

梯度 Voronoi 图及其构建算法

李佳田¹ 罗富丽¹ 余 莉¹ 张 蓝¹
康 顺² 林 艳³

1 昆明理工大学国土资源工程学院,云南 昆明,650093

2 中国矿业大学(北京)地球科学与测绘工程学院,北京,100083

3 中国人民公安大学警务信息工程学院,北京,100038

摘要:以生长速度为视角,普通 Voronoi 图及权重 Voronoi 图是理想欧氏平面上的生长元匀速生长结果。然而,以 Voronoi 图为基础的实际分析与建模情况不尽如此,通常表现为非理想平面的非匀速生长过程。本文以权重距离函数描述各向异性的非理想平面,以其时间消耗导数一致性形式化生长速度,定义一种新的 Voronoi 图——梯度 Voronoi 图。通过以高程变化诱发的梯度生长为例,借助栅格空间中形态学膨胀操作,给出梯度 Voronoi 图的典型构建算法。算例与分析表明,在等距离边界、势力范围与邻近关系表达方面,梯度 Voronoi 图更具优势。

关键词: Voronoi 图;梯度 Voronoi 图;权重函数;膨胀算子;构建模型

中图法分类号: P208

文献标志码: A

Voronoi 图是空间剖分的一种基础几何图形结构,它表现为一组生长元同时地向四周生长,直至相遇,所形成的各生长元空间势力范围的集合^[1,2]。Voronoi 图蕴涵邻近与邻域等许多优良的空间概括性质,其被认为是研究和解决地理信息科学领域空间关系与空间分析^[3-8]、空间优化配置^[9,10]等相关问题的有力工具。学术界的普遍看法是将 Voronoi 图分为普通 Voronoi 图(ordinary Voronoi diagram, OVD)与权重 Voronoi 图(weight Voronoi diagram, WVD)两种基本类型。根据普通 Voronoi 图的定义,可将其认为是在理想平面之上的各生长元以统一速度匀速生长的结果;对于生长元的整体来讲,构成权重 Voronoi 图的各生长元生长速度(权重)并非完全相同,而就某一个生长元,其生长速度在生长过程中通常是无变化的^[11-13]。在以 Voronoi 图为基础的建模与分析中,诸多影响因素会使生长速度改变,而以恒定速度生长构成的 Voronoi 图较难有效地支持建模与分析中的客观条件,为此,增强 Voronoi 图的普适性,研究 Voronoi 图在非理想平面的生长特征与构建算法就成为一个必然需要解决的问题。

OVD 是等距离边界构成的一种空间剖分,其

是 WVD 的一个特例。WVD 的权值作为初始条件被首先确定,其边界构成是权值比例下的等距离边界^[14-16]。由于等距离边界并不随着客观条件的变化而改变,以此为切入点,本文将影响因素构建为权重距离函数,使生长速度一致地形式化为权重距离的时间导数,进而给出梯度 Voronoi 图的定义。以数学形态学为基础,用数字高程模型中单因素的高程变化为例,梯度 Voronoi 图的构建算法通过权重距离函数建立、变速膨胀过程与膨胀时间收敛三步聚顺序描述,旨在一般性地给出梯度 Voronoi 图的典型构建模型。在实际分析与建模中,如路网的优化配置中,对各方向上最优“阻抗”配送路线的选择,可依据梯度 Voronoi 所产生的势力范围获得最优解,而以恒定梯度构成的 Voronoi 并不能保证求解为最优。

1 梯度 Voronoi 图定义

为了表达若干量在总量中的相对重要性,其被分别赋予不同的系数,则该系数被称为权重。权重是指某一指标项在整个指标项系统中的重要程度,它表示在其它指标项不变的条件下,某一指

标项的变化对总量结果产生的影响。权重分为两类,即自重权与加重权。自重权是指以权数作为指标系统的分数,或者直接将权数作为等级的分值;而加重权则是指在各指标的已知分值(即自重权数)前面定义的权数。

以欧氏平面 OVD 与 WVD 的定义^[3]为前提,总结权重距离,将权重值由常量形式转变为权重距离函数表达,使生长元的生长速度一致地形式化为权重距离函数的时间导数,给出梯度 Voronoi 图的定义。

定义 1 普通 Voronoi 图:设点集 $P = \{p_1(x_1, y_1), \dots, p_n(x_n, y_n)\} \subset R^2, 2 < n < \infty, p$ 为任意一点, $p(x, y) \in R^2$, 存在点 $p_i(x_i, y_i)$ 与点 $p_j(x_j, y_j)$, 则称式(1)表达的区域为 p_i 的 Voronoi 区域:

$$O_V(p_i) = \{ \| p_i - p \| \leq \| p_j - p \|, i \neq j, i, j \in N \} \tag{1}$$

