

引文格式:朱少林,岳东杰,何丽娜,等.BDS-2/BDS-3融合三频精密单点定位模型及偏差特性分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(12):2049-2059.DOI:10.13203/j.whugis20210273



Citation: ZHU Shaolin, YUE Dongjie, HE Lina, et al. BDS-2/BDS-3 Joint Triple-Frequency Precise Point Positioning Models and Bias Characteristic Analysis[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2023, 48(12): 2049-2059. DOI: 10.13203/j.whugis20210273

BDS-2/BDS-3融合三频精密单点定位模型及偏差特性分析

朱少林¹ 岳东杰¹ 何丽娜¹ 陈健² 刘胜男¹

¹ 河海大学地球科学与工程学院,江苏 南京,211100

² 安徽理工大学空间信息与测绘工程学院,安徽 淮南,232001

摘要:北斗三号全球卫星导航系统(global BeiDou-3 navigation satellite system, BDS-3)正联合北斗二号(区域)卫星导航系统(BeiDou-2 navigation satellite system, BDS-2)在3个或3个以上频率信号上为用户提供高精度的定位、导航和授时服务。为深度融合BDS-2和BDS-3三频数据,建立了BDS-2/BDS-3三频无电离层组合和三频非组合精密单点定位(precise point positioning, PPP)模型,推导了接收机频间偏差(inter-frequency bias, IFB)和BDS-2与BDS-3时间延迟偏差(time delay bias, TDB)的数学表达式。对PPP定位性能及模型偏差特性进行分析,结果表明:BDS-3能显著增强PPP定位性能,BDS-2/BDS-3融合静态PPP在东、北、天3个方向上的收敛时间和定位精度分别为15.8、7.3、22.3 min和1.2、1.0、1.8 cm,动态PPP收敛时间和定位精度分别为27.3、10.3、33.8 min和2.2、1.7、4.4 cm;三频无电离层组合与非组合PPP的收敛性能和定位精度基本相当,且三频观测值对定位性能提升不明显;IFB和TDB均具有较好的天内稳定性,BDS-2和BDS-3信号IFB天内标准差(standard deviation, STD)可分别达到7.9 cm和3.6 cm,而TDB天内STD可达到8.8 cm。

关键词:BDS-2; BDS-3; 三频精密单点定位; 接收机频间偏差; 时间延迟偏差

中图分类号:P228

文献标识码:A

收稿日期:2021-08-21

DOI:10.13203/j.whugis20210273

文章编号:1671-8860(2023)12-2049-11

BDS-2/BDS-3 Joint Triple-Frequency Precise Point Positioning Models and Bias Characteristic Analysis

ZHU Shaolin¹ YUE Dongjie¹ HE Lina¹ CHEN Jian² LIU Shengnan¹

¹ School of Earth Sciences and Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China

² School of Spatial Informatics and Geomatics Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China

Abstract: Objectives: The global BeiDou-3 navigation satellite system (BDS-3) along with regional BeiDou navigation satellite system (BDS-2) is providing users with high-precision positioning, navigation and timing services on three or more frequency signals. To deeply integrate the triple-frequency observations of BDS-2 and BDS-3, we establish the BDS-2/BDS-3 joint triple-frequency precise point positioning (PPP) models and analyze the characteristics of biases arisen in these models. **Methods:** Using the linear combinations of raw observations, the triple-frequency ionosphere-free and uncombined PPP models are developed. In particular, the mathematical expressions of receiver inter-frequency bias (IFB) and time delay bias (TDB) between BDS-2 and BDS-3 are derived. **Results:** The experimental results show that BDS-3 can significantly enhance the PPP performance. In static mode, the BDS-2/BDS-3 joint PPP is able to achieve the positioning accuracy of 1.2/1.0/1.8 cm after the convergence time of 15.8/7.3/22.3 min in the east/north/

基金项目:国家自然科学基金(41404025);中央高校基本科研业务费专项资金(B210203048, B200203107);矿山环境与灾害空天地协同监测煤炭行业工程研究中心开放基金(KSXTJC202006)。

第一作者:朱少林,博士生,研究方向为GNSS精密单点定位及相关应用。zhushaolin_ch@hhu.edu.cn

通讯作者:岳东杰,博士,教授。yuedongjie@163.com

up components. As for kinematic PPP, the convergence time and converged positioning accuracy are 27.3/10.3/33.8 min and 2.2/1.7/4.4 cm, respectively. **Conclusions:** The convergence performance and positioning accuracy of triple-frequency ionosphere-free and uncombined PPP models are comparable, and the third frequency signal makes a marginal contribution to positioning performance. Both IFB and TDB show the good intra-day stability. The intra-day standard deviations (STD) of IFB can reach 7.9 and 3.6 cm for BDS-2 and BDS-3 signals, respectively, and the intra-day STD of TDB can reach 8.8 cm.

Key words: BeiDou-2 navigation satellite system (BDS-2); BeiDou-3 navigation satellite system (BDS-3); triple-frequency precise point positioning; receiver inter-frequency bias; time delay bias

按照北斗卫星导航系统(BeiDou navigation satellite system, BDS)“三步走”发展战略,中国 BDS 已从双星定位系统(北斗一号, BDS-1)到区域定位系统(北斗二号, BDS-2),最后建设完成了全球定位系统(北斗三号, BDS-3)^[1-2]。BDS-3 于 2020-07-31 正式开通,并联合 BDS-2 为全球用户提供高精度的定位、导航和授时(positioning, navigation and timing, PNT)服务。BDS-2 和 BDS-3 均为混合星座,包括中圆地球轨道(medium Earth orbit, MEO)卫星、倾斜地球同步轨道(inclined geosynchronous orbit, IGSO)卫星和地球静止轨道(geostationary Earth orbit, GEO)卫星。BDS-2 现有 3 颗 MEO、7 颗 IGSO 和 5 颗 GEO 在轨运行卫星。完整的 BDS-3 星座由 24 颗 MEO、3 颗 IGSO 和 3 颗 GEO 卫星组成。相比于 BDS-2, BDS-3 采用更多的 MEO 卫星,其轨道低、定轨精度高、卫星几何结构变化快,可以加快定位收敛速度和提升定位精度^[3]。

精密单点定位(precise point positioning, PPP)是利用卫星伪距和载波相位观测值以及外部提供的高精度卫星轨道和钟差产品,采用合理的参数估计策略实现单台接收机的全球高精度绝对定位的一项技术,其精度一般可达分米至毫米级^[4]。PPP 技术自问世以来,大多采用双频 PPP 模型^[5]。随着全球导航卫星系统(global navigation satellite system, GNSS)发射的信号频率不断增加,多频 PPP 已成为当前的研究热点和发展趋势^[6]。

目前,所有 BDS-2 卫星均在 B1I、B2I 和 B3I 3 个频率上发射信号。除传统的 B1I 和 B3I 信号外, BDS-3 系统还可以播发 B1C、B2a 和 B2b 新信号。BDS-2 信号的调制方式不同于 BDS-3 信号,即使在相同频率下,两者也有所区别。由于信号频率不同或信号调制方式不同, BDS-2 和 BDS-3 信号之间存在着一类系统性偏差,称为时间延迟偏差(time delay bias, TDB)^[7]。研究结果表明,将 BDS-2 与 BDS-3 之间的 TDB 作为常数参数进

行估计时,双频 PPP 的定位性能可以得到一定程度的提升^[7-8]。文献[9]进一步分析研究了 TDB 的特性以及 TDB 对 BDS-2/BDS-3 融合双频 PPP 定位性能的影响。另一方面,忽略 BDS-2 和 BDS-3 之间的 TDB 会导致 PPP 高精度时间传递结果产生明显的偏差^[10]。

