

引文格式:王乐洋,韩澍豪.不等式约束下加乘性混合误差模型的简单迭代解法[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(6):996-1004.DOI:10.13203/j.whugis20210659



Citation: WANG Leyang, HAN Shuhao. A Simple Iterative Solution for Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model with Inequality Constraints[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2024, 49(6): 996-1004. DOI: 10.13203/j.whugis20210659

# 不等式约束下加乘性混合误差模型的 简单迭代解法

王乐洋<sup>1,2</sup> 韩澍豪<sup>1,2</sup>

1 东华理工大学测绘工程学院,江西 南昌,330013

2 自然资源部环鄱阳湖区域矿山环境监测与治理重点实验室,江西 南昌,330013

**摘要:**在大地测量领域中,现有的处理不等式约束的方法大多都是基于加性误差的模型,包括高斯马尔可夫模型和变量误差模型,鲜有对于加乘性混合误差模型处理方法的研究。为了拓展附有不等式约束的加乘性混合误差的方法,基于最小二乘原理并应用零权和无限权的思想,通过约束条件构建了惩罚函数,推导了在不等式约束下加乘性混合误差的一种简单迭代解法,分析了简单迭代解法在加乘性混合误差模型中的缺陷,在原有方法的基础上在惩罚项前加入了一个随迭代次数增加而增加的惩罚因子。通过算例评估分析可知,改进后的简单迭代法能够有效解决原有方法用于处理附有不等式约束的加乘性混合误差模型时不收敛的问题。通过对比其他方案可知,所提方法能够得到更好的参数估值,证明了该方法的有效性。同时,所提方法结构简单,易于实现,能够适用于大批量的数据处理。

**关键词:**加乘性混合误差模型;不等式约束;迭代解法;惩罚函数;惩罚因子

中图分类号:P207

文献标识码:A

收稿日期:2022-04-03

DOI:10.13203/j.whugis20210659

文章编号:1671-8860(2024)06-0996-09

## A Simple Iterative Solution for Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model with Inequality Constraints

WANG Leyang<sup>1,2</sup> HAN Shuhao<sup>1,2</sup>

1 Faculty of Geomatics, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

2 Key Laboratory of Mine Environmental Monitoring and Improving Around Poyang Lake, Ministry of Natural Resources, Nanchang 330013, China

**Abstract: Objectives:** With the development of modern observation techniques, the processing methods which only consider additive errors cannot meet the requirements. Most of the existing methods for dealing with inequality constraints are based on additive error models, including Gaussian-Markov model and errors-in-variables model, while the processing methods for mixed additive and multiplicative (MAM) random error models are rare. **Methods:** Based on the least squares principle and the ideas of zero and infinite weights, we construct a penalty function with the given inequality constraints, and derive the simple iterative method (SIM) for the estimation of MAM parameters under the inequality constraints. Then, we add a penalty factor increasing with the number of iterations before the penalty term to address the defects of the original SIM. **Results:** Two sets of cases show that the improved SIM can effectively solve the problem that the original method does not converge when used to deal with MAM error models with inequality constraints. The structure of improved SIM is simple and easy to implement. And it can obtain better parameter estimation compared with other schemes. **Conclusions:** The feasibility and effectiveness of the improved SIM for parameter estimation of MAM error models with inequality constraints are verified, and it can be

基金项目:国家自然科学基金(42174011, 41874001)。

第一作者:王乐洋,博士,教授,研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。wleyang@163.com

applied to the processing of large batches of data.

**Key words:** mixed additive and multiplicative random error model; inequality constraints; iterative solution; penalty function; penalty factor

随着现代测绘技术的发展,各种高新测量技术应运而生,如合成孔径雷达、全球导航卫星系统、光电测距及甚长基线干涉测量技术等<sup>[1-4]</sup>。利用高新测量技术获取的观测值的随机误差通常表现为乘性误差或加性误差和乘性误差并存的加乘性混合误差<sup>[5-7]</sup>,而传统的平差方法仅考虑了加性误差,因此,为满足不断发展的现代观测数据处理的需求,研究针对乘性误差或加乘性混合误差的模型的处理方法尤为重要。目前,在大地测量领域中有关乘性误差或加乘性混合误差模型处理方法的研究已有了一定的成果<sup>[8-14]</sup>,但是对于附有不等式约束条件下加乘性混合误差模型的解算方法几乎空白。

对于乘性误差和加乘性混合误差模型的研究,文献[8]首次将最小二乘(least squares, LS)原理应用到乘性误差模型的参数估计理论中,提出参数估计的偏差改正加权最小二乘法(bias correction weighted least square, BCWLS),并证明了该方法在一定程度上等价于最大似然理论;在此基础上,文献[9]推导了基于这3种方法的精度评定公式,并构建了相应的单位权方差估计;文献[10]考虑到乘性误差模型的病态问题,在现有方法的基础上结合 Tikhonov 正则化方法,求解了模型的参数估值,同时,引入一种无需求导的无迹变换法对模型参数进行了精度评定;考虑到实际中,观测值中不仅包含乘性误差,还有加性误差的存在,文献[11-12]把乘性误差模型拓展为加乘性混合误差模型,并将文献[8]中的3种方法引入其中,推导了加权最小二乘法(weighted least square, WLS)中的偏差项,认为 BCWLS 是近似无偏的,然而对应的单位权方差估计的效果不佳;文献[13]使用 A-优化设计方法来确定病态加乘性混合误差模型的正则化参数,并结合模型的观测方程以及虚拟观测方程,推导了病态模型的虚拟观测迭代解;文献[14]将加乘性混合误差模型拓展到一个更具一般性的、含有确定性趋势的广义加乘性混合误差模型,并用普通最小二乘法和 BCWLS 估计模型中的两个未知参数。