式中, $\| p_i - p \| = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$ 。则由下式表达的图形称为点集 P 的普通 Voronoi 图:

$$O_V = \{O_V(p_1), \dots, O_V(p_n)\}$$

定义 2 权重 Voronoi 图:设点集 $P = \{p_1(x_1, y_1), \dots, p_n(x_n, y_n)\} \subset R^2, 2 < n < \infty$, 且各点的权值为 $W = \{w_1, \dots, w_n\}, w_i > 0, p$ 为任意一点, $p(x, y) \in R^2$, 存在点 $p_i(x_i, y_i)$ 与点 $p_j(x_j, y_j)$, 则称式(2)表达的区域为 p_i 的权重 Voronoi 区域:

$$W_V(p_i) = \{w_i \| p_i - p \| \leq w_j \| p_j - p \|, i \neq j, i, j \in N\} \tag{2}$$

则由点集 P 的权重 Voronoi 区域构成的图形称为权重 Voronoi 图。则由下式表达的图形称为点集 P 的权重 Voronoi 图:

$$W_V = \{W_V(p_1), \dots, W_V(p_n)\}$$

权重是以距离的方式影响生长过程,并最终表现为某一距离条件下相等的边界点,而其位置却是不同的。根据现有文献分析,主要存在基于自权重类型的乘式加权距离(multiplicatively weighted distance, MWD)、基于加重权类型的加式加权距离(additively weighted distance, AWD)、乘方式加权距离(power weighted distance, PWD)以及基于两种类型相结合的组合式加权距离(compound weighted distance, CWD)4种形式^[17-21], 它们的公式为:

$$wd_{mwd}(p, p_i) = \frac{1}{w_i} \| p - p_i \| \tag{3}$$

$$wd_{awd}(p, p_i) = \| p - p_i \| - w_i \tag{4}$$

$$wd_{pwd}(p, p_i) = \| p - p_i \|^2 - w_i \tag{5}$$

$$wd_{cwd}(p, p_i) = \frac{1}{w} \| p - p_i \| - w_i \tag{6}$$

生长元的权重距离取值往往是依据某一属性值直接定值,或是根据几个属性值的计算值定值。就生长元的生长过程来讲,权重距离在生长伊始就已确定,其是一常量,那么表现在单位时间内生长元的生长速度则是恒定的,因此,直接使用权重距离无法动态描述生长元的生长过程。以 MWD 为例,其生长速度 v_{mwd} 为:

$$v_{mwd} = \frac{d}{dt} wd_{mwd}(p, p_i) = \frac{d}{dt} \frac{\| p - p_i \|}{w_i}, w_i > 0 \tag{7}$$

WVD 的定义是建立在理想平面之上的,这也验证了上述的分析结果,即 WVD 是平面光滑、速度恒定的权重 Voronoi 图。然而,实际应用情况却并非如此理想。一般意义上,地形起伏会诱发出“顺势”、“逆势”客观条件出现,进而导致生长速度发生非连续性的变化;特殊意义上,空间竞争 Voronoi 图中,竞争参数会根据时间、位置的变化而变化,其生长速度也是随时间变化的;城市道路 Voronoi 图中,各路段实际行驶速度不尽相同,同样会导致生长速度变化。为了刻画非理想平面,将上述 4 种权重值描述为权重距离函数 $wd(\cdot)$ 形式,使客观条件变化以不同时刻生长速度形式一致性地动态地反映,进而将生长结果表达为生长速度的积分,给出梯度 Voronoi 图(Gradient Voronoi diagram, GVD)定义。

定义 3 梯度 Voronoi 图:设点集 $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset R^2, 2 < n < \infty$, 对于任意点 p_i 与 p_j , 存在生长速度 $p_i \cdot v_{*i}$ 与 $p_j \cdot v_{*j}, v_*$ 是权重距离函数 $wd_*(\cdot)$ 的时间 t 导数,则称满足式(8)的区域为 p_i 的梯度 Voronoi 区域:

$$GVD(p_i) = \begin{cases} v_* = \frac{d}{dt} wd_*(\cdot) \\ \int v_{*i} dt \leq \int v_{*j} dt \end{cases} * \in \{mwd, awd, cwd, pwd\} \tag{8}$$

则由点集 P 的梯度 Voronoi 区域构成的图形称为梯度 Voronoi 图:

$$GVD = \{GVD(p_1), \dots, GVD(p_n)\}$$

2 梯度 Voronoi 图构建算法

定义 3 表明,生长速度的变化被非理想平面的权重距离函数 $wd(\cdot)$ 动态描述。 $wd(\cdot)$ 所能

概括的因素条件可分为单因素和多因素两种。对于构建梯度 Voronoi 图,由于生长过程中存在速度变化,使得几何方式的矢量方法难以表达,而形态学中的膨胀操作算子能够恰当地反映出生长元的变速生长过程,是解决此问题的最佳着眼点。梯度 Voronoi 图构建算法包括三个关键步骤:① $wd(\cdot)$ 权重距离函数,非理想平面建立;② 梯度膨胀过程;③ 膨胀时间收敛,膨胀生长停止条件。以单因素地表高程为例,梯度 Voronoi 图构建算法如下所述。