基于 BDS-2 三频信号,文献[11-12]系统研究了 3 种 BDS-2 三频 PPP 模型并对比分析了不同模型的定位性能。在 BDS-3 建设过程中,一些学者对 BDS-3 以及 BDS-3 联合 BDS-2 或者其他 GNSS 系统的双频 PPP 定位性能进行了分析和验证。文献[13]使用欧洲 GNSS 测站的 BDS-2、BDS-3 和 GPS 双频观测数据评估了 PPP-实时动态(real-time kinematic, RTK)定位的性能,表明 BDS 观测值的加入能提升 GPS 的模糊度固定性能和定位精度。对于 BDS-3 基本系统,双频 PPP 表现出较差的定位性能,一般需要几个小时的收敛时间才能达到 1 dm 的定位精度水平^[14]。文献[15]验证了联合 BDS-3 可以明显缩短亚太地区测站的双频 PPP 定位收敛时间,但是由于 BDS-3 B1C 新信号可用的数量有限,使用 B1C 信号并没有改善 PPP 定位性能。文献[16]通过亚太地区 4 个 GNSS 测站的观测数据初步评估了 BDS-2/BDS-3 三频 PPP 的定位性能,同样验证了 BDS-3 可以提升定位收敛和定位精度。此外,由于现阶段北斗卫星实时轨道和钟差产品的精度较低,基于双频无电离层组合观测值的 BDS-3 或 BDS-2/BDS-3 实时 PPP 定位性能比 GPS 实时 PPP 差^[17-18]。

以上研究大多针对 BDS-2/BDS-3 双频 PPP 及 BDS-2 与 BDS-3 间偏差进行验证与分析,但鲜有文献对 BDS-2/BDS-3 融合三频 PPP 模型进行研究,而且对其模型偏差的产生机制及变化特性缺乏深入探讨。为深度融合和充分利用 BDS-2 和 BDS-3 多频观测数据,本文从原始非差非组合观测方程出发,在精细考虑不同频率和不同信号伪距硬件偏差的基础上,详细研究了 BDS-2/

BDS-3 三频无电离层组合 (IF1213 和 IF123) 和非组合 (UC123) PPP 模型, 并推导了接收机频间偏差 (inter-frequency bias, IFB) 和 BDS-2 与 BDS-3 TDB 的数学表达式。本文利用三频 PPP 实验验证了其理论正确性并分析了 BDS-2/BDS-3 三频 PPP 定位性能及模型偏差特性。

1 BDS-2/BDS-3 三频 PPP 模型

1.1 函数模型

一般地, 接收机 r 接收到卫星 s 发射的第 i ($i=1, 2, 3$) 频率信号的非差非组合伪距和载波相位观测值可表达为^[19]:

$$\begin{cases} p_{r,i}^{s,Q} = \mathbf{u}_r^{s,Q} \cdot \mathbf{x} + dt_r - dt^{s,Q} + M_w \cdot Z_w + \\ \gamma_i^Q \cdot I_{r,1}^{s,Q} + d_{r,i}^Q - d_i^{s,Q} + \epsilon_{r,i}^{s,Q} \\ l_{r,i}^{s,Q} = \mathbf{u}_r^{s,Q} \cdot \mathbf{x} + dt_r - dt^{s,Q} + M_w \cdot Z_w - \\ \gamma_i^Q \cdot I_{r,1}^{s,Q} + N_{r,i}^{s,Q} + b_{r,i}^Q - b_i^{s,Q} + \xi_{r,i}^{s,Q} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $p_{r,i}^{s,Q}$ 和 $l_{r,i}^{s,Q}$ 分别表示伪距和载波相位的观测值减去计算量; Q 为 C2 和 C3, 分别表示 BDS-2 和 BDS-3; $\mathbf{u}_r^{s,Q}$ 为接收机与卫星连线方向的单位向量; $\mathbf{x}$ 为三维坐标增量向量; dt_r 和 $dt^{s,Q}$ 分别表示接收机和卫星钟差; Z_w 和 M_w 分别为对流层天顶湿延迟以及对应的湿投影函数; $I_{r,1}^{s,Q}$ 为第一频率上的电离层斜延迟; $\gamma_i^Q = (f_1^Q)^2 / (f_i^Q)^2$ 为与频率 f 相关的电离层放大因子; $N_{r,i}^{s,Q}$ 表示以 m 为单位的载波相位模糊度; $d_{r,i}^Q$ 和 $d_i^{s,Q}$ 分别为接收机和卫星伪距硬件延迟; $b_{r,i}^Q$ 和 $b_i^{s,Q}$ 分别为接收机和卫星相位硬件延迟; $\epsilon_{r,i}^{s,Q}$ 和 $\xi_{r,i}^{s,Q}$ 分别表示伪距和载波相位观测噪声。

传统地, 通过双频无电离层线性组合方式消除电离层延迟误差, 双频无电离层组合伪距和载波相位观测值可表达为:

$$\begin{cases} p_{r,IF_{mn}}^{s,Q} = \alpha_{mn}^Q \cdot p_{r,m}^{s,Q} + \beta_{mn}^Q \cdot p_{r,n}^{s,Q} \\ l_{r,IF_{mn}}^{s,Q} = \alpha_{mn}^Q \cdot l_{r,m}^{s,Q} + \beta_{mn}^Q \cdot l_{r,n}^{s,Q} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $m, n=1, 2, 3$ 且 $m \neq n$; α_{mn}^Q 和 β_{mn}^Q 为双频无电离层组合因子, 即:

$$\begin{cases} \alpha_{mn}^Q = \frac{(f_m^Q)^2}{(f_m^Q)^2 - (f_n^Q)^2} \\ \beta_{mn}^Q = -\frac{(f_n^Q)^2}{(f_m^Q)^2 - (f_n^Q)^2} \end{cases} \quad (3)$$

由于 BDS-2 和 BDS-3 信号在接收机端产生的伪距硬件延迟不同, BDS-2/BDS-3 融合 PPP 模型需增加一个 TDB 参数。另外, 精密卫星钟差产品吸收了第一、二频率的无电离层组合形式的

伪距硬件延迟, 即 $dt_{IF_{12}}^{s,Q} = dt_r^{s,Q} + d_{IF_{12}}^{s,Q[20]}$ 。引入精密卫星钟差并通过卫星差分码偏差 (differential code bias, DCB) 改正伪距观测值, BDS-2/BDS-3 双频无电离层两两组合 PPP 模型 IF1213 的表达式为:

$$\begin{cases} p_{r,IF_{12}}^{s,Q} = \mathbf{u}_r^{s,Q} \cdot \mathbf{x} + dt_{r,IF_{12}}^{C3} + B_{TD,IF_{12}}^Q + \\ M_w \cdot Z_w + \epsilon_{r,IF_{12}}^{s,Q} \\ p_{r,IF_{13}}^{s,Q} = \mathbf{u}_r^{s,Q} \cdot \mathbf{x} + dt_{r,IF_{12}}^{C3} + B_{TD,IF_{12}}^Q + \\ M_w \cdot Z_w + B_{IF,IF_{1213}}^Q + \epsilon_{r,IF_{13}}^{s,Q} \\ l_{r,IF_{12}}^{s,Q} = \mathbf{u}_r^{s,Q} \cdot \mathbf{x} + dt_{r,IF_{12}}^{C3} + B_{TD,IF_{12}}^Q + \\ M_w \cdot Z_w + B_{r,IF_{12}}^{s,Q} + \xi_{r,IF_{12}}^{s,Q} \\ l_{r,IF_{13}}^{s,Q} = \mathbf{u}_r^{s,Q} \cdot \mathbf{x} + dt_{r,IF_{12}}^{C3} + B_{TD,IF_{12}}^Q + \\ M_w \cdot Z_w + B_{r,IF_{13}}^{s,Q} + \xi_{r,IF_{13}}^{s,Q} \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} dt_{r,IF_{12}}^{C3} = dt_r + d_{r,IF_{12}}^{C3} \\ B_{TD,IF_{12}}^Q = \begin{cases} 0, & Q=C3 \\ d_{r,IF_{12}}^{C2} - d_{r,IF_{12}}^{C3}, & Q=C2 \end{cases} \\ B_{IF,IF_{1213}}^Q = \beta_{12}^Q \cdot B_{DC,12}^Q - \beta_{13}^Q \cdot B_{DC,13}^Q \\ B_{r,IF_{12}}^{s,Q} = \alpha_{1k}^Q \cdot N_{r,1}^{s,Q} + \beta_{1k}^Q \cdot N_{r,k}^{s,Q} + b_{r,IF_{12}}^Q - \\ b_{IF_{12}}^Q + d_{IF_{12}}^{s,Q} - d_{r,IF_{12}}^Q \end{cases} \quad (5)$$