上述文献所研究的乘性误差或者加乘性混合误差模型几乎没有考虑到先验信息,根据在研究前期可以得到的与观测对象相关的先验信息以及观测对象本身的特性,可以建立起对参数的

约束关系,为了更准确地描述先验信息,通常这种约束关系表现为不等式约束<sup>[15]</sup>。对于不等式约束的平差方法,文献[16]首先将先验信息结合到回归模型中,研究了附有不等式约束的回归分析算法;针对大维度平差问题计算效率低的问题,文献[17]在最小二乘准则下,将不等式约束视为一个可行域,利用 Fisher 函数建立了基于 Wolfe-Powell 算法的非精确快速搜索算法;文献[18]将先验知识转化为不等式约束,并将其应用到 GPS 数据处理中,实现了对 GPS 初始化的改善;文献[19]提出了一种用于求解线性不等式约束下非光滑凸优化问题的递归网络,并通过实验验证了算法的有效性;文献[20]通过将附有不等式约束的总体最小二乘模型转化为二次规划问题,利用拟牛顿修正算法得到了良好的结果;文献[21]通过将不等式约束条件转化为一种近似的凝聚等式约束,从而构造出一个无约束的拉格朗日目标函数,并利用 BFGS(Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno)算法解算出不等式约束的加权整体最小二乘解,通过实验证明了该方法的可行性以及快速收敛性。

基于零权和无限权的思想以及最优化理论中用来处理约束问题的惩罚函数法,文献[22]提出了一种解决不等式约束问题的简单有效的迭代方法,在迭代过程中,通过区分有效约束和无效约束,分别赋予无限权和零权,从而收敛到最优解。对于非线性强度较弱的传统平差模型,该方法具有较好的适用性,当模型非线性程度较高时,如加乘性混合误差模型,由于该方法没有对惩罚函数的惩罚因子做出限定,从而导致在迭代的过程中无法收敛。针对这个问题,本文通过增加一个随迭代次数变化的惩罚因子,推导简单迭代法(simple iterative method, SIM)在不等式约束条件下加乘性混合误差模型中的参数估计公式,以确保算法在迭代后期能够成功收敛。

## 1 加乘性混合误差模型

基本的加乘性混合误差模型的数学表达式为<sup>[12]</sup>:

$$\mathbf{y} = f(\boldsymbol{\beta}) \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (1)$$

式中, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 表示观测值; $f(\boldsymbol{\beta})$ 表示未知参数的

函数;  $\beta \in R^{n \times 1}$  表示未知参数;  $\odot$  表示向量或者矩阵的 Hadamard 积;  $\mathbf{1}$  表示元素全为 1 的列向量;  $\epsilon_m \in R^{n \times 1}$ 、 $\epsilon_a \in R^{n \times 1}$  分别表示零均值乘性随机误差和零均值加性随机误差,二者均服从正态分布。

在加乘性混合误差模型中,  $f(\beta)$  具有多种表达形式,当  $f(\beta)$  是  $\beta$  的线性函数<sup>[12]</sup>,即  $f_i(\beta) = a_i^T \beta$  时,加乘性混合误差模型计算式如下:

$$y = A\beta \odot (1 + \epsilon_m) + \epsilon_a \quad (2)$$

式中,  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ , 其中  $a_i \in R^{1 \times t}$ ;  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$ 。

利用最小二乘准则求解加乘性混合误差模型,其目标函数计算式如下:

$$\min: F(\beta) = (y - E(y))^T P (y - E(y)) \quad (3)$$

$$E(y) = A\beta \quad (4)$$

$$P = (\text{diag}(a_i \beta)^2 \sigma_m^2 + I \sigma_a^2)^{-1} \quad (5)$$

式中,  $\sigma_m^2$  和  $\sigma_a^2$  分别表示  $\epsilon_m$  和  $\epsilon_a$  的单位权方差。

当应用普通最小二乘时,加乘性混合误差模型的参数估计  $\hat{\beta}_{LS}$  表示为:

$$\hat{\beta}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (6)$$

将加权最小二乘法应用于加乘性混合误差模型的参数估计,其估计迭代式为<sup>[11]</sup>:

$$\hat{\beta}_{WLS}^{k+1} = (A^T P^k A)^{-1} A^T P^k y + G^k (A\beta^k - y) \quad (7)$$

$$G = \begin{bmatrix} (A\hat{\beta} - y) P E_{ae_1} D_m E_{a\beta} P \\ (A\hat{\beta} - y) P E_{ae_2} D_m E_{a\beta} P \\ \vdots \\ (A\hat{\beta} - y) P E_{ae_t} D_m E_{a\beta} P \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中,  $k$  表示迭代次数;  $D_m$  表示乘性误差的方差阵;  $E_{ae_i}$  和  $E_{a\beta}$  分别表示第  $k$  个对角元素等于  $a_k e_i$  和  $a\beta$  的对角矩阵;  $e$  表示  $t$  维自然基向量;  $\hat{\beta}$  表示  $\beta$  的 WLS 估计值。

## 2 附有不等式约束的加乘性混合误差模型的简单迭代法

附有不等式约束的加乘性混合误差模型可以表示为:

$$\begin{cases} y = A\beta \odot (1 + \epsilon_m) + \epsilon_a \\ G\beta \leq \omega \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $G \in R^{s \times n}$  表示为约束矩阵,  $\omega \in R^{s \times 1}$  表示常数列向量。在最小二乘准则下,式(9)可以表示为:

$$\begin{cases} F(\beta) = V^T P V \\ G\beta \leq \omega \end{cases} \quad (10)$$

