地球物理研究所，武汉市徐东大街340号，430077)
(2 西安测绘研究所，西安市雁塔路中段1号，710054)

摘 要：利用测站点上的重力测量信息，根据Bruns公式研究了大地水准面高的变化特性，得出垂线偏差是大地水准面相对水准椭球面倾斜的线性改正，重力异常是大地水准面相对水准椭球面弯曲的线性改正，以及地形起伏效应构成大地水准面高的二阶变化等结论。在此基础上，提出了顾及测站点上重力场信息的大地水准面高的拟合方法，并分析了该方法相对于二次曲面函数拟合的优越性。

关键词：大地水准面；GPS/重力水准；垂线偏差；重力异常；拟合
中图法分类号：P228.41；P223

由于GPS/重力水准测量方法采用接近“几何”的手段确定了离散的大地水准面点，根据测站点的分布情况和测量路线的布设，对于邻近未知点的大地水准面高计算，通常采用的计算方法有等值线图内插法、解析内插法、曲线拟合法、平面拟合法、多次曲面拟合法、多面函数拟合法和最小二乘配置拟合法等[1-3]。这些方法都是把GPS大地水准面看作一个纯粹的几何曲面，通过数学函数的拟合和数值逼近，获得一个“平滑”的大地水准面高模型，几乎没有顾及大地水准面是代表地球形状的一个物理面的特性。然而，无论是采用Stokes理论[4]、Molodensky理论[5]或Hotine公式[6]来确定大地水准面，描述地球重力场形态的重力异常、垂线偏差或扰动重力等信息是这些理论应用的基础。本文从大地水准面高的定义出发，利用测站点上的重力测量信息，研究大地水准面高的变化与重力异常、垂线偏差等参数的关系，给出了顾及物理信息的大地水准面高的外推拟合方法。

1 大地水准面高的外推计算

根据Bruns公式[7]，大地水准面上某一点P_1的大地水准面高N_1与大地水准面上该点的扰动位的关系式为：

$$N_1 = T_1/\bar{\gamma}_1 \tag{1}$$

式中，$\bar{\gamma}_1$为该点处水准椭球面到大地水准面间的平均正常重力。由于大地水准面高的数值不大，因此，利用大地水准面上的正常重力γ_1代替平均正常重力$\bar{\gamma}_1$并不影响计算精度[8]。下面的公式推导均依据此假设。对于P_1点附近的大地水准面上的另外一点P的大地水准面高N，可以利用Taylor级数将其展开。为了便于表达，在P点处建立坐标系。把坐标原点设在P点，Z轴与该点的正常重力方向重合，X轴为子午圈方向，正方向指向北；Y轴为卯酉圈方向，正方向指向东。该坐标系的选择与定义垂线偏差的坐标系完全一致[4]。在此坐标系中，扰动位T表示为：

$$T = T_1 + \left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_1 \Delta X + \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_1 \Delta Y + \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_1 \Delta Z + \cdots \tag{2}$$

正常重力γ表示为：

$$\gamma = \gamma_1 + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial X}\right|_1 \Delta X + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial Y}\right|_1 \Delta Y + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial Z}\right|_1 \Delta Z + \cdots \tag{3}$$

式(2)中，扰动位沿X、Y轴的偏导数为[8]：

收稿日期：2008-04-27。
项目来源：国家自然科学基金资助项目(40574011)。

$$\partial T/\partial X = -\gamma\xi,\partial T/\partial Y = -\gamma\eta \tag{4}$$

由于坐标系 Z 轴方向与该点的正常重力方向重合，则有：

$$\partial\gamma/\partial X = 0,\partial\gamma/\partial Y = \gamma/\rho \tag{5}$$

式中，ρ 是 P 点处正常重力线的曲率半径。在 P 点处，大地水准面高 N 是沿着过 P 点的正常重力线方向度量。如果用 $\bar{n}$ 表示过 P 点的正常重力位面的外法线方向，则 $\bar{n}$ 方向与 Z 轴方向相反，并且 ΔZ 为大地水准面高在 P_1 点的变化 Δh_1。这时，有：

$$\frac{\partial T}{\partial Z}\Delta Z = \frac{\partial T}{\partial n}\Delta h,\frac{\partial\gamma}{\partial Z}\Delta Z = \frac{\partial\gamma}{\partial n}\Delta h \tag{6}$$