2.1 $wd(\cdot)$ 权重距离函数

格网数字高程模型(grid digital elevation model, GDEM)是以像元值为高程值、实现地形表面离散化表达的一种记录结构。具有像元大小(或分辨率)的属性,而其像元本身存在行(row)、列(column)和高程(elevation)属性,其结构的抽象描述为:

$$p = \{\text{grid}(\text{row}, \text{col}, \text{ele}), \text{row}, \text{col}, \text{ele} \in I\}$$

邻域像元之间的数量关系可用像元的高程值表达,以 8-邻域膨胀为例,从像元 $(\text{row}, \text{col}) = (0, 0)$ 开始,邻域像元与当前像元之间的高程差值表达为:

$$\Delta \text{ele} = \text{grid}(\pm \text{row}, \pm \text{col}) - \text{grid}(\text{row}, \text{col}) - \text{ele} \quad (9)$$

鉴于膨胀方向的可逆性,可将高程差值按照从小到大的顺序排列,如式(10)所示:

$$\Delta \text{ele} = (-\Delta \text{ele}_1, -\Delta \text{ele}_2, \dots, 0, \dots, \Delta \text{ele}_{n-1}, \Delta \text{ele}_n) \quad (10)$$

此序列为对称序列,根据数量关系对高程差进行分类,0 高差表示邻域像元高程值等于当前像元高程值,即“平势”膨胀,生长速度不变;邻域像元高程值小于当前像元高程值为负高差,即“顺势”膨胀,生长速度较“平势”增大;邻域像元高程值大于当前像元高程值为正高差,即“逆势”膨胀方向,生长速度较“平势”减小。序列平移以消除负值,建立如式(11)所示的正高差序列 ΔELE :

$$\begin{aligned} \Delta \text{ELE} = & (-\Delta \text{ele}_1 + 2 \Delta \text{ele}_1, -\Delta \text{ele}_2 + \\ & 2 \Delta \text{ele}_1, \dots, 0 + 2 \Delta \text{ele}_1, \dots, \Delta \text{ele}_{n-1} + \\ & 2 \Delta \text{ele}_1, \Delta \text{ele}_n + 2 \Delta \text{ele}_1) \end{aligned} \quad (11)$$

序列值归一化处理,建立加权距离函数 $wd(\cdot)$,针对当前像元 p 及膨胀操作所涉及的像元 q ,则函数 $wd(\cdot)$ 可表达为 p, q 像元之间的高差与序列 ΔELE 总和的比值^[22]:

$$wd(p, q) = \frac{q \cdot \text{ele} - p \cdot \text{ele} + 2 \Delta \text{ele}_1}{\sum_{i=1}^n \Delta \text{ELE}_i} = \frac{\Delta \text{ele}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta \text{ELE}_i}, \Delta \text{ele}_i \in \Delta \text{ELE} \quad (12)$$

将式(12)代入式(3),得出乘权重距离函数:

$$wd_{\text{mwd}}(p, q) = \frac{1}{wd(p, q)} \|p - q\| = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta \text{ELE}_i}{\Delta \text{ele}_i} \|p - q\| \quad (13)$$

此处, $\|p - q\|$ 为 GDEM 的分辨率值,将其设定为常数 c ,并将式(13)对时间 t 求导,得出乘权重距离下的生长速度 v_{mwd} :

$$v_{\text{mwd}} = \frac{d}{dt} wd_{\text{mwd}}(p, q) = \frac{d}{dt} \frac{c}{wd(p, q)} \quad (14)$$

式中,速度是高程差的时间导数,表明膨胀速度(v_{mwd})是当前像元领域高差和与当前像元、膨胀像元高差的比值,膨胀过程中,其会随着当前像元的改变而变化。

2.2 梯度膨胀过程

数学形态学膨胀算子(\oplus)描述为^[23]:令 $E = Z^2$ 为二维空间欧几里得栅格空间;目标 x 是 E 的子集; Q 为结构元素; Q^s 为 Q 关于原点的对称集合:

$$Q^s = \{-q; q \in Q\} \quad (15)$$

则目标 obj 的膨胀过程为:

$$obj \oplus Q^s = \bigcup_{q \in Q} x_{-q} = \{z \in E; Q^s \cap x \neq \emptyset\} \quad (16)$$

基础像元数据结构描述如下:

Structur edilaPixel

```
{
    integer _ger;
    integer _gerFre;
    integer _x;
    integer _y;
    double _frequency;
}
```