式中, $dt_{r,IF_{12}}^{C3}$ 为吸收 BDS-3 双频无电离层组合伪距硬件延迟的接收机钟差; $B_{TD,IF_{12}}^Q$ 为相对于接收机钟差 $dt_{r,IF_{12}}^{C3}$ 的 TDB; $B_{IF,IF_{1213}}^Q$ 为 IF1213 模型中的 IFB; $B_{DC,mn}^Q = d_{r,m}^Q - d_{r,n}^Q$ 为接收机差分码偏差; $B_{r,IF_{12}}^{s,Q}$ ($k=2, 3$) 为重新参数化的载波相位模糊度; $\epsilon_{r,IF_{12}}^{s,Q}$ 和 $\xi_{r,IF_{12}}^{s,Q}$ ($k=2, 3$) 分别为双频无电离层组合伪距和载波相位观测值噪声。

另外, 电离层延迟误差也可以通过三频无电离层组合消除, 三频无电离层组合伪距和载波相位观测值可表示为:

$$\begin{cases} p_{r,IF_{123}}^{s,Q} = \kappa_1^Q \cdot p_{r,1}^{s,Q} + \kappa_2^Q \cdot p_{r,2}^{s,Q} + \kappa_3^Q \cdot p_{r,3}^{s,Q} \\ l_{r,IF_{123}}^{s,Q} = \kappa_1^Q \cdot l_{r,1}^{s,Q} + \kappa_2^Q \cdot l_{r,2}^{s,Q} + \kappa_3^Q \cdot l_{r,3}^{s,Q} \end{cases} \quad (6)$$

式中, κ_1^Q 、 κ_2^Q 和 κ_3^Q 为三频无电离层组合因子, 满足一阶电离层延迟为零、几何距离不变以及观测值噪声最小 3 个条件, 即:

$$\begin{cases} \kappa_1^Q = \frac{(\gamma_2^Q)^2 + (\gamma_3^Q)^2 - \gamma_2^Q - \gamma_3^Q}{2((\gamma_2^Q)^2 + (\gamma_3^Q)^2 - \gamma_2^Q \cdot \gamma_3^Q - \gamma_2^Q - \gamma_3^Q + 1)} \\ \kappa_2^Q = \frac{(\gamma_3^Q)^2 - \gamma_2^Q \cdot \gamma_3^Q - \gamma_2^Q + 1}{2((\gamma_2^Q)^2 + (\gamma_3^Q)^2 - \gamma_2^Q \cdot \gamma_3^Q - \gamma_2^Q - \gamma_3^Q + 1)} \\ \kappa_3^Q = \frac{(\gamma_2^Q)^2 - \gamma_2^Q \cdot \gamma_3^Q - \gamma_3^Q + 1}{2((\gamma_2^Q)^2 + (\gamma_3^Q)^2 - \gamma_2^Q \cdot \gamma_3^Q - \gamma_2^Q - \gamma_3^Q + 1)} \end{cases} \quad (7)$$

引入精密卫星钟差并通过卫星 DCB 改正伪距观测值, BDS-2/BDS-3 三频无电离层组合 PPP

模型 IF123 表示为:

$$\begin{cases} p_{r,IF123}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF123}^{C3} + B_{TD,IF123}^Q + \\ M_w \cdot Z_w + \epsilon_{r,IF123}^{s,Q} \\ l_{r,IF123}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF123}^{C3} + B_{TD,IF123}^Q + \\ M_w \cdot Z_w + B_{r,IF123}^{s,Q} + \xi_{r,IF123}^{s,Q} \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{cases} dt_{r,IF123}^{C3} = dt_r + d_{r,IF123}^{C3} \\ B_{TD,IF123}^Q = \begin{cases} 0, Q=C3 \\ d_{r,IF123}^{C2} - d_{r,IF123}^{C3}, Q=C2 \end{cases} \\ B_{r,IF123}^{s,Q} = \kappa_1^Q \cdot N_{r,1}^{s,Q} + \kappa_2^Q \cdot N_{r,2}^{s,Q} + \kappa_3^Q \cdot N_{r,3}^{s,Q} + \\ b_{r,IF123}^{s,Q} - b_{IF123}^{s,Q} + d_{IF12}^{s,Q} - d_{r,IF123}^{s,Q} \end{cases} \quad (9)$$

式中, $dt_{r,IF123}^{C3}$ 为吸收 BDS-3 三频无电离层组合伪距硬件延迟的接收机钟差; $B_{TD,IF123}^Q$ 为相对于接收机钟差 $dt_{r,IF123}^{C3}$ 的 TDB; $B_{r,IF123}^{s,Q}$ 表示重新参数化的载波相位模糊度; $\epsilon_{r,IF123}^{s,Q}$ 和 $\xi_{r,IF123}^{s,Q}$ 分别为三频无电离层组合伪距和载波相位观测值噪声。

另一种处理电离层延迟误差的方法是直接采用原始观测值来估计电离层延迟参数, BDS-2/BDS-3 三频非组合 PPP 模型 UC123 表示为:

$$\begin{cases} p_{r,1}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF12}^{C3} + B_{TD,IF12}^Q + M_w \cdot Z_w + \\ \gamma_1^Q \cdot \bar{I}_{r,1}^{s,Q} + \epsilon_{r,1}^{s,Q} \\ p_{r,2}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF12}^{C3} + B_{TD,IF12}^Q + M_w \cdot Z_w + \\ \gamma_2^Q \cdot \bar{I}_{r,1}^{s,Q} + \epsilon_{r,2}^{s,Q} \\ p_{r,3}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF12}^{C3} + B_{TD,IF12}^Q + M_w \cdot Z_w + \\ \gamma_3^Q \cdot \bar{I}_{r,1}^{s,Q} + B_{IF,UC}^Q + \epsilon_{r,3}^{s,Q} \\ l_{r,1}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF12}^{C3} + B_{TD,IF12}^Q + M_w \cdot Z_w - \\ \gamma_1^Q \cdot \bar{I}_{r,1}^{s,Q} + B_{r,1}^{s,Q} + \xi_{r,1}^{s,Q} \\ l_{r,2}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF12}^{C3} + B_{TD,IF12}^Q + M_w \cdot Z_w - \\ \gamma_2^Q \cdot \bar{I}_{r,1}^{s,Q} + B_{r,2}^{s,Q} + \xi_{r,2}^{s,Q} \\ l_{r,3}^{s,Q} = u_r^{s,Q} \cdot x + dt_{r,IF12}^{C3} + B_{TD,IF12}^Q + M_w \cdot Z_w - \\ \gamma_3^Q \cdot \bar{I}_{r,1}^{s,Q} + B_{r,3}^{s,Q} + \xi_{r,3}^{s,Q} \end{cases} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{cases} \bar{I}_{r,1}^{s,Q} = I_{r,1}^{s,Q} + \beta_{12}^Q \cdot B_{DC,12}^Q \\ B_{IF,UC}^Q = \beta_{12}^Q / \beta_{13}^Q \cdot B_{DC,12}^Q - B_{DC,13}^Q \\ B_{r,i}^{s,Q} = N_{r,i}^{s,Q} + b_{r,i}^{s,Q} - b_i^{s,Q} + d_{IF12}^{s,Q} - \\ d_{r,IF12}^{s,Q} + \gamma_i^Q \cdot \beta_{12}^Q \cdot B_{DC,12}^Q \end{cases} \quad (11)$$

式中, $\bar{I}_{r,1}^{s,Q}$ 为吸收接收机差分码偏差的电离层延迟参数; $B_{IF,UC}^Q$ 为 UC123 模型中的 IFB; $B_{r,i}^{s,Q}$ 为重新参数化的载波相位模糊度。