将式(4)～式(6)代入式(2)、式(3)，并将式(2)、式(3)应用于 Bruns 公式，可以得到在 P 点处的大地水准面高 N：

$$N = \frac{T_1 - \gamma_1\xi_1\Delta X_1 - \gamma_1\eta_1\Delta Y_1 + \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_1\Delta h_1 - \cdots}{\gamma_1 + \left.\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right|_1\Delta h_1 - \cdots} \tag{7}$$

利用级数展开性质对式(7)作进一步的代数运算，并同时利用扰动位应满足的微分方程，可以将 P 点处的大地水准面高 N 表示为：

$$\begin{aligned}N = {} & N_1 - \left(\xi_1 + \frac{N_1}{\rho_1}\right)\Delta X_1 - \eta_1\Delta Y_1 - \frac{\Delta g_1}{\gamma_1}\Delta h_1 - \\ & \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\xi}{\partial Y} + \frac{\partial\eta}{\partial X}\right)\Big|_1\Delta X_1\Delta Y_1 - \frac{1}{2\gamma_1}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial X} - \xi\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right)\Big|_1 \\ & \Delta X_1\Delta h_1 - \frac{1}{2\gamma_1}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial Y} - \eta\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right)\Big|_1\Delta Y_1\Delta h_1 - \frac{1}{2} \\ & \frac{\partial\xi}{\partial X}\Big|_1\Delta X_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial Y}\Big|_1\Delta Y_1^2 - \frac{1}{2\gamma_1}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial n} - \right. \\ & \left.\frac{\Delta g}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right)\Big|_1\Delta h_1^2 + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{8}$$

式中，$O(\varepsilon^3)$ 表示三阶以上的无穷小量。

2 大地水准面高的变化分析

在 Stokes 理论框架中，大地水准面是研究地球形状和地球重力场的一个重要参考面。根据定义[1]，大地水准面是地球重力场中的一个等位面。由于地球内部质量分布的不均匀性，大地水准面的空间形态极不规则，很难用一个简单的数学函数表达。在物理大地测量中，基于观测手段对地球形状和地球重力场逼近的研究，引入了水准椭球的概念[5]，即由形状和质量分布都很规则的旋转椭球体形成正常重力场，通过研究实际地球重力场和正常重力场之间的差异，也即扰动重力场的结构，达到逼近真实地球重力场的目的。于是，在地球重力场空间就存在了重力位水准面和正常重力位水准面、重力矢量和正常重力矢量等概念。

为了更方便地以线性逼近的手段研究真实的地球重力场，通常总是按照某些特定的约束条件定义水准椭球的参数，使扰动位、大地水准面高、重力异常等参数不存在零阶项。这时，大地水准面上的重力位值与水准椭球面上的重力位值相同，并且两者的质心位置重合。两个物理曲面在几何形态上的差异完全是由于扰动质量的分布与变化所引起的，可以观测或可以计算得到两个物理曲面差异的参数之一正是由于扰动质量的存在而形成的重力矢量和正常重力矢量在空间的变化。为此，将重力矢量和正常重力矢量的差异作为描述大地水准面高的一阶线性变化部分。

垂线偏差是重力矢量方向和正常重力矢量方向的差异[4]。由重力矢量与重力位水准面的定义知，垂线偏差就是描述重力位水准面相对正常重力位水准面的倾斜。因此，根据垂线偏差的几何意义，式(8)右边的第二项、第三项实际上是大地水准面倾斜的线性改正。其中，第二项中的 N/ρ 因子是关于 P_1 点处的正常重力位水准面与水准椭球面代表的正常重力位水准面之间的不平行改正。由于垂线偏差反映的是地球重力场的高频变化，这就要求采用式(8)计算 P 点处的大地水准面高应与 P_1 点不能相距太远。

重力异常是大地水准面上的重力矢量和相应水准椭球面上的正常重力矢量的数量差[4]，它是不同重力场结构中相同数值等位面上的重力大小的差异，主要体现了实际地球重力场地球物质密度和正常重力场水准椭球物质密度的差异。由于这些物质密度差异的分布也是不规则的，使得大地水准面相对水准椭球面不仅仅只是倾斜，而且随着物质密度差异的变化而产生相对的弯曲。因此，根据大地水准面相对水准椭球面的物理变化，式(8)右边的第四项实际上是大地水准面相对水准椭球面弯曲的线性改正部分。

由前面的分析可以得出，线性项主要说明了大地水准面的倾斜和大地水准面内部物质密度与正常椭球密度差异产生的大地水准面高的变化。进一步分析式(8)的二阶项不难看出，垂线偏差、重力异常在水平方向的变化就是地形效应产生的结果，而高程方向上的重力异常变化同样与测站周围的地形变化密切相关。因此，大地水准面高的二阶变化部分主要是地形起伏产生的效果。