$_ger$ 表示当前结构是否为生长元,整数类型,大于 0 时为生长元及编号,等于 0 时为非生长元; $_gerFre$ 标记当前结构为非生长元结构时的归属,即非生长元被膨胀算子操作后,其所属的生长元势力范围,整数类型; $_x, _y$ 用于描述当前结构位置,整数类型; $_frequency$ 记录膨胀次数(一般膨胀)或膨胀耗时(变速膨胀),浮点类型。

每次膨胀中每个生长元经过 q 个影响像元,设生长元的目标数为 p ,以二维数组 $\text{pixelSet}[p]$

[q]形式存储。以膨胀次数为条件的一般膨胀过程如下:

[1] 第 n 次遍历生长元集合 A ;

[2] $\forall a_i \in A$ 为生长元, 二维数组 pixelSet [i] [] 构成 $n-1$ 次影响像元集 E , 置临时数组 provSet \leftarrow NULL;

[3] $\forall e_i \in E$, 依据式(16)进行 1 次膨胀, 膨胀为集合 S ;

[4] 如果 $S = \neg \emptyset$, 对于 $\forall \text{currPixel} \in S$, 如果 currPixel._gor = 0 && currPixel._gerFre = 0, 那么 currPixel._frequency $\leftarrow k$, currPixel._gerFre $\leftarrow e_i$, _seed, _bDila \leftarrow true, provSet \leftarrow currPixel;

[5] pixelSet [i] [] \leftarrow provSet, $i \leftarrow i + 1$, 转至 [2];

[6] 第 n 次膨胀结束。

2.3 膨胀时间收敛

由设定的像元大小(或分辨率)为常数 c , 得膨胀距离 $c = v_{\text{mw}} \cdot \Delta t$ 仍为一常数。根据式(14)的 v_{mwd} 与 Δt 互为倒数关系, 结合式(12), 建立与式(11)相对应的各高程差用序列 Δt :

$$\Delta t = (\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n),$$

$$\Delta t_i = wd_{\text{mvd}}(p_i, q_i)^{-1} \quad (17)$$

此时, 像元之间的膨胀速度不相等, 则构建变速膨胀过程以相同的时间消耗为条件。生长元第 1 次膨胀生长, 生长元与其膨胀操作所涉及及邻域像元之间存在 1 : n 关系, 若第 2 次生长, 则生长元与其膨胀操作所涉及的领域像元之间存在 1 : $n : n^2$ 关系, 此为迭代过程。如果以树型结构(tree structure)来表达生长元(根结点)在经过多次膨胀操作(中间结点)后到达最终像元(叶结点), 那么, 用根结点至叶结点的分枝可以表达生长中的非线性对应关系。时间消耗 t_{total} 为:

$$t_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n-1} wd(\text{node}_i, \text{node}_{i+1})^{-1} \quad (18)$$

$$\text{node}_i, \text{node}_{i+1} \in \text{NS}$$

式中, NS(node set) 为这条分枝上所经像元组成的中间结点集合。存在膨胀收敛的时间周期 t_0 ($\exists t_i \in \Delta t, t_0 > t_i$), 则变速膨胀的收敛条件为:

$$t_0 = \text{argmax}_{i=1}^{n-1} wd(\text{node}_i, \text{node}_{i+1})^{-1} \quad (19)$$

$$\text{node}_i, \text{node}_{i+1} \in \text{NS}$$

式(19)表示当满足膨胀的时间消耗小于等于 t_0 条件时, 该树的分枝上存在的像元个数 n 的极大值。

结合时间消耗为收敛条件, 以基础像元数据结构有相同坐标系与分辨率大小的基底栅格数字

高程模型为基础, 参照一般膨胀过程, 变速膨胀过程描述如下:

[1] t_0 时间遍历生长元集合 A ;

[2] $\forall a_i \in A$ 为生长元, 则 pixelSet [i] [] 是前 1 个时间周期的影响像元集合 E , 初始化临时像元数组, tempSet \leftarrow NULL;

[3] $\forall e_i \in E$, 依据式(16), 膨胀操作 1 次, 得到膨胀邻域集合 S ;

[4] 如果 $S = \neg \emptyset$, 置临时数组 tempSet, 布尔量_bDila 标记发生的有效膨胀, _bDila \leftarrow false, 对于 $\forall \text{currPixel} \in S$, 如果 currPixel._gor = 0 && currPixel._gorFre = 0 条件成立;

[4.1] 依据式(12), 计算权重 DEM(currPixel._x, currPixel._y). ele, DEM(e_i . x, e_i . y). ele, 依据式(18), 计算时间消耗 t_{total} ;

[4.2] 如果 $t_{\text{total}} \leq t_0$, 那么 currPixel._frequency $\leftarrow e_i$. _frequency + Δele , currPixel._gorFre $\leftarrow e_i$. _gor, tempSet \leftarrow currPixel, _bDila \leftarrow true;

[5] 如果 _bDila = true, S \leftarrow tempSet, _bDila \leftarrow false, 转至 [4];

[6] 如果 _bDila = false, pixelSet [i] [] \leftarrow tempSet, 转至 [3];