1.2 随机模型

假设 BDS-2 和 BDS-3 三频伪距和载波相位观测值之间互不相关, 则 BDS-2/BDS-3 三频非组合 PPP 的随机模型 Σ_{UC123} 可表示为:

$$\Sigma_{UC123} = \begin{bmatrix} D_p^{C3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_l^{C3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_p^{C2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_l^{C2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} D_p^Q = \text{diag}((\sigma_{1,p}^{s,Q}), (\sigma_{2,p}^{s,Q}), (\sigma_{3,p}^{s,Q})) \\ D_l^Q = \text{diag}((\sigma_{1,l}^{s,Q}), (\sigma_{2,l}^{s,Q}), (\sigma_{3,l}^{s,Q})) \end{cases} \quad (13)$$

式中, D_p^Q 和 D_l^Q 分别为伪距和载波相位观测值的方差-协方差矩阵; $\sigma_{i,p}^{s,Q}$ 和 $\sigma_{i,l}^{s,Q}$ 分别为伪距和载波相位观测值的精度, 可以通过正弦函数 $\sigma = a / \sin E$ 得到, a 为常数, 伪距和载波相位观测值一般设置为 0.3 m 和 3 mm, E 为卫星高度角。根据方差-协方差传播律, 得到双频无电离层两两组合 PPP(IF1213) 和三频无电离层组合 PPP(IF123) 的随机模型为:

$$\begin{cases} \Sigma_{IF1213} = F_1 \cdot \Sigma_{UC123} \cdot F_1^T \\ \Sigma_{IF123} = F_2 \cdot \Sigma_{UC123} \cdot F_2^T \end{cases} \quad (14)$$

其中, F_1 和 F_2 分别为 IF1213 和 IF123 的设计矩阵, 即:

$$\begin{cases} F_1 = \begin{bmatrix} I_2 \otimes \begin{bmatrix} \alpha_{12}^{C3} & \beta_{12}^{C3} & 0 \\ \alpha_{13}^{C3} & 0 & \beta_{13}^{C3} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_2 \otimes \begin{bmatrix} \alpha_{12}^{C2} & \beta_{12}^{C2} & 0 \\ \alpha_{13}^{C2} & 0 & \beta_{13}^{C2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ F_2 = \begin{bmatrix} I_2 \otimes [\kappa_1^{C3} & \kappa_2^{C3} & \kappa_3^{C3}] & 0 \\ 0 & I_2 \otimes [\kappa_1^{C2} & \kappa_2^{C2} & \kappa_3^{C2}] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (15)$$

式中, $\otimes$ 表示两个矩阵的克罗内克乘积; I_2 表示 2 维单位矩阵。

1.3 模型参数与偏差

为了对比三频 PPP 与双频 PPP 的定位性能, 本文也对传统双频无电离层组合 PPP 模型(IF12)进行解算与分析。IF12、IF1213、IF123 和 UC123 模型估计的位置坐标和对流层天顶湿延迟参数均相同。分析 4 种 PPP 模型其余的估计参数和模型偏差, 可以发现不同的观测值组合造成了 PPP 模型不同的相位模糊度参数。IF12、IF1213 和 UC123 模型的接收机钟差吸收了 BDS-3 信号双频无电离层组合伪距硬件延迟, 而 IF123 模型的接收机钟差吸收了 BDS-3 信号三频无电离层组合伪距硬件延迟。另外, 非组合模型 UC123 可以对电离层延迟量进行估计, IF1213 和 UC123 模型需额外估计 IFB 参数。对于 BDS-2 与 BDS-3 间的 TDB 参数, IF12、IF1213 和 UC123

模型三者估计的 TDB 相同,而 IF123 模型则不同。这与接收机钟差参数相关,接收机钟差参数吸收不同的伪距硬件延迟会产生不同的 TDB 参数。从式(5)、式(9)和式(11)可以得出,IFB 和 TDB 均由接收机端的伪距硬件延迟差异引起,IFB 由同一系统不同频率观测值的伪距硬件延迟差异引起,而 TDB 由 BDS-2 和 BDS-3 不同信号观测值的伪距硬件延迟差异引起。

表 1 BDS-2 和 BDS-3 公开服务信号的频率和调制方式

Tab. 1 Frequency and Modulation Mode of BDS-2 and BDS-3 Open Service Signals

BDS-2			BDS-3			备注
信号	频率/MHz	调制方式	信号	频率/MHz	调制方式	
B1I	1 561.098	QPSK	B1I	1 561.098	BPSK	第一频率
			B1C	1 575.420	QMBOC/BOC	
B2I	1 207.140	QPSK	B2a	1 176.450	BPSK	第三频率
			B2b	1 207.140	BPSK	
B3I	1 268.520	BPSK	B3I	1 268.520	BPSK	第二频率

为验证 BDS-2/BDS-3 融合三频 PPP 的定位性能,选取均匀分布的 14 个多系统 GNSS 实验(multi-GNSS experiment, MGEX)测站 2021 年年积日(day of year, DOY)17~44 共 28 d 的观测数据进行实验分析,测站地理分布如图 1 所示。所选测站均具备跟踪 BDS-2 B1I/B3I/B2I 和 BDS-3 B1I/B3I/B2a 三频信号的能力,且满足每个历元跟踪到 BDS-2 或 BDS-3 的卫星数均大于或等于 4 颗。本文 PPP 解算采用的精密卫星轨道和钟差产品由武汉大学分析中心提供。实验采用静态和仿动态 PPP 两种解算模式,静态 PPP 解算的坐标参数为常数估计,而动态 PPP 的坐标参数为白噪声估计。当坐标的东(east, E)、北(north, N)、天(up, U)3 个方向定位误差连续 20 min 小于 1 dm 时,认为 PPP 定位收敛,并将收敛后定位误差的均方根(root mean square, RMS)作为定位精度的统计值。此外,接收机钟差参数为白噪声估计,IFB 参数和 TDB 参数均为常数估计^[8,11]。北斗卫星 DCB 改正值通过中国科学院多系统 DCB 产品的天文文件获得^[21]。对流层干延迟通过 Saastamoinen 模型改正^[22],而湿延迟采用随机游走过程估计,过程噪声设置为 $1 \times 10^{-4} \text{ m}/\sqrt{\text{s}}$ 。为在相同条件下对比 PPP 性能,非组合 UC123 模型未使用外部的电离层产品进行电离层约束,其电离层参数采用随机游走过程估计,过程噪声取 $4.0 \times 10^{-2} \text{ m}/\sqrt{\text{s}}$ ^[23]。BDS-2 MEO 和 IGSO 卫星端伪距多路径偏差通过高度角相关模型改正^[24],BDS-2 GEO 卫星由于精密轨道和钟差产品精度

2 数据介绍及处理策略

表 1 给出了 BDS-2 和 BDS-3 公开服务信号的频率和调制方式,BDS-2/BDS-3 三频 PPP 采用两个公共的频率信号 B1I 和 B3I 分别作为第一和第二频率信号。另外,根据北斗导航卫星系统空间信号接口控制文件,BDS-2 的 B2I 信号将由 BDS-3 的 B2a 信号替代,因此,BDS-2 B2I 和 BDS-3 B2a 作为第三个频率信号。

低而降低其观测值的权重^[25]。天线相位中心偏差通过国际 GNSS 服务组织(International GNSS Service, IGS)提供的文件 igs14_2163.atx 改正,其中,BDS-3 B2a 频率的卫星相位中心偏差由 B1I 频率的卫星相位中心偏差改正数改正,而 BDS 接收机相位中心偏差改正采用 GPS 的接收机相位中心偏差改正数。

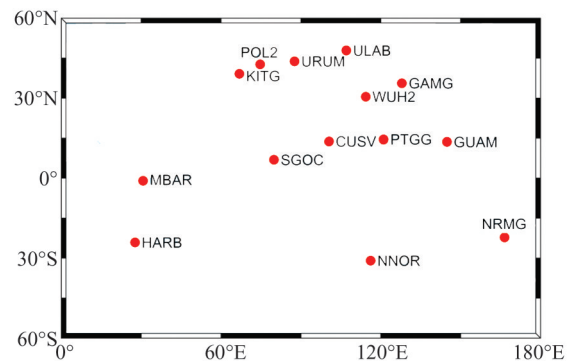


图 1 选取的 14 个 MGEX 测站分布

Fig. 1 Distribution of 14 Selected MGEX Stations

3 BDS-2/BDS-3 三频 PPP 定位性能分析

本节对比分析 3 种三频 PPP 模型以及传统双频无电离层组合 PPP 模型的静态和动态 PPP 定位性能,并分别对 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 3 种星座配置的定位性能进行评估。

