

# 同伦函数与填充函数相结合的非线性最小二乘平差模型

游 为<sup>1</sup> 范东明<sup>1</sup> 傅淑娟<sup>2</sup>

(1 西南交通大学测量工程系,成都市二环路北一段 111 号,610031)

(2 深圳市地铁有限公司,深圳市福田区福中一路 1016 号,518040)

**摘 要:**提出了同伦函数与填充函数相结合进行非线性最小二乘平差的方法。先采用同伦函数求解非线性恰定方程组,得到一个局部最优解,然后以该局部最优解为基础构造填充函数,通过对填充函数求解,得到比当前局部最优解更小的局部极小点,再以该局部极小点为基础重新构造同伦函数和填充函数进行求解,通过有限步的循环迭代,最终找到非线性最小二乘平差的全局最优解。实例验证,该方法能有效地寻找出非线性最小二乘平差的全局最优解。

**关键词:**同伦函数;填充函数;非线性最小二乘平差

**中图法分类号:**P207.2

众所周知,非线性最小二乘平差是进行测量平差数据处理的一大瓶颈问题,至今已有众多学者进行了大量研究,但非线性最小二乘平差的几何意义、参数求解及精度评定均没有得到彻底的解决。经典的线性化法已不能满足实际数据处理的高精度需要,目前,非线性最小二乘平差的方法可归纳为确定性方法和随机搜索方法。确定性方法是利用问题的解析性质产生确定性的有限或无限的点序列,使其收敛于最小二乘解,如牛顿法、信赖域法、拟牛顿法、最速下降法、高斯-牛顿法、阻尼最小二乘法<sup>[1]</sup>等,这些方法均是采用最优化极值条件的方法将非线性最小二乘平差准则转化为非线性恰定方程组来求解,但所求解的函数一般为非凸函数,故这些方法为局部收敛,且对初值敏感,对于不合适的初值,会产生发散的现象。而随机算法是利用概率机制而非确定性的点列来描述迭代过程,如 Monto-Carlo 方法、模拟退火算法、遗传算法、蚁群算法等,这些方法的搜索速度较慢,且实际收敛性能不稳定。文献[2,3]提出了一种大范围收敛的非线性同伦最小二乘平差模型,但该模型依然是以最优化问题的极值条件为基础,故仍为局部收敛。本文在同伦方法的基础上提出了一种非线性填充最小二乘模型,该模型

能跳出当前的局部收敛区域。

## 1 非线性同伦最小二乘平差模型

非线性最小二乘平差准则为  $F(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min$ ,其中  $\mathbf{V}$  为观测值的改正数向量,  $\mathbf{P}$  为观测值的权阵,该准则为非线性函数,直接求解很困难。假设  $\mathbf{X}_0 \in R'$  为任意选取的未知参数的初值向量,  $t$  为必要的观测数,定义目标映射为  $g_2(\mathbf{X}) = (\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V})/2$ ,平凡映射为  $g_1(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2/2$ ,引入同伦思想,从而有同伦函数:

$$\phi(a, \mathbf{X}) = \frac{1-a}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} + \frac{a}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 = \min \quad (1)$$

当  $a=1$  时,式(1)就变为平凡映射  $g_1(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2/2 = \min$ ,其惟一解为  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ ;当  $a=0$  时,式(1)就变为目标映射  $g_2(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}/2 = \min$ 。可见,函数  $\phi(a, \mathbf{X})$  是  $g_1(\mathbf{X})$  和  $g_2(\mathbf{X})$  的线性同伦函数,称为同伦最小二乘平差准则,该准则并不改变原来非线性最小二乘平差准则的性质,虽然增加了一个平凡映射,但可用具有大范围收敛性的同伦方法来求解。通过同伦参数  $a$  的变化,可得到一系列的平差准则,这些准则从平凡映