[7] t_0 时间膨胀结束。

3 算例与分析

分析算法各步骤的时间复杂度: 设生长元所在的计算域由 m 行 n 列像元构成, 扫描计算域 (m, n), 建立 $wd(\cdot)$ 权重函数, 则有 $O_{wd(\cdot)}(m \cdot n)$; 梯度膨胀过程与一般膨胀过程均是相同范围为计算域, 以生长元的膨胀时间收敛为条件, 则有 $O_{\text{vdi}}(c \cdot m \cdot n)$ 。两者相加并化简, 得出梯度 Voronoi 图构建算法的时间复杂度为 $O(m \cdot n)$ 。

采用云南省昆明市部分 1 : 2 000 比例尺栅格 DEM 数据为算例, 栅格 DEM 由 201 行、302 列、 50×50 m 的像元组成, 灰度级表示其高程值变化, 高程范围在 1 570 m(黑)与 1 025 m(白)之间, 并以分类形式(16 类)给出。图 1(a)为某一生长元在 10 个时间周期的膨胀结果, 其中, 每一个条带对应一个时间周期; 图 1(b)为生长元所存在的基底 DEM, 一个条带对应一个高程分类。

针对单个生长元情况, 为了便于分析, 特以生长元为水平位置基准, 向周围做出 4 条辅助向量线(向量 $\text{vc}_1 \sim$ 向量 vc_4)。其中, 生长元处于 DEM 第 6 分类, vc_1 由生长元出发并落于高程值最大的

第 1 分类, vc_3 由生长元出发并落于高程最小的第 16 分类, 并且 vc_1 与 vc_3 具有相同的 1~6 梯度膨胀时间周期; 向量 vc_2 与向量 vc_4 由生长元出发并落于第 10 分类, 但 vc_2 长度小于 vc_4 长度。

分析图 1(a) 得出结论, 首先, 普通 Voronoi 图栅格算法结果中由膨胀操作会生成以生长元为中心的若干“等距离圆”, 而本文梯度 Voronoi 图算法以时间周期为单位生成若干不规则的封闭“台阶”状条带。其次, 在每个时间周期内的变速生长构成了连续有限的空间范围, 并且在不同方向上具有较大的差异(台阶边界与生长元距离不同)。算法结果表明在生长过程中生长速度变化和收敛条件均产生了显著影响。

分析图 1(b) 得出结论如下。

1) vc_1 与 vc_3 : 二者具有相同的 6 个膨胀周期, 如图 1(b) 所示, vc_1 正高差, 逆势、膨胀速度小于正常膨胀速度; vc_3 负高差, 顺势, 膨胀速度大于正常膨胀速度。因为 vc_1 方向膨胀速度小于 vc_3 方向膨胀速度, 又由于 vc_1 与 vc_3 时间周期相同, 可推出 vc_1 方向的膨胀距离小于 vc_3 方向的膨胀距离, 与图 1(a) 所呈现一致;

2) vc_2 与 vc_4 : 二者存在相同的 6 分类至 10 分类高差变化, 因为 vc_2 长度小于 vc_4 长度, 即 vc_2 方向膨胀速度大于 vc_4 方向膨胀速度, 导致在变速膨胀过程中 vc_2 比 vc_4 少用了 1 个时间周期, 与图 1(a) 所呈现一致。

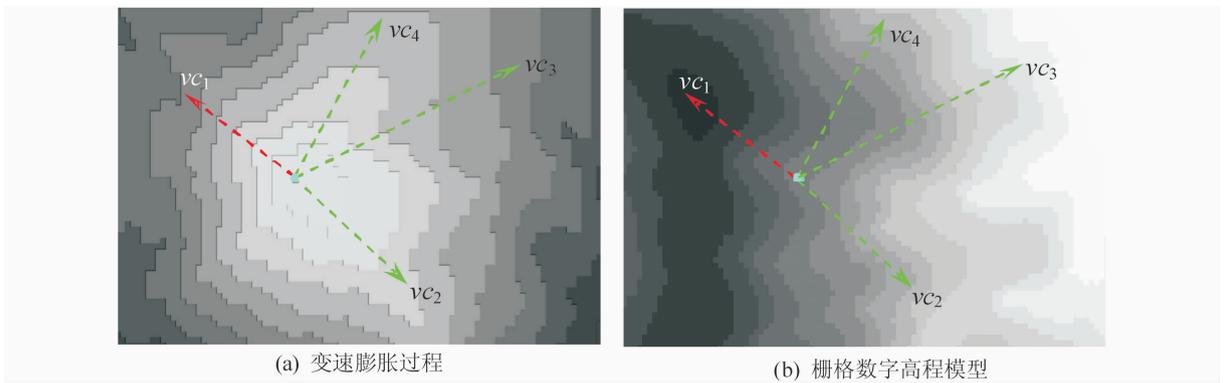


图 1 高程变化的变速膨胀过程

Fig. 1 Progress of Variation Dilation Based on Elevation

随机产生 20 个生长元(编号 0~19), 做不同时间消耗情况下的比较。根据公式(19), 设两次时间消耗值分别为 t_0 与 $t_0/2$, 膨胀结果如图 2 所示, 分析如下。