根据惩罚函数法,可以将式(10)转化为:

$$\Phi(\beta) = F(\beta) + P(\beta) \quad (11)$$

式中,  $P(\beta)$  为惩罚项,当所给的参数在给定的约束范围内时,  $P(\beta)$  取 0; 反之,当参数在约束外时,  $P(\beta)$  将取一个很大的值,从而将该参数无效化。构建惩罚函数的方式有很多种,本文利用所给的约束条件,构建出一个能够确保最优解在约束范围内的惩罚函数<sup>[22]</sup>,计算式如下:

$$P(\beta) = V_p^T P_p V_p \quad (12)$$

$$V_p = G\beta - \omega \quad (13)$$

运用零权以及无限权的思想,当  $V_p \leq 0$  时,则满足所求参数在约束范围内,要求惩罚项  $P(\beta)$  为 0,则对应的权取 0; 反之,相应的权为一个很大的值。因此,惩罚项中权阵可以通过以下方式确定:

$$P_{p_i} = \begin{cases} c, V_{p_i} > 0 \\ 0, V_{p_i} \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $c$  表示一个很大的值,参考文献[22],  $c$  可以取  $1 \times 10^6$  甚至更大的数。  $\Phi(\beta)$  的计算式如下:

$$\Phi(\beta) = V^T P V + V_p^T P_p V_p \quad (15)$$

对式(15)求偏导数可以得到:

$$\frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} = 2A^T P (A\beta - y) + (A\beta - y)^T \frac{\partial P}{\partial \beta} \cdot (A\beta - y) + 2G^T P_p (G\beta - \omega) = 0 \quad (16)$$

式中,  $(A\beta - y)^T \frac{\partial P}{\partial \beta} (A\beta - y)$  可以写成:

$$\begin{bmatrix} (A\beta - y)^T \frac{\partial P}{\partial \beta_1} \\ (A\beta - y)^T \frac{\partial P}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ (A\beta - y)^T \frac{\partial P}{\partial \beta_s} \end{bmatrix} (A\beta - y)$$

其中,根据文献[11]可以得到:

$$\frac{\partial P}{\partial \beta_i} = -P (D_{ae_i} \sum_m D_{a\beta} + D_{a\beta} \sum_m D_{ae_i}) P \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)可以得到参数的简单迭代解  $\beta_{ic}^{k+1}$ ,计算式如下:

$$\beta_{ic}^{k+1} = (A^T P A + G^T P_p G)^{-1} [A^T P y + G^T P_p \omega + H (A\beta_{ic}^k - y)] \quad (18)$$

$$H = \begin{bmatrix} (A\beta_{ic}^k - y)^T P D_{ae_1} \sum_m D_{a\beta} P \\ (A\beta_{ic}^k - y)^T P D_{ae_2} \sum_m D_{a\beta} P \\ \vdots \\ (A\beta_{ic}^k - y)^T P D_{ae_t} \sum_m D_{a\beta} P \end{bmatrix} \quad (19)$$

通过式(11)推导出的不等式约束下的加乘性混合误差模型的参数解析式如式(18)所示。在式(11)中,惩罚项的惩罚因子不会随着迭代发生改变,始终为1。虽然在文献[22]中,该方法在一个附有不等式约束的线性模型中能起到较好的效果,且操作简单,始终能够收敛。然而,加乘性混合误差模型是一种非线性强度较高的非线性模型,这种不改变惩罚因子的算法应用到附有不等式约束的加乘性混合误差模型中时,容易导致参数结果陷入局部最优、无法收敛。当迭代接近全局最优点时,由于惩罚因子太小,对不可行点的惩罚力度不够大,导致迭代在一个较大的范围内进行,无法得到全局最优点,从非线性规划的角度可以视其为步长过大。

针对上述问题,本文在文献[22]方法的基础上,在惩罚项前增加一个可变的惩罚因子。若初始惩罚因子设定过大,会导致参数迭代时迅速进入到某个可行域,得到的解并非全局最优。因此,在设定惩罚因子时,需要确保惩罚因子随着迭代次数的增加而增加,从而使得在迭代后期,参数的迭代能够在最优解附近以一个较小的范围进行。在本文中,设定惩罚因子 $\sigma = 1 \times 10^{k-1}$ ,其中 $k$ 为当前迭代次数。由此,可以将式(15)改写成:

$$\Phi_{\sigma}(\beta) = V^T P V + \sigma V_p^T P_p V_p \quad (20)$$

同理,式(20)对参数 $\beta$ 求偏导可以得到:

$$\beta_{\sigma}^{k+1} = (A^T P A + \sigma G^T P_p G)^{-1} \cdot$$

$$[A^T P y + \sigma G^T P_p \omega + H(A \beta_{ic}^k - y)] \quad (21)$$

综上,SIM在不等式约束下加乘性混合误差模型中应用的流程如图1所示,具体步骤如下:

1)初始化迭代次数 $k=1$ ,迭代终止阈值 $\zeta = 1 \times 10^{-6}$ ;

2)输入加乘性混合误差模型的观测值 $y$ 和系数矩阵 $A$ ,计算出模型的普通最小二乘解作为迭代初值:

$$\beta_0 = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (22)$$

3)根据式(5)更新权阵 $P$ ;

4)输入约束系数矩阵 $G$ 和约束列向量 $\omega$ ,计算出 $V_p$ :

$$V_p = G \beta_{ic}^k - \omega \quad (23)$$

5)根据式(14)构建出惩罚函数权阵 $P_p$ ;

6)根据当前迭代次数 $k$ 确定惩罚因子 $\sigma = 1 \times 10^{k-1}$ ;

7)构建惩罚函数:

$$P(\beta) = \sigma V_p^T P_p V_p \quad (24)$$

8)构建不等式约束下加乘性混合误差模型的目标函数 $\Phi_{\sigma}(\beta)$ ;

9)由式(19)计算出第 $k+1$ 次简单迭代参数解 $\beta_{\sigma}^{k+1}$ ;