射一直过渡到目标映射。根据最优化问题的极值条件,将式(1)对  $\mathbf{X}$  求一阶偏导数,得到同伦函数向量  $\mathbf{H}(a, \mathbf{X})$ :

$$\mathbf{H}(a, \mathbf{X}) = \frac{1-a}{2} \frac{\partial \mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} + a(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = 0 \tag{2}$$

式中,  $\mathbf{V} = f(\mathbf{X}) - \mathbf{L}$ ,  $f(\mathbf{X})$  为观测值函数向量,  $\mathbf{L}$  为观测值向量。将  $\mathbf{V}$  代入式(2)求偏导,得:

$$\mathbf{H}(a, \mathbf{X}) = (1-a) \frac{\partial f^T(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{P}(f(\mathbf{X}) - \mathbf{L}) + a(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = 0 \tag{3}$$

式(2)和式(3)是由  $t$  个同伦函数组成的不动点同伦函数向量,也可看成  $t$  个方程、 $t$  个未知数组成的非线性恰定方程组,其中  $\mathbf{H}(1, \mathbf{X}) = \mathbf{H}(0, \mathbf{X}) = 0$ 。同伦连续法就是直接以所求的未知量为未知参数,从  $a=1$  的平凡映射的零点集跟踪同伦曲线过渡到  $a=0$  的目标映射所在的零点集。具体计算方法可参见文献[4,5]。但非线性同伦最小二乘平差仍是局部收敛方法,为此,引入非线性填充最小二乘平差模型。

## 2 非线性填充最小二乘平差模型

填充函数是由葛仁溥教授等人<sup>[6,7]</sup>首先提出的,它由两个阶段组成:极小化阶段和填充阶段。第一步,利用极小化算法寻找目标函数的局部极小点  $\mathbf{X}_1^*$ ;第二步,以当前极小点  $\mathbf{X}_1^*$  为基础定义一个填充函数,并利用它找到  $\mathbf{X}' \neq \mathbf{X}_1^*$ ,使得  $F(\mathbf{X}') \leq F(\mathbf{X}_1^*)$ ,而后以  $\mathbf{X}'$  为初始点,重复第一步。如此重复,直到找不到更好的局部极小点。函数  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*)$  称为  $F(\mathbf{X})$  在局部极小点  $\mathbf{X}_1^*$  的填充函数,它需满足三个条件:①  $\mathbf{X}_1^*$  是  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*)$  的一个严格局部极大点;② 对于任意  $\mathbf{X} \in S_1$ ,有  $\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*) \neq 0$ ,  $S_1 = \{(\mathbf{X} | F(\mathbf{X}) \geq F(\mathbf{X}_1^*), \mathbf{X} \in R \setminus \{\mathbf{X}_1^*\})\}$ ;③ 如果  $\mathbf{X}_1^*$  不是全局极小点,那么  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*)$  一定在  $S_2 = \{\mathbf{X} | F(\mathbf{X}) < F(\mathbf{X}_1^*), \mathbf{X} \in R\}$  上有局部极小点。

通过以上条件,可以保证在填充函数中找到比当前局部极小点更小的点,当应用局部极小化算法极小化填充函数时,迭代点列不会终止于目标函数值大于当前极小值的点。如果当前极小值不是全局极小值,那么填充函数一定存在极小点,并且目标函数在该点的值一定小于当前极小值。这样通过极小化填充函数,则一定能跳出当前极小点,得到一个更好的局部极小点。根据以上条件,国内外学者已构造了大量的填充函数,这些函数各有其优缺点,但仍没有一种普遍适用的填充

函数。通过验算比较,选择下面的单参数填充函数:

$$P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu) = -\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1^*\|^2 + \mu \{ \max[0, F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{X}_1^*)] \}^2 + \frac{1}{\mu} \{ \min[0, F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{X}_1^*)] \}^3 \tag{4}$$