1) 时间消耗值为 t_0 情况下, 势力范围变化并不明显, 表明在时间消耗值较大情况下, 虽然各生长元生长速度不同, 但经过较长的时间消耗会抵

消生长元在生长速度上的差异;

2) 时间消耗值为 $t_0/2$ 情况下, 势力范围变化显著, 处于正高差的 4 号、1 号与 13 号生长元生长速度相对较慢, 与此相反, 处于负高差的 6 号、2 号、15 号生长元生长速度较快, 在时间消耗值相对较小条件下, 使得生长速度差异表现更加明显, 有效地反应了地表客观条件变化。

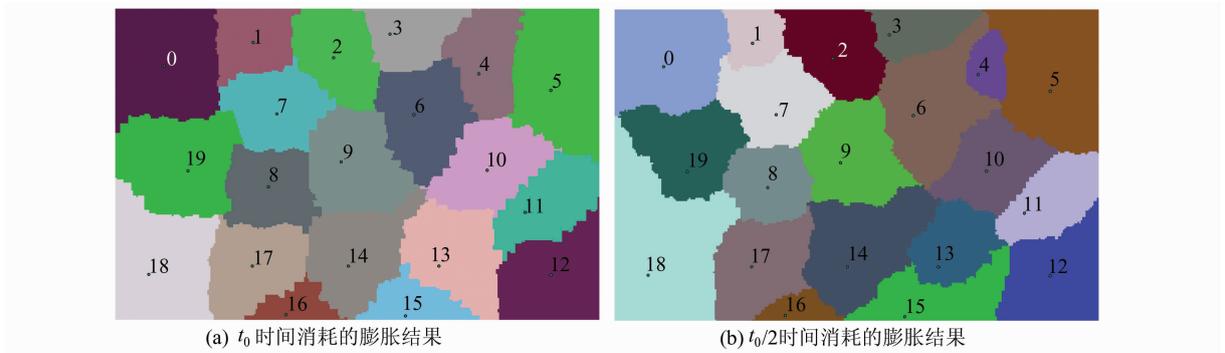


图 2 不同时间消耗的膨胀比较

Fig. 2 Comparison of Dilation Between Different Time Depletions

通常普通 Voronoi 图基于欧式等距离边界生成, 其默认所有生长元具有同等影响力; 权重

Voronoi 图基于八邻域膨胀的 cost weighted distance 累加形式生成, 其虽可以反应不同生长元间

影响力区别,但生长元自身的影响力是默认无变化的。二者均不能有效地反应生长元自身的影响力变化,都是理想平面生长元匀速生长的结果。本文以生长元生长速度变化为基础构建的梯度 Voronoi 图,可以客观反应出生长元自身影响力的变化,动态的作用于 Voronoi 势力范围,生成图形更佳贴合实际。以 $t_0/2$ 时间消耗 Voronoi 图为基础,如图 3 所示,做普通 Voronoi 图与变速 Voronoi 图之间图形性质对比分析如下。

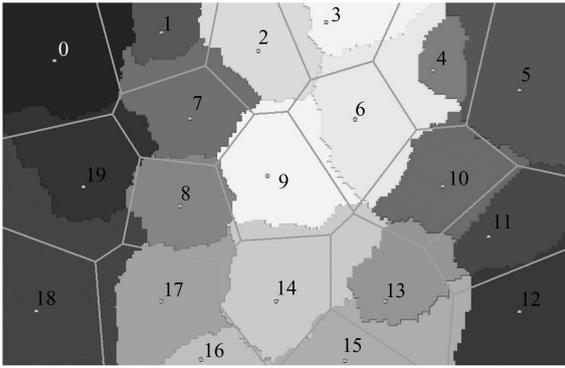


图3 梯度 Voronoi 图与普通 Voronoi 图比较
Fig. 3 Comparison Between GVD and CVD

(1) 边界的变化。普通 Voronoi 图中,由于其以理想平面为基础,Voronoi 边界由两邻近目标的欧氏距离相等点构成,其表现为一条直线,并且是两邻近目标连线的垂直平分线;而在梯度 Voronoi 图中,由于其以受到地形影响的各向异性平面为基础,使得生长速度发生变化,表现为梯度 Voronoi 图边界的不规则与位置偏移。图 3 中,梯度 Voronoi 图边界位置偏移较大的是 18 与 19 号生长元,在 18 至 19 号生长元方向呈地形下降趋势,使得 18 号生长速度相对更快,所以,经过相同的生长时间周期后,与普通 Voronoi 图边界相比,梯度 Voronoi 图边界更加远离 18 号生长元,反之同样成立;