10)若 $\|\beta_{\sigma}^{k+1} - \beta_{\sigma}^k\| < \zeta$ ,则停止迭代,反之重复步骤3)~10)。

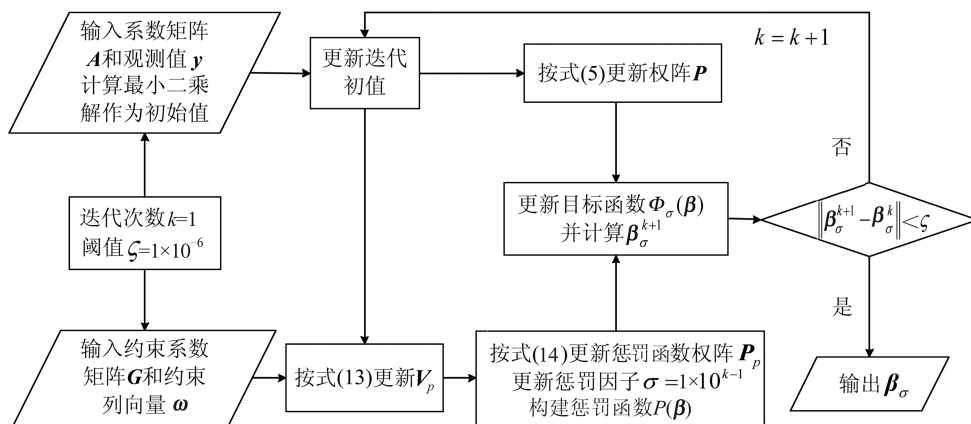


图1 算法流程图

Fig. 1 Algorithm Flowchart

### 3 算例分析

本文模拟了一个非线性强度较低的直线拟合模型和一个非线性强度较高的数字地面高程模型实验,在给出合理的不等式约束条件下,使用SIM分别与未加约束的加乘性混合误差模型的LS、WLS以及BCWLS在参数估计中的性能

评估进行对比,以证明本文方法的有效性与适用性。

#### 3.1 算例1

为了初步验证SIM算法在加乘性混合误差模型中的可行性,算例1通过模拟计算一个简单的直线拟合加乘性混合误差模型来加以确定。直线拟合模型包含两个未知参数,其模型计算式

如下:

$$y = \beta_1 x + \beta_2 \quad (25)$$

式中,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别表示待求的未知参数;  $x$ 、 $y$  分别表示拟合直线上点的横、纵坐标。

受到乘性误差和加性误差干扰的直线拟合模型为:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \odot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{m_1} \\ \epsilon_{m_2} \\ \vdots \\ \epsilon_{m_n} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \epsilon_{a_1} \\ \epsilon_{a_2} \\ \vdots \\ \epsilon_{a_n} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中,  $(x_i, y_i)$  为直线上观测点的坐标点;  $\epsilon_{m_i}$  和  $\epsilon_{a_i}$  分别为独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差。

在算例1中, 设定  $\beta_1$  和  $\beta_2$  的真值分别为 7 m 和 14 m,  $x$  在 0~99 m 内以 0.5 m 的间隔取 199 个点。根据文献[23], 分别设置乘性随机误差和加性随机误差的标准差为 0.05 和 0.3 m。设定的约束条件  $G_1$  和  $\omega_1$  分别为:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \omega_1 = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 56.5 \end{bmatrix} \quad (27)$$

未受误差影响的坐标点拟合直线和受到加乘性混合误差影响的坐标点如图2所示。由图2可以看出, 受到误差的影响, 直线上的各点严重偏离原有位置。为重建直线模型, 利用4种方案分别对该误差模型进行解算, 计算出的参数估值结果见表1。

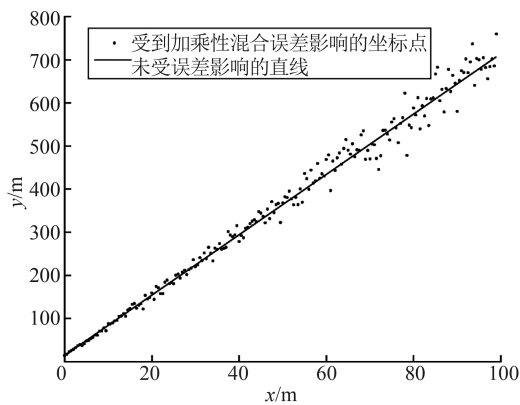


图2 未受影响的直线与受加乘性混合误差影响的坐标点  
Fig. 2 Unaffected Lines and Coordinate Points Affected by Mixed Additive and Multiplicative Random Errors

从表1中参数估值与真值之间的二范数可以看出, LS忽略了观测值中权重的影响, 因此得到的参数估值偏离真值较远。WLS和BCWLS均考虑了权的影响, 得到了更优的结果。其中, 虽然BCWLS去除了WLS中的偏差, 所得结果有所

改善, 但改善的并不明显。SIM法考虑到参数的先验信息, 充分利用不等式约束条件, 且考虑了观测值权的影响, 得到的参数估计结果最接近真值, 二范数仅为 0.173, 相对于其他3种方法结果具有较大的改善。

表1 4种方法直线拟合的参数估值结果(算例1)

Tab. 1 Parameter Estimation Results of Four Methods (Case 1)

方案	$\hat{\beta}_1/m$	$\hat{\beta}_2/m$	$\ \Delta\beta\ $
LS	6.99	15.172	1.172
WLS	7.032	14.348	0.349
BCWLS	7.013	14.334	0.334
SIM	7.041	14.168	0.173
真值	7	14	—

为了进一步证明SIM法中所加入的惩罚因子对于算法结果的影响, 在相同条件下, 对比没有加入惩罚因子的SIM法(即式(15))与加入了可变惩罚因子的SIM法(即式(20))的迭代过程, 以此来说明惩罚因子在算法中起到的作用, 对比结果如图3所示。