3.1 静态 PPP

随机选取 CUSV 测站,图 2 给出了该测站

IF12、IF1213、IF123 和 UC123 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 静态 PPP 定位误差及可用卫星数。如果某颗卫星能为 PPP 模型提供观测值,则认为该卫星可用。对于无电离层组合 PPP 模型,如 IF1213 和 IF123,如果卫星某个频率观测值缺失则该卫星不可用。而在非组合 PPP 模型(如 UC123)中,缺失任意一个或者两个频率

观测值的卫星依然为可用。从图 2 中可以看出,UC123 模型具有最多的可用卫星,而 IF123 模型的可用卫星最少。对于定位结果,虽然 BDS-3 卫星数小于 BDS-2 卫星数,但是 BDS-3 的定位精度却优于 BDS-2。此外,4 种 PPP 模型在 E、N、U 3 个方向的定位误差序列基本重合,这表明了 4 种 PPP 模型的定位性能基本相当。

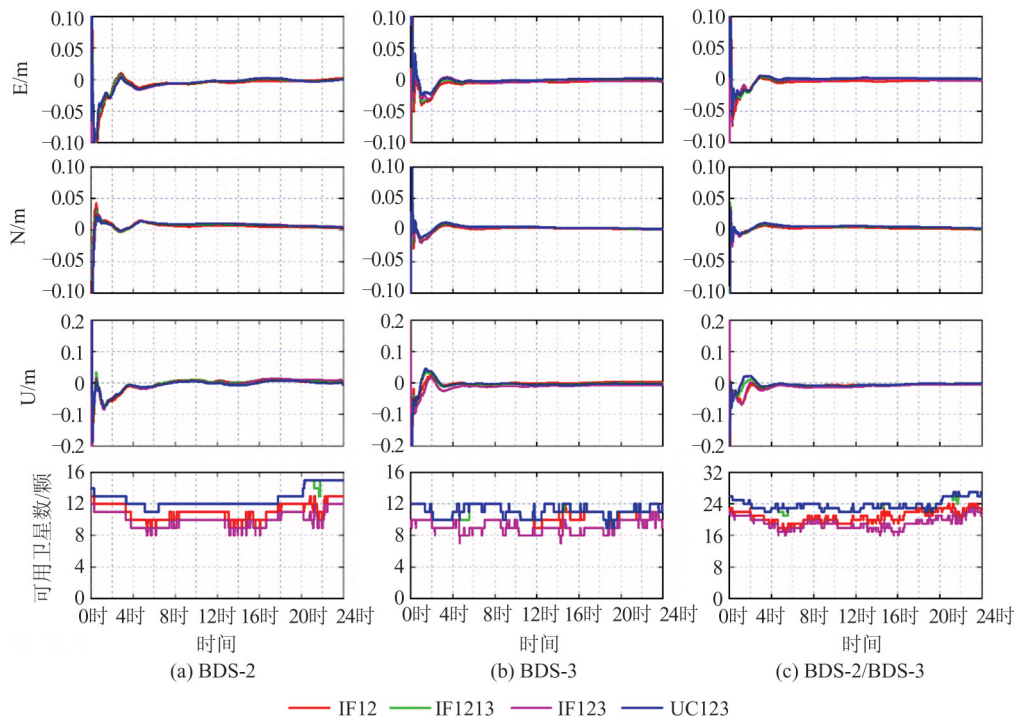


图2 CUSV 测站 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 静态 PPP 定位误差及可用卫星数(2021 年年积日 32)

Fig. 2 Static PPP Position Errors and Available Satellite Number of 4 Models for BDS-2, BDS-3 and BDS-2/BDS-3 at CUSV (DOY 32 of 2021)

对 14 个测站 28 d 的观测数据进行静态 PPP 解算,表 2 中给出了 IF12、IF1213、IF123 和 UC123 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 静态 PPP 在 E、N、U 3 个方向的收敛时间和收敛后定位精度的统计结果。从表 2 中可以看出,BDS-2 单系统 PPP 的收敛性能和定位精度表现最差,BDS-3 单系统 PPP 的收敛性能和定位精度明显优于 BDS-2 单系统 PPP,收敛时间缩短 2/3 以上,且收敛后的定位精度提升约一倍。BDS-2/BDS-3 融合 PPP 可以进一步提升定位性能,4 种模型在 E、N、U 3 个方向的平均收敛时间和收敛后定位精度分别为 15.8、7.3、22.3 min 和 1.2、1.0、1.8 cm。另外,对比 4 种 PPP 模型的定位结果可以得到,三频观测值的加入对 PPP 收敛性能和定位精度的提升不明显,双频 PPP 与三频 PPP 的定位性能基本相当;且三频无电离层组合和三频非组合 PPP 的定位性能基本相当。

表 2 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 静态 PPP 收敛时间和定位精度统计

Tab. 2 Static PPP Convergence Time and Positioning Accuracy of 4 Models for BDS-2, BDS-3 and BDS-2/BDS-3							
系统	PPP 模型	收敛时间/min			收敛后定位精度/cm		
		E	N	U	E	N	U
BDS-2	IF12	61.5	48.0	112.9	2.7	1.7	4.1
	IF1213	61.0	40.9	99.1	2.4	1.9	4.1
	IF123	59.9	43.9	104.6	2.5	2.0	4.2
	UC123	62.7	47.8	110.3	2.4	2.0	4.0
BDS-3	IF12	22.9	11.4	30.7	1.4	1.0	2.3
	IF1213	19.4	9.2	27.6	1.3	1.0	1.9
	IF123	19.3	10.2	26.3	1.3	1.1	2.0
	UC123	22.8	10.9	28.9	1.4	1.2	1.9
BDS-2/BDS-3	IF12	17.1	7.8	23.8	1.2	0.9	1.9
	IF1213	14.5	6.7	21.1	1.1	0.9	1.8
	IF123	14.8	6.8	21.3	1.2	1.1	1.8
	UC123	16.9	8.0	22.9	1.2	1.1	1.8

3.2 动态 PPP

图 3 给出了 CUSV 测站 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 动态 PPP 一天的定位误差序列。4 种 PPP 模型的定位误差基本重合,这表明三频无电离层组合 PPP 模型 (IF1213 和 IF123) 与非组合 PPP 模型 (UC123) 定位性能基本相当,同时双频 PPP 与三频 PPP 定位性能也基本相当。可以观察到的是 BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 的定位误差明显小于 BDS-2, 这表明 BDS-3 能显著提升动态 PPP 的定位性能。对图 1 中 14 个测站的 28 d 观测数据进行动态 PPP 解算,

4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 动态 PPP 收敛时间和定位精度的统计结果见表 3。相较于 BDS-2, BDS-3 的 PPP 收敛时间缩短一半以上,并且收敛后定位精度提升约一倍。BDS-2/BDS-3 融合 PPP 可以进一步提升定位性能,4 种模型的平均收敛时间和收敛后定位精度分别为 27.3、10.3、33.8 min 和 2.2、1.7、4.4 cm。与静态 PPP 结果一致,三频观测值的加入对动态 PPP 定位性能提升不明显,三频 PPP 定位性能与双频 PPP 基本相当。另外,三频无电离层组合和非组合 PPP 收敛性能和定位精度也基本相当。