(2) 势力范围的变化。由于 DEM 高程值的作用,存在梯度 Voronoi 图产生的势力范围与普通 Voronoi 图所产生的势力范围不一致的情形,即范围的扩大或缩小。1 号与 4 号生长元发生变化明显,它们的梯度 Voronoi 图势力范围较普通 Voronoi 图势力范围缩小;5、6、15 及 18 号生长元的势力范围则扩大。变化原因是边界的变化导致势力范围变化。势力范围的变化能够反映出自然现象的消长过程;

(3) 邻近关系的变化。10 号与 14 号生长元由普通 Voronoi 图中的 2 阶 Voronoi 邻近关系转变为在梯度 Voronoi 图中的 Voronoi 邻近关系,

相反情况,3 号与 4 号生长元,它们在普通 Voronoi 图中为 Voronoi 邻近关系,而在梯度 Voronoi 图中,受 6 号生长元的影响,使它们变为 2 阶 Voronoi 邻近关系。邻近关系变化的原因在于势力范围的变化。

4 结 语

本文以权重距离函数来描述非理想平面,用权重距离函数的时间导数一致性形式化生长元的变化生长速度,提出了一种新形式 Voronoi 图——梯度 Voronoi 图,其在势力范围与 Voronoi 邻近关系表达方面更具有实际意义。以数学形态学的膨胀操作为基础,通过三个关键步骤,给出了梯度 Voronoi 图的典型构建算法。算法中,虽然权重距离函数是以单因素 DEM 高程差为例来确定,但是在连续有界的前提下,通过有效的权重值归一化计算,也同样适用于多因素情况。

值得说明的是,ESRI/ArcGIS/Raster Spatial Analyst/cost weighted distance 提供生成代价权重距离方法,可用于代价权重 Voronoi 图生成。本文算法与其区别如下。

(1) 本文算法以梯度变化所导致的生长元生长速度变化为基础,系列时间周期的生长速度变化使得生长过程是一种动态行为。而代价权重方法每个生长元的 cost weighted 初始值在生长伊始就已确定,生长过程为匀速, cost weighted 难以动态调整;

(2) 本文的核心是以生长速度为基础构建 Voronoi 图,即 $d=v \times t$ (距离=速度 \times 时间),如果以八邻域膨胀的 cost weighted distance 累加形式生长,则生长元的速度不会起到任何作用,即 v 可以用栅格表达,但在 t 时间内的最大生长距离需要满足一定的收敛条件,仅仅通过 cost weighted distance 是不能得出的。

参 考 文 献

- [1] Gold C M. Review: Spatial Tessellations-Concepts and Applications of Voronoi Diagrams [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 1994, 8(2): 237-238
- [2] Chen Jun. Voronoi-based Dynamic Spatial Data Model [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 2002 (陈军. Voronoi 动态空间数据模型[M]. 北京:测绘出版社, 2002)