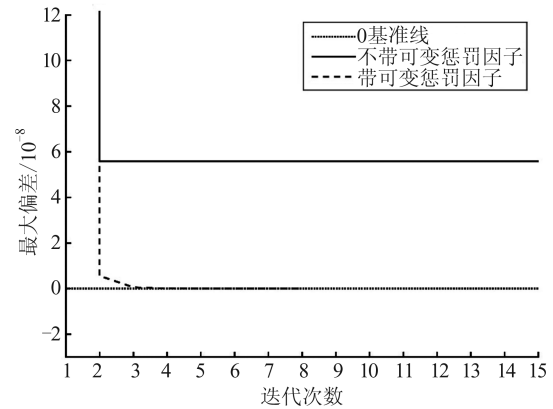


图3 惩罚因子对算法结果的影响

Fig. 3 Influence of Penalty Factor on Algorithm Results

图3中, 纵坐标最大偏差为通过式(15)计算得到的  $V_p$  向量中的最大值, 当该值小于或等于 0 时, 可以说明参数符合约束条件, 算法迭代收敛。由图3可以看出, 未增加可变惩罚因子的SIM法在迭代后期对非可行域中的解的惩罚力度不够, 导致迭代无法收敛, 无法得到有效的参数估值; 而增加了可变惩罚因子后, 算法在经过8次迭代后便可以成功收敛, 从而在一定程度上可以证明所设定的惩罚因子对算法的运行具有较好的推动作用, 验证了惩罚因子的合理性和有效性。

为了进一步验证SIM法对于附有不等式约束的加乘性混合误差模型的可行性和有效性, 将

利用 4 种方法得到的参数估值与真值之间的二范数在相同的加乘性误差分布下通过 MC (Monte Carlo) 方法模拟计算  $2 \times 10^5$  次, 并将  $2 \times 10^5$  次 MC 模拟计算分为 200 个批次, 每个批次模拟 1 000 次, 每一批次的二范数结果取该批次 1 000 次模拟结果的均值。4 种方法在各批次中的二范数如图 4 所示。

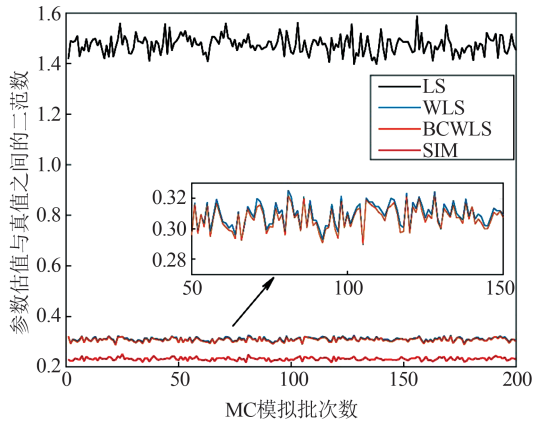


图 4 4 种方法在各批次中的二范数

Fig. 4 2-Norm of Four Methods in Each Batch

从图 4 中可以看出, 在多批次的模拟实验下, 通过 SIM 法得到的参数估值与参数真值之间的二范数相比于其他 3 种方法处于较低的水平, 且结果较为稳定, 从统计上证明了该方法的可行性和有效性, 从而说明了 SIM 法在大样本的情况下具有较优的统计特性。

### 3.2 算例 2

在实际中, 数字高程模型 (digital elevation model, DEM) 在水文、土壤、气象等领域均有广泛的应用价值<sup>[15]</sup>, 因此, 对于在多种误差影响下还原真实 DEM 的研究显得很重要。基于此, 算例 2 采用一个非线性强度更高、更为复杂的多峰数字

地面高程模型来进一步验证本文方法的可行性和有效性。

算例 2-1: 假设 DEM 包含 8 个未知参数, 其模型计算式如下:

$$G(x, y) = F(x, y) \odot (1 + \epsilon_m) + \epsilon_a \quad (28)$$

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^8 \beta_i f_i(x, y) \quad (29)$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \exp(-((x + 17)^2 + (y - 49)^2)/410) \\ f_2(x, y) = \exp(-((x - 21)^2 + (y - 11)^2)/320) \\ f_3(x, y) = \exp(-((x - 15)^2 + (y - 26)^2)/240) \\ f_4(x, y) = \exp(-((x - 10)^2 + (y - 0)^2)/290) \\ f_5(x, y) = \exp(-((x + 14)^2 + (y + 35)^2)/250) \\ f_6(x, y) = \exp(-((x - 41)^2 + (y - 17)^2)/260) \\ f_7(x, y) = \exp(-((x + 44)^2 + (y + 55)^2)/350) \\ f_8(x, y) = \exp(-((x - 20)^2 + (y + 48)^2)/260) \end{cases} \quad (30)$$

式中,  $G(x, y)$  表示 DEM 中各点的高程;  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  表示未知参数。