可以证明,当参数  $\mu$  充分小时,上述函数满足填充函数的三条性质<sup>[7,8]</sup>。当用同伦方法找到一个局部点  $\mathbf{X}_1^*$  后,将  $F(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V}$  代入上式可得:

$$P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu) = \begin{cases} -\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1^*\|^2 + \mu(\mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V} - F(\mathbf{X}_1^*))^2, \\ \mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V} \geq F(\mathbf{X}_1^*) \\ -\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1^*\|^2 + \frac{1}{\mu}(\mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V} - F(\mathbf{X}_1^*))^3, \mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V} < F(\mathbf{X}_1^*) \end{cases} \tag{5}$$

对式(5)求导并代入式(3),可得如下同伦函数:

$$\mathbf{H}(a, \mathbf{X}) = (1-a) \nabla P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu) + a(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = 0 \tag{6}$$

式(5)、式(6)即为非线性填充最小二乘平差模型。根据填充函数的性质,利用同伦方法解算该模型,在跟踪同伦曲线的过程中,必定能找到比当前局部点  $\mathbf{X}_1^*$  更小的极值点。事实上,只要能找到一点  $\mathbf{X}$ ,使得  $\mathbf{V}^T \mathbf{P}\mathbf{V} < F(\mathbf{X}_1^*)$ ,即可跳出当前的局部收敛区域,再以该点为初始值,应用同伦方法可计算出比当前局部点更小的极值点。

## 3 计算步骤

式(5)的求解可采用式(6)的同伦方法解算,但是非线性函数本身都比较复杂,所构造的填充函数就更复杂了,再应用同伦方法解算会影响寻找局部点的速度。为此,采用函数值下降较快的两个搜索方向,其中一个为最速下降方向  $D_1 = -\nabla P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu)$ ,该方向可以保证  $P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu)$  的函数值下降,但不能保证  $F(\mathbf{X})$  的函数值下降。另外一个较优的搜索方向为  $D_2 = -\nabla F(\mathbf{X}) / \|\nabla F(\mathbf{X})\| - \nabla P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu) / \|\nabla P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu)\|$ ,该方向能同时保证  $P(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1^*, \mu)$  和  $F(\mathbf{X})$  的函数值下降。

当同伦方法解算出一个局部点后,判断该局部点是否为全局极小点可采用如下法则:若测量观测数据中没有明显的系统误差和粗差,最小二乘平差的随机模型假设正确,验后单位权中误差  $\hat{\sigma}_0$  应与先验单位权中误差  $\sigma_0$  大致相等,即检验计算是否全局收敛的一个判定准则为  $\hat{\sigma}_0 \approx \sigma_0$ 。但在实际测量数据处理时,由于系统误差或粗差的影

响,使得该准则不一定成立,故一般采用前后两次迭代的验后单位权中误差近似相等作为迭代收敛的判定准则,即 $\hat{\sigma}_i \approx \hat{\sigma}_{i-1}$ 。所以应用同伦函数与填充函数相结合解算非线性最小二乘平差的步骤为:

① 任意选定初值向量  $\mathbf{X}_0$ ,采用式(3)的同伦方法得到非线性最小二乘平差的一个局部点  $\mathbf{X}_1^*$ ;② 运用上述准则判断该局部点是否为全局最优解,若是,停止计算;否则,继续下一步;③ 利用局部点  $\mathbf{X}_1^*$  构造填充函数,以  $\mathbf{X}_1^*$  附近的点为初值解算填充函数,可以用同伦方法,也可用上面给出的两个搜索方向,当遇到一点  $\mathbf{X}$ ,其  $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} < F(\mathbf{X}_1^*)$ ,即可终止填充函数的计算,继续下一步;④ 以上一步得到的点  $\mathbf{X}$  为初值,继续采用式(3)的同伦方法得到非线性最小二乘平差的一个局部点  $\mathbf{X}_1^*$ ;⑤ 应用上述准则判断该局部点是否为全局最优解,若是,停止计算;否则,重复执行步骤③~⑤。