3　大地水准面高的拟合计算

在描述大地水准面形态方面,可以采用地球重力场的函数模型,它通常适合于采用全球重力场观测数据确定大地水准面变化,而等值线图或格网数值模型更适合于局部大地水准面的描述。特别是在开展了 GPS/重力水准测量地区,通过大地水准面高的拟合计算,形成适当格网密度的大地水准面高模型是很有意义的[10]。

拟合大地水准面高的数学模型一般表示为:

$$N_{ij,k} = N_k + F(\Delta B_{ij,k}, \Delta L_{ij,k}, \Delta h_{ij,k}, \xi_k, \eta_k, \Delta g_k) \tag{9}$$

式中,$N_{ij,k}$表示由测站点 k 外推的大地水准面高;N_k 表示测站点 k 上的大地水准面高;$\Delta B_{ij,k}$、$\Delta L_{ij,k}$、$\Delta h_{ij,k}$分别表示外推点相对测站点 k 的大地纬度差、大地经度差和大地水准面高的变化;ξ_k、η_k 分别表示测站点 k 上的垂线偏差的子午圈分量和卯酉圈分量;Δg_k 表示测站点 k 上的重力异常。对于不同的大地水准面高拟合区域,根据在该区域内不同的格网密度要求以及具有的不同密度的 GPS/重力水准测量数据,可以采取两种不同的处理方式。

3.1　线性外推计算

对于相对小的区域(如 100 km^2),并且具有一定密度的 GPS/重力水准测量数据,可以直接利用区域内测站上的 GPS/重力水准测量数据采用线性外推的方式计算格网点的大地水准面高。此时,$N_{ij,k}$表示由测站点外推的格网点大地水准面高。根据前面的推导结果,定义

$$F_1(\Delta B_{ij,k}, \Delta L_{ij,k}, \Delta h_{ij,k}, \xi_k, \eta_k, \Delta g_k) = -\left(\xi_k - \frac{N_k}{\rho_k}\right)\Delta B_{ij,k}R - \eta_k \Delta L_{ij,k} R\cos B_k - \frac{\Delta g_k}{\gamma_k}\Delta h_k \tag{10}$$

简记为函数 $F_1(ij,k)$。式中,R 为地球的平均半径;B_k是测站点的大地纬度。根据格网点和测站点的分布,建立误差方程式:

$$v_{ij,k} = \hat{N}_{ij} - N_{ij,k} \tag{11}$$

按照最小二乘原理,可以求得格网点上的大地水准面高的最或然值:

$$\hat{N}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_k N_{ij,k} \Big/ \sum_{k=1}^{n} P_k \tag{12}$$

式中,n 为测站点的个数;P_k为测站点观测数据的权,一般可以按照测站点到格网点的距离倒数或距离倒数的平方定义权。需要指出的是,在第一次平差计算时,参数 $\Delta h_{ij,k}$还是未知的,可先定义为零。根据第一次的平差结果,获得 $\Delta h_{ij,k}$的初值,然后循环迭代,求取最佳的大地水准面高。

3.2　高阶拟合计算

对于 GPS/重力水准测量数据分布比较均匀、格网点密度与测站分布密度相当的中等大小区域,特别是测区分布于山区,由于垂线偏差和重力异常在区域内的变化已不仅仅表现为线性变化的趋势,此时,描述大地水准面高的变化也应该包含二阶或更高阶的垂线偏差和重力异常变化的贡献。本文以包含二阶项的拟合计算方法为例说明大地水准面高的平差计算过程。

在测区内,由各个测站的 GPS/重力水准测量数据构成测站间的大地水准面高差,其中,一阶线性项的计算采用各个测站的 GPS/重力水准测量实际数据及测站点上的重力异常和垂线偏差数据,二阶拟合项的系数为平差参数。此时,测站间的大地水准面高差为:

$$l_{ij,k} = N_{ij,k} - N_k - F_1(\Delta B_{ij,k}, \Delta L_{ij,k}, \Delta h_{ij,k}, \xi_k, \eta_k, \Delta g_k) \tag{13}$$

则误差方程式为:

$$\boldsymbol{v}_{ij,k} = \boldsymbol{A}_{ij,k}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{l}_{ij,k} \tag{14}$$

式中,$\boldsymbol{A}_{ij,k}$为系数矩阵,$\boldsymbol{A}_{ij,k} = [\Delta B_{ij,k}\Delta L_{ij,k}, \Delta B_{ij,k}\Delta h_{ij,k}, \Delta L_{ij,k}\Delta h_{ij,k}, \Delta B^2_{ij,k}, \Delta L^2_{ij,k}, \Delta h^2_{ij,k}]$;$\boldsymbol{X} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$。