对算例 2-1 的模拟中, 设定 DEM 中的乘性误差  $\epsilon_m$  和加性误差  $\epsilon_a$  的标准差分别为 0.1 和 0.3 m。未受影响和受加乘性混合误差影响的 DEM 分别如图 5(a)、5(b) 所示, 图 5(c)、5(d) 分别为两种 DEM 的 Y-Z 视图。由图 5 可以看出, 虽然  $\epsilon_m$  的标准差仅为 0.1, 但受到两种混合误差的影响, 呈现出的 DEM 中部分点位的高程已严重失真, 偏离实际。其中, 在 DEM 最高峰处高程偏离最大, 达到了 39.82 m。为验证算法在不同参数约束条件下的适用性和稳定性, 参数的先验信息 (不等式约束条件) 通过随机模拟生成, 设定的 DEM 模型参数不等式约束条件  $G_2$  和  $\omega_2$  分别为:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0.786 & 1.830 & 0.952 & 1.100 & 1.293 & 1.594 & 0.958 & 0.657 \\ 1.713 & 1.904 & 0.552 & 0.511 & 0.693 & 1.242 & 0.507 & 0.597 \\ 1.116 & 1.159 & 1.701 & 1.415 & 0.753 & 1.016 & 1.653 & 1.832 \\ 0.153 & 1.811 & 0.932 & 1.203 & 0.468 & 1.333 & 0.990 & 0.853 \\ 0.498 & 0.528 & 1.943 & 0.477 & 0.096 & 0.748 & 1.464 & 1.047 \\ 0.250 & 0.548 & 0.700 & 0.868 & 1.554 & 1.282 & 1.988 & 0.363 \\ 0.258 & 0.292 & 1.075 & 1.477 & 0.267 & 0.670 & 0.021 & 0.457 \\ 0.274 & 1.890 & 1.755 & 0.193 & 0.882 & 1.516 & 0.333 & 0.061 \end{bmatrix}, \omega_2 = \begin{bmatrix} 1030.961 \\ 815.067 \\ 1290.680 \\ 837.761 \\ 828.056 \\ 1038.607 \\ 424.115 \\ 676.233 \end{bmatrix}$$

表 2 为 4 种方法计算出的各个参数估计结果、真值以及估值与真值之间的二范数。从表 2 可以看出, 充分利用未知参数先验信息的 SIM 法能够在很大程度上提高参数估值的质量, 其得到的参数估计结果相较于其他 3 种方法更加接近参数真值, 二范数比其他 3 种方法分别降低了 35.5%、25.9% 和 25.4%。结果也与算例 1 相符。

考虑到目前测量仪器的精密性, 同时结合文献[14], 设计了 1 组更加贴近实际的模拟实验, 算例 2-2 设定 DEM 中的乘性误差  $\epsilon_m$  和加性误差  $\epsilon_a$  的标准差分别为 0.05 和 0.15 m。为了进一步验证 SIM 算法在不同参数约束条件下的适用性和稳定性, 重新随机模拟出一组参数的先验信息。设定的不等式约束条件  $G_3$  和  $\omega_3$  分别为:

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0.371 & 0.430 & 1.546 & 0.696 & 0.631 & 1.791 & 0.746 & 0.102 \\ 0.738 & 1.563 & 1.659 & 0.576 & 0.080 & 0.454 & 1.332 & 1.231 \\ 0.085 & 1.948 & 0.168 & 0.560 & 0.589 & 0.565 & 0.518 & 0.061 \\ 0.413 & 1.571 & 0.184 & 0.050 & 0.961 & 0.510 & 0.149 & 1.630 \\ 1.334 & 1.724 & 1.369 & 0.212 & 1.853 & 1.077 & 0.340 & 0.879 \\ 1.457 & 0.706 & 0.852 & 0.964 & 0.714 & 1.645 & 1.161 & 1.245 \\ 0.292 & 1.297 & 1.842 & 1.086 & 0.794 & 0.682 & 0.990 & 1.879 \\ 1.828 & 0.637 & 0.822 & 0.584 & 1.417 & 0.142 & 1.200 & 1.630 \end{bmatrix}, \omega_3 = \begin{bmatrix} 663.936 \\ 891.988 \\ 477.203 \\ 670.215 \\ 1018.484 \\ 1026.150 \\ 1054.889 \\ 1123.785 \end{bmatrix}$$

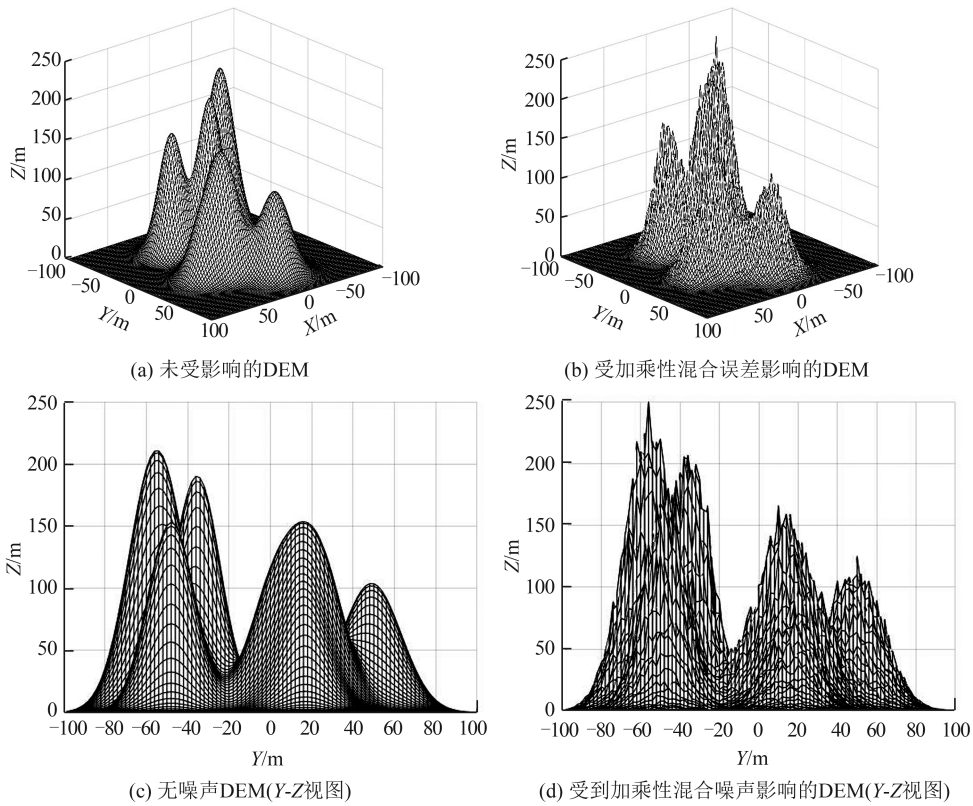


图5 未受影响和受加乘性混合误差影响的DEM

Fig. 5 Unaffected and Affected by Mixed Additive and Multiplicative Error of DEM

表2 4种方法的参数估计结果(算例2-1)