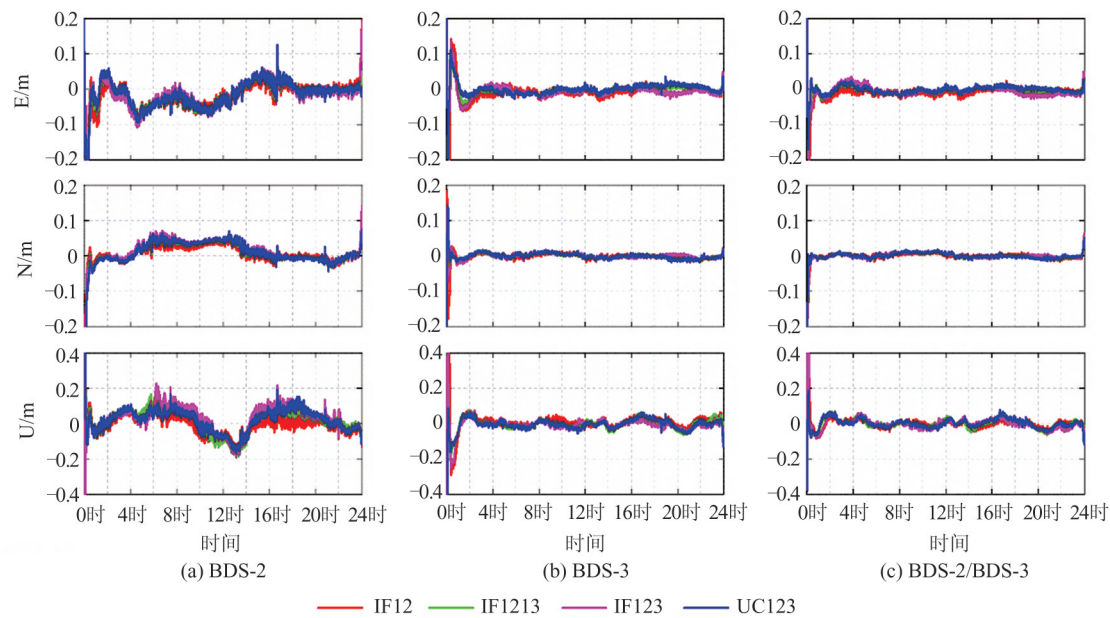


图 3 CUSV 测站 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 动态 PPP 定位误差 (DOY 32, 2021)
Fig. 3 Kinematic PPP Position Errors of 4 Models for BDS-2, BDS-3 and BDS-2/BDS-3 at CUSV (DOY 32 of 2021)

表 3 4 种模型 BDS-2、BDS-3 和 BDS-2/BDS-3 动态 PPP 收敛时间和定位精度统计

Tab. 3 Kinematic PPP Convergence Time and Positioning Accuracy of 4 Models for BDS-2, BDS-3 and BDS-2/BDS-3							
系统	PPP 模型	收敛时间/min			收敛后定位精度/cm		
		E	N	U	E	N	U
BDS-2	IF12	110.3	68.4	200.3	5.9	4.5	10.0
	IF1213	100.7	56.4	190.2	6.1	4.6	10.1
	IF123	111.4	61.9	186.4	6.2	5.0	10.7
	UC123	112.8	72.6	203.9	6.8	4.8	10.8
BDS-3	IF12	59.1	24.9	63.2	3.4	2.8	6.7
	IF1213	47.1	19.1	53.1	3.1	2.5	5.9
	IF123	55.7	22.2	61.7	3.5	3.1	6.5
	UC123	47.9	20.9	57.3	3.5	2.8	6.7
BDS-2/ BDS-3	IF12	29.9	11.9	36.5	2.1	1.5	4.3
	IF1213	25.0	9.2	30.9	2.2	1.6	4.4
BDS-3	IF123	26.2	9.9	33.4	2.2	1.7	4.3
	UC123	28.0	10.3	34.3	2.4	1.8	4.6

4 模型偏差特性分析

4.1 IFB

IF1213 和 UC123 模型需额外估计 IFB 参数,另外由于 BDS-2 和 BDS-3 三频信号的不同, BDS-2/BDS-3 融合 PPP 模型需要分别对 BDS-2 和 BDS-3 估计一个频间偏差参数。采用 IFB 时间序列的标准差 (standard deviation, STD) 来评价 IFB 的稳定性,图 4 给出了 CUSV 测站 BDS-2 和 BDS-3 信号 IFB 的一天时间序列,并给出了各 IFB 一天的 STD。可以看出, BDS-2 IFB 的波动大于 BDS-3 IFB, BDS-3 IFB 在 IF1213 和 UC123 模型中的天内 STD 分别为 1.6 cm 和 1.5 cm,而 BDS-2 IFB 对应的天内 STD 分别为 2.8 cm 和 3.3 cm。因此, BDS-3 IFB 比 BDS-2 IFB 平稳,这表明了 BDS-3 信号在接收机端产生的伪距硬件延迟比 BDS-2 信号稳定。

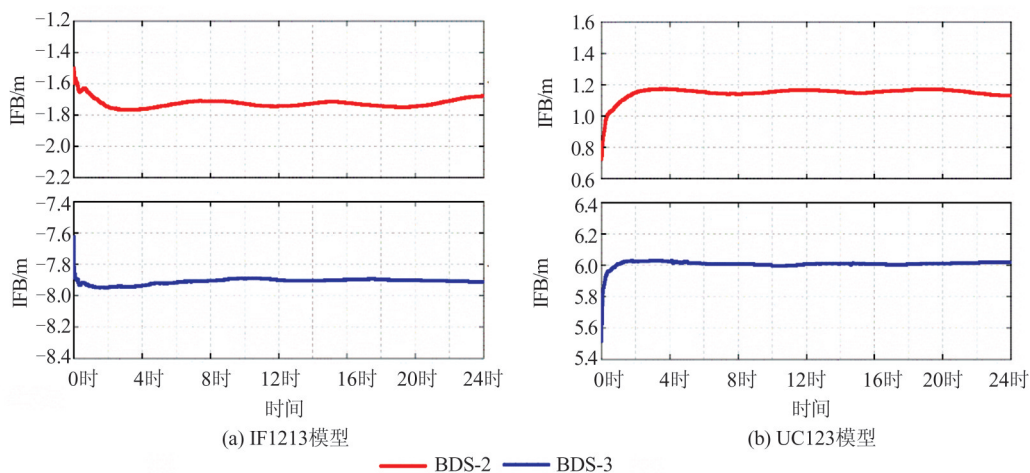


图4 CUSV测站IF1213和UC123模型IFB一天时间序列

Fig. 4 Daily Time Series of IFB in IF1213 and UC123 Models at CUSV

图5给出了14个测站IFB的天均值,采用IFB时间序列STD来评价IFB的稳定性,图6给出了14个测站IFB天内STD平均值。可以发现,14个测站的IFB整体上具有较好的天内稳定性,而且除第12与13天(DOY 28与DOY 29)之间的跳变外,IFB天与天之间的变化也比较平缓。IFB天间的跳变与卫星DCB的变化有关,统计卫星DCB产品发现在对应的时间卫星DCB也有相应的跳变。

表4给出了14个测站28 d的IFB稳定性的统计结果。从表4中可以看出,BDS-2信号在

IF1213模型和UC123模型中的IFB的天内STD分别为7.9 cm和7.1 cm,BDS-3信号在IF1213模型和UC123模型中的IFB的天内STD分别为3.6 cm和2.4 cm。IFB表现出较好的天内稳定性,且BDS-3信号IFB的天内稳定性明显优于BDS-2信号IFB。忽略第12与13天之间的跳变,IFB天与天之间的变化也较小,BDS-2信号在IF1213模型和UC123模型中的IFB的天间STD分别为7.4 cm和6.7 cm,而BDS-3信号在IF1213模型和UC123模型中的IFB的天间STD分别为7.4 cm和4.7 cm。