### 4 算 例

如图 1 所示,同精度观测了 10 条边长,按编号 1、2、…、10 的顺序,其观测边长分别为 660.286 m、324.613 m、212.418 m、437.826 m、333.549 m、317.077 m、472.565 m、347.416 m、347.312 m、386.715 m、A、B 为已知点,且  $X_A = 8\,434.880\text{ m}$ ,  $Y_A = 1\,184.710\text{ m}$ ,  $X_B = 8\,724.639\text{ m}$ ,  $Y_B = 809.720\text{ m}$ 。取两组不同的坐标初始值,它们都与真实值相差甚远,甚至点之间的拓扑关系也发生了明显的变形,采用同伦法与填充法相结合对该网进行平差,结果见表 1。由表 1 可看出,当第一组初始值离真值甚远时,采用同伦法平

差仍能得到精确的结果和精度,而线性化法、高斯-牛顿迭代法等其他方法得不到准确的结果。当采用第二组初始值时,应用同伦方法平差得到一个局部的极值点,很明显,该极值点并不是全局最优解。利用上述填充函数,取参数  $\mu = 10^{-6}$ ,采用上述两个搜索方向,找到比当前极值点更小的一个点,再以该点为初始值,应用同伦法平差得到全局最优解。

图 2 给出了上述三组初值平差的同伦曲线图,其中的零点及同伦曲线反映了在不同初值下同伦方法的迭代次数及迭代过程。由表 1 还可看出,第一类初始值离真值很远,但仍在同伦方法的收敛域内,故利用同伦方法仍能收敛到准确的值,说明同伦方法的收敛域很大。对于第二类初始值,虽然各点的坐标近似值离真值很近,但是由各点的坐标近似值所组合的第二类初始值处于局部收敛域内,导致利用同伦方法得到局部解,这正说明了同伦方法是局部收敛的,而由填充函数所得到的填充函数解则在同伦方法的收敛域内,故采用同伦填充函数组合方法可跳出局部收敛区域,得到最优解。

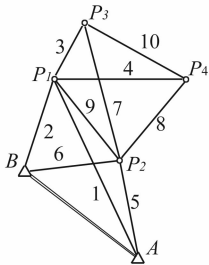


图 1 测边网  
Fig. 1 Trilateration Net

表 1 平差结果

Tab. 1 Results of Adjustment

	坐标	第一类初始值	同伦解	第二类初始值	同伦解	填充函数解	同伦填充函数组合解
$P_1$	$X_1/\text{m}$	-15 647.743 5	9 034.167 1	8 990.000 0	8 989.806 2	9 018.623 5	9 034.167 1
	$Y_1/\text{m}$	83 147.105 0	907.527 5	890.000 0	884.722 0	975.994 1	907.527 5
$P_2$	$X_2/\text{m}$	58 441.465 9	8 762.946 1	8 500.000 0	8 506.764 7	8 626.249 7	8 762.946 1
	$Y_2/\text{m}$	91 898.485 3	1 124.473 8	900.000 0	889.108 0	1 038.930 1	1 124.473 8
$P_3$	$X_3/\text{m}$	31 148.139 8	9 221.057 2	9 000.000 0	8 900.258 8	9 027.178 2	9 221.057 2
	$Y_3/\text{m}$	-92 857.664 3	1 008.489 8	800.000 0	740.597 1	842.873 7	1 008.489 8
$P_4$	$X_4/\text{m}$	69 825.861 2	9 031.114 8	8 700.000 0	8 707.677 1	8 810.298 6	9 031.114 9
	$Y_4/\text{m}$	86 798.649 6	1 345.343 2	1 200.000 0	1 144.286 7	1 283.783 9	1 345.343 2
	$\mathbf{V}^T \mathbf{V}/\text{mm}^2$		7.821 8		$4.149\,3 \times 10^{10}$	$4.148\,2 \times 10^{10}$	7.821 7
	单位权中误差/mm		1.977 6		144 035.987 9		1.977 6