Tab. 2 Parameter Estimation Results of Four Methods (Case 2-1)

方法	$\hat{\beta}_1/m$	$\hat{\beta}_2/m$	$\hat{\beta}_3/m$	$\hat{\beta}_4/m$	$\hat{\beta}_5/m$	$\hat{\beta}_6/m$	$\hat{\beta}_7/m$	$\hat{\beta}_8/m$	$\ \Delta\beta\ $
LS	104.327	76.903	83.840	68.889	186.532	65.938	210.453	152.266	10.677
WLS	105.042	76.965	85.477	70.860	187.218	66.574	211.900	152.875	9.301
BCWLS	104.101	76.406	84.684	70.002	185.479	65.996	210.037	151.624	9.240
SIM	104.291	75.124	84.744	73.751	187.708	64.654	209.406	153.955	6.889
真值	104.000	75.000	85.000	79.000	184.000	66.000	210.000	152.000	—

4种方法的参数估计结果见表3。从表3可以看出,SIM能够充分利用先验约束信息,获取更高质量的参数估值,说明SIM能够适应不同先验信息,在复杂多变的先验条件下保持良好的适用性,得到的结果与前文两种算例相符。

同理,绘制带有可变惩罚因子的SIM法与不带可变惩罚因子的SIM法的迭代过程,如图6所示。通过分析几组算例得到的结果可以看出,带有可

变惩罚因子的SIM法能够充分利用参数的先验信息,从而有效地提高参数估值的质量,同时,通过两组对比实验表明,相较于传统的SIM法,带有可变惩罚因子的SIM法能够帮助算法在迭代后期有效收敛,也表明了本文所选择的惩罚因子的合理性和有效性。由此,使用SIM法解决不等式约束下加乘性混合误差模型的可行性和有效性得以验证。

表 3 4 种方法的参数估计结果(算例 2-2)

Tab. 3 Parameter Estimation Results of Four Methods (Case 2-2)

方法	$\hat{\beta}_1/m$	$\hat{\beta}_2/m$	$\hat{\beta}_3/m$	$\hat{\beta}_4/m$	$\hat{\beta}_5/m$	$\hat{\beta}_6/m$	$\hat{\beta}_7/m$	$\hat{\beta}_8/m$	$\ \Delta\beta\ $
LS	104.111	71.214	85.912	71.166	184.878	66.128	209.400	153.363	8.919
WLS	105.549	73.608	85.934	71.987	185.743	66.627	212.135	153.546	8.048
BCWLS	104.495	72.892	85.104	71.264	184.039	65.883	209.852	152.134	8.037
SIM	105.266	73.072	85.457	72.166	183.790	66.719	211.469	152.712	7.447
真值	104.000	75.000	85.000	79.000	184.000	66.000	210.000	152.000	—

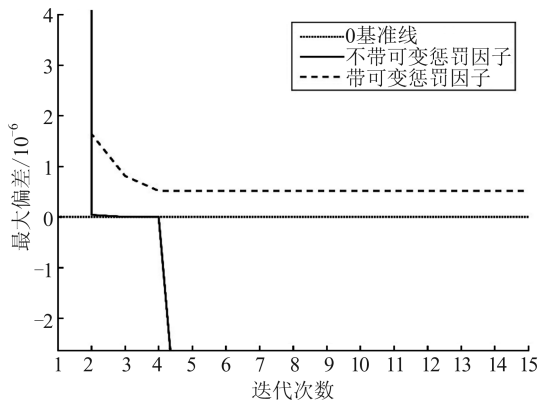


图 6 惩罚因子对算法结果的影响(算例 2-2)

Fig. 6 Influence of Penalty Factor on Algorithm Results (Case 2-2)

## 4 结 语

本文首先在现有研究的基础上分析了加乘性混合误差模型的最小二乘解法,顾及研究前期能够获取的参数先验信息,建立了附有不等式约束的加乘性混合误差模型,结合惩罚函数以及零权和无限权的思想,推导了不等式约束下加乘性混合误差模型的简单迭代解,针对原有 SIM 解算非线性强度较高的加乘性混合误差模型会出现结果不收敛的问题,在算法中加入 1 个随迭代次数增加而增加的惩罚因子,从而能够使算法在迭代后期有效收敛。结合算例分析,给出以下结论:

1) 本文方法能够充分利用模型参数的先验不等式约束信息,求解出不等式约束下加乘性混合误差模型的参数估值,并且得到的参数信息均优于常规方法,证明了该方法的可行性和有效性。

2) 推导出的带有可变惩罚因子不等式约束下加乘性混合误差模型的简单迭代解,通过实验证明了该方法能够解决常规 SIM 在高非线性强度模型中不收敛的问题,但是对于如何选择一个更加合理的可变惩罚因子以提升方法的效率和质量,此问题还有待研究。

3) 本文方法适用于不同数据量级的加乘性

混合误差模型,对于大数据量的模型也具有一定的可靠性,且方法原理简单,构造简洁易懂,易于编程实现。

4) 本文研究完善了加乘性混合误差模型参数估计理论,是对附有不等式约束的加乘性混合误差模型参数估计方法理论的一个重要补充,但是本文方法仅适用于非病态且不等式约束系数矩阵列满秩的加乘性混合误差模型,对于约束矩阵秩亏的加乘性混合误差模型的参数估计方法有待研究;同时,现有的加乘性混合误差模型的计算方法是建立在式(1)中的  $f(\beta)$  为线性函数的基础上来推导的,对于  $f(\beta)$  在非线性形式下的方法应用还有待验证。