- [3] Okabe A, Boots B, Sugihara K, et al. Spatial Tesselations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams (2nd Edition) [M]. New York: John Wiley and Sons, 2000
- [4] Chen Jun, Li Chengming, Li Zhilin, et al. A Voronoi-Based 9-Intersection Model for Spatial Relations [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2000, 15(3): 201-220
- [5] Chen Jun, Zhao Renliang, Li Zhilin. Voronoi-Based K-order Neighbors Relations for Spatial Analysis [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetric and Remote Sensing*, 2004, 59(1/2): 60-72
- [6] Zhao Renliang. Voronoi Methods for Computing Spatial Relations in GIS [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 2006 (赵仁亮. 基于 Voronoi 图的 GIS 空间关系计算 [M]. 北京: 测绘出版社, 2006)
- [7] Liu Jinyi, Liu Shuang. A Survey on Applications of Voronoi Diagrams [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2004, 25(2): 125-132 (刘金义, 刘爽. Voronoi 图应用综述 [J]. 工程图学学报, 2004, 25(2): 125-132)
- [8] Chen Jun, Zhao Renliang. Spatial Relations in GIS: A Survey on Its Key Issues and Research Progress [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1999, 28(2): 97-102 (陈军, 赵仁亮. GIS 空间关系的基本问题与研究进展 [J]. 测绘学报, 1999, 28(2): 97-102)
- [9] Li Jiatian, Kang Shun, Li Xiaojuan, et al. Putting Model for Broad Geographic Annotation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(1): 20-25 (李佳田, 康顺, 李晓娟, 等. 宽泛地理注记的投放模型 [J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2015, 40(1): 20-25)
- [10] Li Jiatian, Kang Shun, Luo Fuli. Point Group Generalization Method Based on Hierarchical Voronoi Diagram [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(12): 1 300-1 306 (李佳田, 康顺, 罗富丽. 利用层次 Voronoi 图进行点群综合 [J]. 测绘学报, 2014, 43(12): 1 300-1 306)
- [11] Mostafavi M A, Gold C, Dakowicz M. Delete and Insert Operations in Voronoi/Delaunay Methods and Applications [J]. *Computers & Geosciences*, 2003, 29(4): 523-530
- [12] Li Chengming, Chen Jun, Li Zhilin. Raster-Based Methods or the Generation of Voronoi Diagrams for Spatial Entities [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 1999, 13(3): 209-225
- [13] Wang Xinsheng, Liu Jiyuan, Zhuang Dafang, et al. New Raster-Based Method for Constructing Voronoi Diagrams [J]. *Journal of China University of Mining & Technology*, 2003, 32(3): 293-296 (王新生, 刘纪远, 庄大方, 等. 一种新的构建 Voronoi 图的栅格方法 [J]. 中国矿业大学学报, 2003, 32(3): 293-296)
- [14] Xie Shunping, Wang Jiecheng, Feng Xuezhi, et al. Algorithm for Constructing Voronoi Diagram of Planar Points Based on Approximating and Extracting Vertices [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2007, 36(4): 436-442 (谢顺平, 王结臣, 冯学智, 等. 基于结点逼近提取的平面点集 Voronoi 图构建算法 [J]. 测绘学报, 2007, 36(4): 436-442)
- [15] Xie Shunping, Feng Xuezhi, Lu Wei. Algorithm for Constructing Voronoi Area Diagram Based on Road Network Analysis [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(1): 88-94 (谢顺平, 冯学智, 鲁伟. 基于道路网络分析的 Voronoi 面域图构建算法 [J]. 测绘学报, 2010, 39(1): 88-94)
- [16] Geng Hong, Tang Xu, Zhu Guorui. Method for Plotting the Affected Area of Urban Roads Based on Spatial Competing [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(6): 521-524 (耿红, 唐旭, 祝国瑞. 基于空间竞争的城市道路影响域划分方法研究 [J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2004, 29(6): 521-524)
- [17] Dong Pinliang. Generating and Updating Multiplicatively Weighted Voronoi diagrams for Point, Line and Polygon Features in GIS [J]. *Computers & Geosciences*, 2008, 34(4): 411-421
- [18] Miller G L, Talmor D, et al. Data Generation for Geometric Algorithms on Non-uniform Distributions [J]. *International Journal of Computer Geometry Application*, 1999, 9(6): 577-599
- [19] Okabe A, Satohb T, Furutac T, et al. Generalized Network Voronoi Diagrams: Concepts, Computational Methods, and Applications [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2008, 22(9): 1-30
- [20] Aurenhammer F, Edelsbrunner H. An Optimal Algorithm for Constructing the Weighted Voronoi Diagram in the Plane [J]. *Pattern Recognition*, 1984, 17(2): 251-257
- [21] Gahegan M, Lee I. Data Structures and Algorithms to Support Interactive Spatial Analysis Using Dynamic Voronoi Diagrams [J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2000, 24(6): 509-537
- [22] Yu Li. Typical Clustering Method Compared Between Distance Proximity and Natural Neighbor [D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2011 (余莉. 距离邻近与自然邻近典型聚类方法比较 [D]. 昆明: 昆明理工大学, 2011)

[23] Rafael C Gonzalez, Richard E Woods. Digital Image Processing (2nd Edition) [M]. Beijing: Publishing

House of Electronics Industry, 2003

The Gradient Voronoi Diagram and Construction Algorithm

LI Jiatian¹ LUO Fuli¹ YU Li¹ ZHANG Lan¹ KANG Shun² LIN Yan³

1 Faculty of Land Resources Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China

2 College of Geoscience and Surveying Engineering, China University of Mining & Technology (Beijing), Beijing 100083, China

3 Policing Information Technology College, People's Public Security University of China, Beijing 100038, China

Abstract: Taking the growing processing results as angles, an ordinary Voronoi diagram and weighted Voronoi diagram are produced at uniform speed on an ideal Euclidean plane. However, based on analysis, modeling is not always sound in that a Voronoi diagram progresses at varying velocities on a non-ideal plane. The anisotropic non-ideal plane is depicted by weight distance and the growth velocity is formalized in a form conforming to the time derivative of weight distance. Therefore, a new Voronoi diagram, namely Gradient Voronoi Diagram (GVD) was defined in this paper. Taking the gradient caused by changes in elevation as an example, a typical construction model for GVD was propounded with the help of the dilation operator for mathematical morphology in raster space. An analysis shows that GVD has better guided significance and practical application value in the expression of influence regions and the Voronoi adjacency relationship.

Key words: Voronoi diagram; Gradient Voronoi Diagram; weighting function; dilation operator; constructing model

First author: LI Jiatian, PhD, associate professor, specializes in calculation of dynamic spatial relationship. E-mail: ljtwcx@163.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41561082, 41161061, 41301416.