在测区内,由各个测站的大地水准面高差组成的误差方程式矩阵为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L} \tag{15}$$

依据最小二乘法可得:

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL} \tag{16}$$

最后,格网点上的大地水准面高为:

$$\hat{N}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_k(N_k + F_1(ij,k) + \boldsymbol{A}_{ij,k}\boldsymbol{X}) \Big/ \sum_{k=1}^{n} P_k \tag{17}$$

4　分　析

与以往的 GPS/重力水准测量方法拟合大地水准面不同的是,本文不仅利用了测站点上的大地水准面高数据,而且融合了测站点上的垂线偏差数据和重力异常数据,将大地水准面的拟合过程赋予了内在的物理意义。因为拟合表达式形式的确定是参数估值的基础,只有那些从本质上描述目标状态的函数形式才是拟合表达式的最基本选择[10]。为此,以一般的二次曲面函数作为拟合函数与本文提出的方法进行比较,分析两者的主要区别。二次曲面函数的表达式为:

$$\Delta N = a_0 + a_1\Delta B + a_2\Delta L + a_3\Delta B^2 + a_4\Delta B\Delta L + a_5\Delta L^2 \quad (18)$$

如果在测区内用GPS/重力水准测量数据采用式(18)拟合局部大地水准面高，这时，a_0代表了测站间大地水准面高的系统偏差，a_1、a_2代表了在整个区域内局部大地水准面的倾斜，a_3、a_4、a_5代表了在整个区域内局部大地水准面倾斜的变化。

本文提出的拟合方法由于考虑了描述大地水准面高变化的垂线偏差参数和重力异常参数，并且这些参数在实际观测中是可以获得的，对于拟合区域内垂线偏差变化和重力异常变化等参数，如果存在足够密度分布的测站，则可以利用测站数据计算。一般情况下，也是采用多项式的方法组成平差模型。比较两种方法的计算模型可以看出：

1) a_0实际上是拟合区域内测站点间重力异常以及重力异常垂直变化引起的大地水准面高改正的加权平均值。对于忽略三阶以上无穷小量而言，a_0相当于$\frac{\Delta g}{\gamma}\Delta h$及$\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial n}-\frac{\Delta g}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)\Delta h^2$的综合效应。

2) a_1、a_2实际上是垂线偏差子午圈分量和卯酉圈分量在拟合区域内的加权平均值。同样，在拟合区域内，a_1相当于$(\xi - N/\rho)$的作用，而a_2相当于$\eta\cos B$的作用。

3) a_3、a_4、a_5实际上是拟合区域内垂线偏差变化的加权平均值。对于本文给出的拟合方法，a_3相当于$\frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial B}$的作用，$a_4$相当于$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \xi}{\partial L}+\frac{\partial \eta}{\partial B}\cos B\right)$的作用，而$a_5$相当于$\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial L}\cos B$的作用。

4) 根据式(8)，如果采用二次曲面函数拟合的方法计算大地水准面高，则平差参数a_0还包含了重力异常水平变化引起的大地水准面高变化的贡献，且与拟合点的距离密切相关。

在利用二次曲面函数拟合局部大地水准面高的过程中，零阶项a_0只起着系统偏差参数的作用。根据上面的分析，a_0所包含的实际物理意义不仅有测站点上的重力异常信息，而且还包含了重力异常垂直变化和水平变化的地球重力场信息。对于重力异常变化比较平缓的区域，采用二次曲面函数拟合，通过平差计算，可以得到比较稳定和准确的a_0参数。但对于重力异常变化比较剧烈的区域，由于二次曲面函数与实际目标状态函数存在较大差异，同时，平差过程中受拟合点距离的影响，a_0参数将随着拟合区域的变化而变得不稳定，且没有明确意义。

一阶项a_1、a_2起着倾斜趋势参数的作用，与本文给出的拟合方法中的对应参数的物理意义接近，只是缺省了测站点处正常重力位水准面与水准椭球面间不平行的改正。同理，对于大地水准面变化比较平缓的区域，两者差别不大。但对于大地水准面变化比较剧烈的区域，如果不顾及测站点上的垂线偏差观测信息，不考虑垂线偏差是地球重力场高频信息的反映，只是单纯地利用几何参数拟合的方法确定该区域的大地水准面倾斜，则a_1、a_2参数的求解将会受到区域选择及格网点分布的影响。