## 参 考 文 献

- [1] Rodriguez E, Martin J M. Theory and Design of Interferometric Synthetic Aperture Radars [J]. *IEEE Proceedings of Radar and Signal Processing*, 1992, 139(2): 147.
- [2] Wu Xinghui, Ma Haitao, Zhang Jie. Development Status and Application of Ground-Based Synthetic Aperture Radar[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(7): 1073-1081. (吴星辉, 马海涛, 张杰. 地基合成孔径雷达的发展现状及应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(7): 1073-1081.)
- [3] Jia Yan, Jin Shuanggen, Xiao Zhiyu, et al. Soil Moisture Remote Sensing Using Global Navigation Satellite System-Reflectometry: Current Status and Opportunity[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(11): 1784-1799. (贾燕, 金双根, 肖智宇, 等. 全球导航卫星系统反射测量土壤水分遥感: 现状与机遇[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(11): 1784-1799.)
- [4] Schilizzi R T. Very Long Baseline Interferometry [J]. *Radio Science*, 1986, 21(4): 665-679.
- [5] Xu P L. Despeckling SAR-Type Multiplicative Noise[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 1999, 20(13): 2577-2596.
- [6] Painam R K, Manikandan S. A Comprehensive Re-



- view of SAR Image Filtering Techniques: Systematic Survey and Future Directions[J]. *Arabian Journal of Geosciences*, 2021, 14(1): 37.
- [7] Lin Q, Allebach J P. Combating Speckle in SAR Images: Vector Filtering and Sequential Classification Based on a Multiplicative Noise Model[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1990, 28(4): 647-653.
- [8] Xu P L, Shimada S. Least Squares Parameter Estimation in Multiplicative Noise Models[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2000, 29(1): 83-96.
- [9] Shi Yun. Least Squares Adjustment and Accuracy Estimation in Multiplicative Error Models[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2014, 49(5): 799-803. (师芸. 乘性随机误差模型的最小二乘平差与精度评定[J]. 西南交通大学学报, 2014, 49(5): 799-803.)
- [10] Wang Leyang, Chen Tao, Zou Chuanyi. Weighted Least Squares Regularization Iteration Solution and Precision Estimation for Ill-Posed Multiplicative Error Model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2021, 50(5): 589-599. (王乐洋, 陈涛, 邹传义. 病态乘性误差模型的加权最小二乘正则化迭代解法及精度评定[J]. 测绘学报, 2021, 50(5): 589-599.)
- [11] Xu P L, Shi Y, Peng J H, et al. Adjustment of Geodetic Measurements with Mixed Multiplicative and Additive Random Errors[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(7): 629-643.
- [12] Shi Yun. Least Squares Parameter Estimation in Additive/Multiplicative Error Models for Use in Geodesy[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(9): 1033-1037. (师芸. 加乘性混合误差模型参数估计方法及其应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2014, 39(9): 1033-1037.)
- [13] Wang L Y, Chen T. Virtual Observation Iteration Solution and A-Optimal Design Method for Ill-Posed Mixed Additive and Multiplicative Random Error Model in Geodetic Measurement [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2021, 147(4): 04021016.
- [14] Shi Y, Xu P L. Adjustment of Measurements with Multiplicative Random Errors and Trends[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2021, 18(11): 1916-1920.
- [15] Zhu Jianjun, Xie Jian, Chen Yubo, et al. Research on Theory and Methods of Inequality Constrained Least Squares [J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2008, 17(6): 1-5. (朱建军, 谢建, 陈宇波, 等. 附不等式约束平差的理论与方法研究[J]. 测绘工程, 2008, 17(6): 1-5.)
- [16] Judge G G, Takayama T. Inequality Restrictions in Regression Analysis [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1966, 61(313): 166-181.
- [17] Xie Xuemei, Song Yingchun, Xiao Zhaobing. A Fast Search Algorithm in Adjustment Model with Inequality Constraint [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(9): 1349-1354. (谢雪梅, 宋迎春, 肖兆兵. 附不等式约束平差模型的一种快速搜索算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(9): 1349-1354.)
- [18] Remondi B W. Real-Time Centimeter-Accuracy GPS: Initializing While in Motion (Warm Start Versus Cold START)[J]. *Navigation*, 1993, 40(2): 199-208.
- [19] Liu X L, Zhou M. A One-Layer Recurrent Neural Network for Non-smooth Convex Optimization Subject to Linear Inequality Constraints [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2016, 87: 39-46.
- [20] Wang Leyang, Li Haiyan, Chen Xiaoyong. A Quasi Newtonian Correction Algorithm for Weighted Total Least Squares Problem with Inequality Constraints [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(1): 127-132. (王乐洋, 李海燕, 陈晓勇. 拟牛顿修正法解算不等式约束加权总体最小二乘问题[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(1): 127-132.)
- [21] Xie Jian, Long Sichun, Li Li, et al. An Aggregate Function Method for Weighted Total Least Squares with Inequality Constraints[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(10): 1526-1530. (谢建, 龙四春, 李黎, 等. 不等式约束加权整体最小二乘的凝聚函数法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(10): 1526-1530.)
- [22] Zhu Jianjun, Xie Jian. A Simple Iterative Algorithm for Inequality Constrained Adjustment [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(2): 209-212. (朱建军, 谢建. 附不等式约束平差的一种简单迭代算法[J]. 测绘学报, 2011, 40(2): 209-212.)
- [23] Wang Leyang, Zou Chuanyi. Sterling Interpolation Method for Parameter Estimation and Precision Estimation in Multiplicative Error Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(2): 219-225. (王乐洋, 邹传义. 乘性误差模型参数估计及精度评定的Sterling插值方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(2): 219-225.)