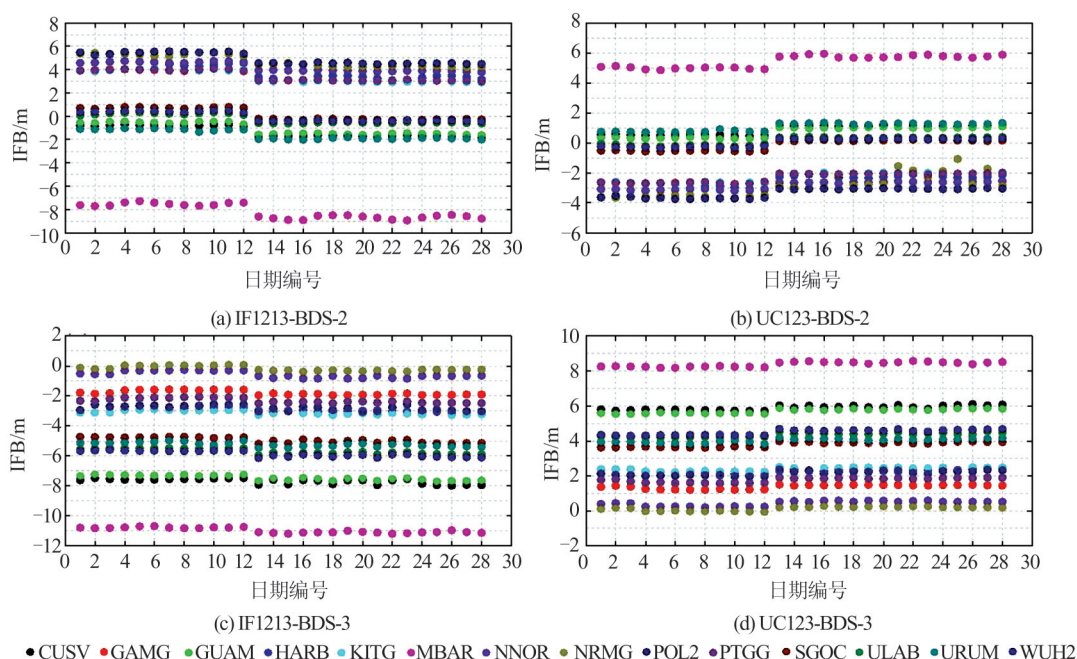


图5 14个测站28天IFB天均值

Fig. 5 Daily Mean Values of IFB of 14 Stations in 28 d

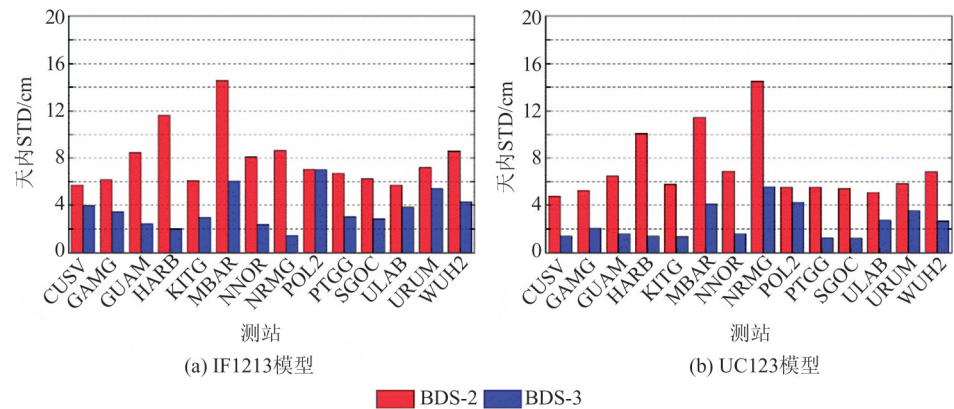


图 6 14个测站 IFB 天内 STD 平均值

Fig. 6 Mean Values of Intra-Day STD of IFB at 14 Stations

表 4 IF1213与UC123模型IFB稳定性统计/cm

Tab. 4 Statistic Results of Stability of Receiver IFB for IF1213 and UC123 Models/cm

PPP 模型	系统	天内 STD	天间 STD
IF1213	BDS-2	7.9	7.4
	BDS-3	3.6	7.4
UC123	BDS-2	7.1	6.7
	BDS-3	2.4	4.7

4.2 TDB

BDS-2 和 BDS-3 信号频率以及调制方式的不同会导致接收机端信号延迟的不同,因此

BDS-2/BDS-3融合PPP模型需增加一个TDB参数。依据表1,IF12、IF1213和UC123模型具有相同的TDB参数,而IF123模型具有不同的TDB参数。

图7给出了CUSV和POL2测站4种PPP模型估计的TDB的一天时间序列。从图7中可以看出,IF12、IF1213和UC123模型的TDB参数表现出相同的变化趋势以及近似相等的数值,而IF123模型的TDB则具有不同的变化趋势和数值,这与理论推导结果一致。收敛后,TDB一天的变化大约在0.2 m以内。

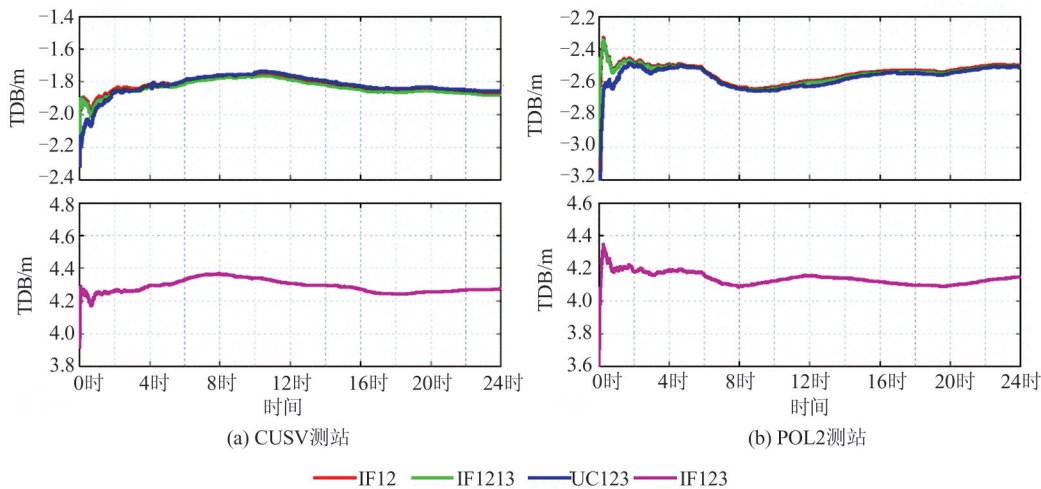


图 7 CUSV 和 POL2 测站 4 种模型 TDB 一天时间序列

Fig. 7 Daily Time Series of TDB for 4 Models at CUSV and POL2

图8给出了14个测站TDB的天均值,同样采用时间序列的标准差STD来评价TDB的稳定性,图9给出了14个测站TDB天内STD平均值。可以看出,14个测站的TDB整体上表现出较好的天内稳定性,但是天与天之间具有一定大小的变化。进一步统计了14个测站TDB稳定性的统

计结果,TDB的天内STD分别为8.8 cm和8.7 cm,表明了较好的天内稳定性。然而BDS-2与BDS-3间TDB天与天之间的变化较大,天间STD分别为20.3 cm和38.5 cm。综上可知,TDB与IFB一样具有较好的天内稳定性,但是TDB天与天之间的波动较大。

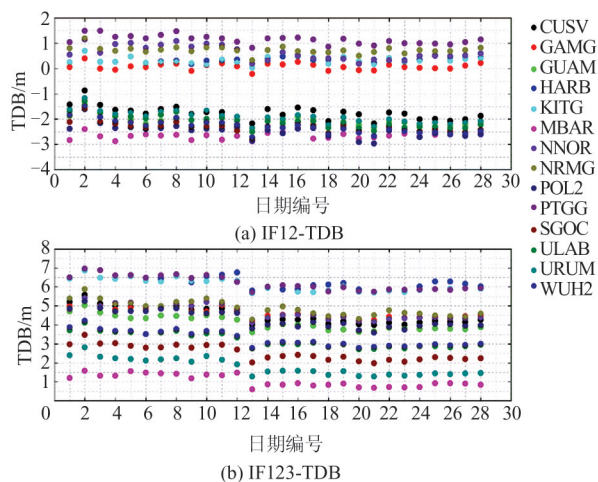


图8 14个测站28天TDB天均值

Fig. 8 Daily Mean Values of 14 Stations in 28 d

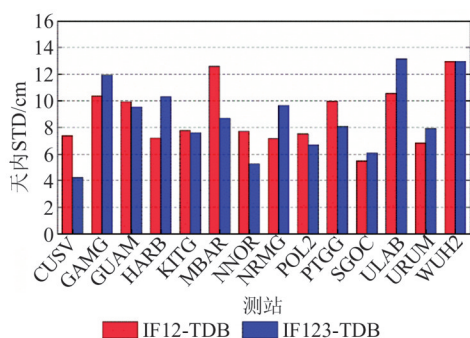


图9 14个测站TDB天内STD平均值

Fig. 9 Mean Values of Intra-Day STD at 14 Stations

5 结 语

为深度融合和充分利用BDS-2和BDS-3三频信号,本文建立了BDS-2/BDS-3三频无电离层组合和非组合PPP模型,并对PPP模型中出现的偏差项(接收机IFB和BDS-2与BDS-3间TDB)进行了较为详细的分析和描述。实验分析了BDS-2/BDS-3三频PPP模型的静态、动态定位性能以及模型偏差特性。