### 5 结 语

非线性同伦最小二乘平差模型直接以所求的未知量为未知参数,采用预估校正方法跟踪同伦

曲线得到最终的解,消除了非线性最小二乘平差模型的误差。即使初始值离真值较远时,仍能收敛到准确的解,但该方法只是一种局部收敛方法。它能跳出当前的局部收敛区域,得到比当前局部点更优的极值点。通过同伦方法与填充方法的结

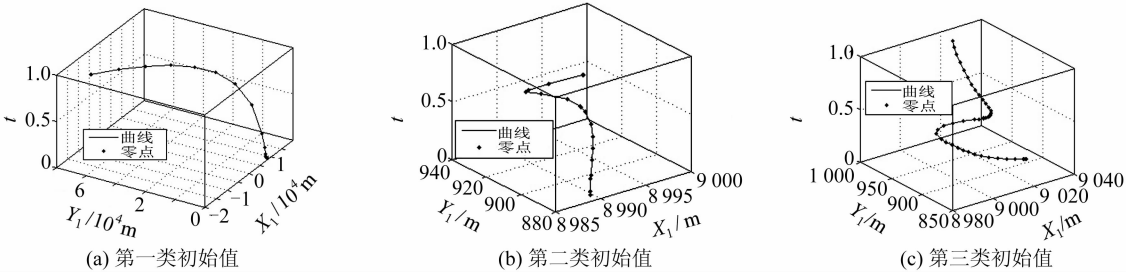


图 2 三组初值平差的同伦曲线  
Fig. 2 Homotopy Curve with the First Kind of Initial Values

合,能以任意初始值得到非线性最小二乘平差的全局最优解,该方法是一种全局收敛方法。

针对不同的非线性函数,需要构造不同的填充函数,也需要不同的计算填充函数的算法。但填充函数的求解思想应是未来求解非线性最小二乘平差最优解的发展方向。

参 考 文 献

[1] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002:51-81  
[2] 陶本藻,张勤. GPS 非线性数据处理的同伦最小二乘模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2003,28(特刊):115-117  
[3] 张勤,陶本藻. 基于同伦法的非线性最小二乘平差统一模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2004,29(8):708-710

[4] 王则柯,高堂安. 同伦方法引论[M]. 重庆:重庆出版社,1990:84-104  
[5] 黄象鼎,曾钟钢,马亚南. 非线性数值分析的理论与方法[M]. 武汉:武汉大学出版社,2004:117-158  
[6] Ge Renpu. A Filled Function Method for Finding a Global Minimizer of a Function of Several Variables [J]. Math Programming, 1990(46):191-204  
[7] 梁玉梅. 非线性全局优化的填充函数法[D]. 上海:上海大学,2006  
[8] Liang Y M, Zhang L S, Li M M, et al. A Filled Function Method for Global Optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007(205):16-31

第一作者简介:游为,博士生,现主要从事非线性最小二乘平差及卫星重力测量研究。  
E-mail:1985youwei@163.com

Nonlinear Least Squares Adjustment Based on Homotopy Functions and Filled Functions

YOU Wei<sup>1</sup> FAN Dongming<sup>1</sup> FU Shujuan<sup>2</sup>

(1 Department of Surveying and Mapping, Southwest Jiaotong University, 111 North 1 Section, Erhuan Road, Chengdu 610031, China)  
(2 Shenzhen Metro Co., LTD., 1016 Fuzhong First Road, Futian District, Shenzhen 518040, China)

**Abstract:** The method combining homotopy functions with filled functions to solve nonlinear least squares adjustment is presented. We first solve the well-posed nonlinear equations with homotopy method to obtain local optimal solutions, and reasonable filled functions are generated according to the local optimal solutions. It obtains better local optimal solutions than current solutions by the filled functions. Then, the homotopy functions and filled functions will be restructured. Finally, we can find the optimal solutions by limited loop-iteration method. The results show that the method can find optimal solutions effectively.

**Key words:** homotopy functions; filled functions; nonlinear least squares adjustment