二阶项a_3、a_4、a_5起着倾斜变化参数的作用。根据前面的分析，二阶项参数的物理意义是测站点处地形起伏对大地水准面的影响。在二次曲面函数拟合中，虽然包含了水平变化因素的效应，但在垂直方向上没有考虑大地水准面高的变化对曲面拟合引起的附加改正，因此，这样的二阶参数是不完整的。在平差模型中，这些因素的影响都被归并到了零阶项a_0中。

综上所述，本文提出的顾及测站点上重力场信息的大地水准面高的拟合方法，由于直接利用了测站点上的垂线偏差和重力异常信息，因此所拟合的大地水准面顾及了在各个测站点上表现出的倾斜和弯曲，描述的大地水准面高变化更加准确和精细，反映了大地水准面作为重力等位面的物理特性，而不是一个退化了的数学上的几何曲面，其原因正是由于拟合函数较好地反映了目标函数的内在变化因素。对于大地水准面变化比较复杂的区域，测站点上的垂线偏差参数、重力异常参数提供了很好的大地水准面变化的一阶控制，与几何拟合方法相比较，不仅有利于提高区域内大地水准面的拟合精度，且具有更强的参数求解的稳定性和有效性，适用于较大区域的大地水准面高拟合。

应该强调的是，利用GPS/重力水准测量方法确定离散点上的大地水准面高时，必须将GPS测量技术采用的坐标框架、重力场模型基准等与水准重力测量系统基准进行统一归算，消除系统偏差。

参 考 文 献

[1] 周忠谟，易杰军，周琪. GPS卫星测量原理与应用[M]. 北京：测绘出版社，1997

[2] 李建成，陈俊勇，宁津生，等. 地球重力场逼近理论与中国2000似大地水准面的确定[M]. 武汉：武汉大学出版社，2003

[3] 李斐,岳建利,张利明. 应用 GPS/重力数据确定(似)大地水准面[J]. 地球物理学报,2005,48(2):294-298

[4] Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy[M]. San Francisco: Freeman W H and Company, 1967

[5] Cheng Luying, Xu Houze. General Inverse of Stokes, Vening-Meinesz and Molodensky Formulae[J]. Science in China: Series D Earth Sciences 2006,49(5): 499-504

[6] Hotine M. Mathematical Geodesy[M]. Washington D C: ESSA Monograph No. 2. U. S. Dept of Commerce, 1969

[7] Bruns H. Die Figur der Erde[M]. Berlin: Publ Preuss Geod Inst, 1878

[8] 陆仲连. 地球重力场理论与方法[M]. 北京:解放军出版社,1996

[9] 宁津生,罗志才,杨沾吉,等. 深圳市 1 km 高分辨率厘米级高精度大地水准面的确定[J]. 测绘学报,2003,32(2):102-107

[10] 冯康. 数值计算方法[M]. 北京:国防工业出版社,1978

第一作者简介:程芦颖,研究员。主要从事空间大地测量和物理大地测量研究。

E-mail:lycheng1961@tom. com

Fitting Geoidal Height Regarding for Gravity Field Information on Stations

CHENG Luying[1,2]　*XU Houze*[1]

(1 Institute of Geodesy and Geophysics,Chinese Academy of Sciences, 340 Xudong Street, Wuhan 430077, China)

(2 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Middle Yanta Road, Xi'an 710054, China)

Abstract: The variety characteristics of the geoidal height are analyzed based on the information of the geodetic gravity measurement on station points by Bruns formula. The conclusions drawn obtained that the vertical deflection is the line correction about the geoidal inclination, the gravity anomaly is the line correction about the geoidal bending; and the topographic effects are the second order correction about the geoidal height variety. On the basis of these clews. The method for fitting geoidal height is put forward regarding for the gravity field information on the stations, and the superiority is compared with the method of the second order surface fitting.

Key words: geoid; GPS/gravimetric leveling; vertical deflection; gravity anomaly; fitting

About the first author: CHENG Luying, researcher. His major research interest is the space geodesy and physical geodesy.

E-mail: lycheng1961@tom. com

2007 年 PЖ 收录《地球空间信息科学学报(英文版)》情况

(公布名单为第一作者)

2002 年　第 3 期　刘艳芳　胡　鹏　刘耀林　第 4 期　马吉平

2003 年　第 2 期　刘志芳　李平湘　叶泽田　第 3 期　李平湘

2005 年　第 1 期　吴　军　李平湘　第 3 期　徐天河　焦文海　罗　佳　张景雄
郭际明　李志才　刘　春　第 4 期　张正禄

2006 年　第 2 期　徐俊锋