1)相较于BDS-2,BDS-3能明显增强PPP定位性能,在静态定位模式下,BDS-2/BDS-3融合PPP在E、N、U方向上的收敛时间分别为15.8、7.3、22.3 min,收敛后的定位精度分别达到1.2、1.0、1.8 cm;而在动态定位模式下,收敛时间和收敛后的定位精度分别为27.3、10.3、33.8 min和2.2、1.7、4.4 cm。

2)三频无电离层组合PPP与非组合PPP的收敛性能和定位精度基本相当,而非组合模型能充分利用卫星各个频率的观测值。相比于双频PPP,三频观测值的加入对PPP定位性能的提升不明显,三频PPP与双频PPP的定位性能基本相当。

3)IFB和TDB均表现出较好的天内稳定性,BDS-2信号在IF1213和UC123模型中的IFB的天内STD分别为7.9 cm和7.1 cm,BDS-3信号在IF1213和UC123模型中的IFB天内STD分别为3.6 cm和2.4 cm;TDB天内STD分别为8.8 cm和8.7 cm。

参 考 文 献

- [1] Yang Yuanxi, Xu Yangyin, Li Jinlong, et al. Progress and Performance Evaluation of BeiDou Global Navigation Satellite System: Data Analysis Based on BDS-3 Demonstration System[J]. *Scientia Sinica (Terrae)*, 2018, 48(5): 584-594. (杨元喜, 许扬胤, 李金龙, 等. 北斗三号系统进展及性能预测: 实验验证数据分析[J]. 中国科学: 地球科学, 2018, 48(5): 584-594.)
- [2] Yang Y X, Mao Y, Sun B J. Basic Performance and Future Developments of BeiDou Global Navigation Satellite System [J]. *Satellite Navigation*, 2020, 1(1): 1.
- [3] Zhang Kaishi, Jiao Wenhai, Li Jianwen. The Quality Assessment of BDS-3 FOC MEO Satellite Measurements [J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2018, 35(3): 265-269. (张楷时, 焦文海, 李建文. 北斗三号MEO组网卫星数据质量评估[J]. 测绘科学技术学报, 2018, 35(3): 265-269.)
- [4] Yan Zhongbao, Zhang Xiaohong. Partial Ambiguity Resolution Method and Results Analysis for GNSS Uncombined PPP [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(6): 979-989. (闫忠宝, 张小红. GNSS非组合PPP部分模糊度固定方法与结果分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(6): 979-989.)
- [5] Zhang Hui, Hao Jinming, Liu Weiping, et al. GPS/BDS Precise Point Positioning Model with Receiver DCB Parameters for Raw Observations[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(4): 495-500. (张辉, 郝金明, 刘伟平, 等. 估计接收机差分码偏差的GPS/BDS非组合精密单点定位模型[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(4): 495-500.)
- [6] Zhang Fan, Chai Hongzhou, Wang Min, et al. Uncombined PPP Ambiguity Resolution Combined with GPS/GLONASS Triple-frequency Observations[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j. whu-gig20220315. (章繁, 柴洪洲, 王敏, 等. 组合GPS/GLONASS三频观测值的非差非组合PPP模

- 糊度快速固定[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugig20220315.)
- [7] Jiao G Q, Song S L, Jiao W H. Improving BDS-2 and BDS-3 Joint Precise Point Positioning with Time Delay Bias Estimation[J]. *Measurement Science and Technology*, 2020, 31(2): 025001.
- [8] Zhao W, Chen H, Gao Y, et al. Evaluation of Inter-system Bias Between BDS-2 and BDS-3 Satellites and Its Impact on Precise Point Positioning[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(14): 2185.
- [9] Cao X Y, Shen F, Zhang S J, et al. Time Delay Bias Between the Second and Third Generation of BeiDou Navigation Satellite System and Its Effect on Precise Point Positioning[J]. *Measurement*, 2021, 168: 108346.
- [10] Qin W J, Ge Y L, Zhang Z, et al. Accounting BDS3-BDS2 Inter-system Biases for Precise Time Transfer[J]. *Measurement*, 2020, 156: 107566.
- [11] Guo F, Zhang X H, Wang J L, et al. Modeling and Assessment of Triple-Frequency BDS Precise Point Positioning[J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(11): 1223-1235.
- [12] Zhang Xiaohong, Liu Gen, Guo Fei, et al. Model Comparison and Performance Analysis of Triple-Frequency BDS Precise Point Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(12): 2124-2130. (张小红, 柳根, 郭斐, 等. 北斗三频精密单点定位模型比较及定位性能分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(12): 2124-2130.)
- [13] Li Z, Chen W, Ruan R G, et al. Evaluation of PPP-RTK Based on BDS-3/BDS-2/GPS Observations: A Case Study in Europe[J]. *GPS Solutions*, 2020, 24(2): 38.
- [14] Zhang P F, Tu R, Wu W J, et al. Initial Accuracy and Reliability of Current BDS-3 Precise Positioning, Velocity Estimation, and Time Transfer (PVT) [J]. *Advances in Space Research*, 2020, 65(4): 1225-1234.
- [15] Shi J B, Ouyang C H, Huang Y S, et al. Assessment of BDS-3 Global Positioning Service: Ephemeris, SPP, PPP, RTK, and New Signal[J]. *GPS Solutions*, 2020, 24(3): 81.
- [16] Zhang W J, Yang H Z, He C, et al. Initial Performance Evaluation of Precise Point Positioning with Triple-Frequency Observations from BDS-2 and BDS-3 Satellites[J]. *Journal of Navigation*, 2020, 73(4): 763-775.
- [17] Pan L, Li X P, Yu W K, et al. Performance Evaluation of Real-Time Precise Point Positioning with both BDS-3 and BDS-2 Observations[J]. *Sensors*, 2020, 20(21): 6027.
- [18] Ge Y L, Chen S X, Wu T, et al. An Analysis of BDS-3 Real-Time PPP: Time Transfer, Positioning, and Tropospheric Delay Retrieval [J]. *Measurement*, 2021, 172: 108871.
- [19] Leick A, Rapoport L, Tatarnikov D. GPS Satellite Surveying[M]. Hoboken: Wiley, 2015.
- [20] Kouba J, Héroux P. Precise Point Positioning Using IGS Orbit and Clock Products[J]. *GPS Solutions*, 2001, 5(2): 12-28.
- [21] Wang N B, Yuan Y B, Li Z S, et al. Determination of Differential Code Biases with Multi-GNSS Observations [J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(3): 209-228.
- [22] Saastamoinen J. Contributions to the Theory of Atmospheric Refraction [J]. *Bulletin Géodésique*, 1973, 107(1): 13-34.
- [23] Zhou F, Dong D N, Li P, et al. Influence of Stochastic Modeling for Inter-system Biases on Multi-GNSS Undifferenced and Uncombined Precise Point Positioning[J]. *GPS Solutions*, 2019, 23(3): 59.
- [24] Wanninger L, Beer S. BeiDou Satellite-Induced Code Pseudorange Variations: Diagnosis and Therapy[J]. *GPS Solutions*, 2015, 19(4): 639-648.
- [25] Guo F, Li X X, Zhang X H, et al. Assessment of Precise Orbit and Clock Products for Galileo, BeiDou, and QZSS from IGS Multi-GNSS Experiment (MGEX) [J]. *GPS Solutions*, 2017, 21(1): 279-290.