

球面 Delaunay 三角网的透视投影算法

李佳田¹ 李 佳¹ 段 平¹ 余 莉¹

(1 昆明理工大学国土资源工程学院,昆明市文昌路 68 号,650093)

摘 要:为解决球面 Delaunay 构网中的拼接问题,顾及球面数据的位置特点,提出了利用透视投影模型将球面构网整体平面化的算法,其核心是置投影中心于球面,通过球面位置(x 、 y 与 z 坐标)共同约束,进而构成球面与投影平面位置间的一一映射。实验结果表明,此算法具有有效性及通用性,其时间复杂度取决于所采用的平面 Delaunay 三角网构建算法。

关键词:球面 Delaunay 三角网;透视投影模型;平面 Delaunay 三角网

中图法分类号:P208

球面 Delaunay 三角网(sphere Delaunay triangulated irregular network, SDTIN)构建算法^[1-7]中,投影拼接算法^[8-13]效率相对较高。然而,其问题在于拼接过程,即此算法需要分块地将数据平行投影至切平面,并以像点重合为基础保留与建立各分块间的边界关联,以最终将各分块数据拼接构成球面网格。拼接过程导致算法实用性显著降低。借助透视投影原理,本文提出了一种 SDTIN 生成算法,通过将投影中心置于球面,建立空间点与像点的一一映射,以避免出现拼接问题。

1 透视投影算法

将投影中心置于球面,不仅像点可以一致地在投影平面反映目标的邻接关系,而且射线与球面交点唯一,因此,投影又具有一一映射性质。

1.1 数据预处理

不失一般性,假定球面目标分布在单位球上,球面点集描述为:

$$P = \{p_i(x_i, y_i, z_i), i \in N\} \quad (1)$$

集合 P 在 x 、 y 与 z 坐标轴的范围是 $[-1, 1]$ 。在集合 P 中任选一点 $p_o(x_o, y_o, z_o)$ 作为投影中心,因为邻接关系最终要通过平面 Delaunay 三角网表达,并考虑计算简单性,将投影中心变化至 z 轴的极大值 $(0, 0, 1)$ 位置。将 p_i 绕 x 轴旋转至 xz 平面,此处,绕 x 轴旋转的角度 α 等于投影中心

p_o 在 yz 平面上的投影向量与 z 轴正向的夹角。根据矢量的内积、外积计算可得:

$$\sin\alpha = \frac{y_o}{\sqrt{y_o^2 + z_o^2}}, \cos\alpha = \frac{z_o}{\sqrt{y_o^2 + z_o^2}} \quad (2)$$

旋转矩阵 R_x 为:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

同理,绕 y 轴旋转角度 β 为:

$$\sin\beta = -\frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}}, \cos\beta = \frac{\sqrt{y_o^2 + z_o^2}}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}} \quad (4)$$

旋转矩阵 R_y 为:

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (5)$$

因此,将投影中心 p_o 变化至位置 $(0, 0, 1)$,旋转矩阵为:

$$R = R_x R_y \quad (6)$$

保持点集合 P 与 p_o 空间位置一致,旋转操作后,点集合 P^* 为:

$$P \xrightarrow{R} P^* \quad (7)$$

1.2 投影点集至观察平面

透视投影过程分为两步:第一步,将空间点 p 映射为连结 p 与投影中心的射线;第二步,将射

线线性地映射为像点。本文以平面透视投影为基础,采用一个不通过投影中心的平面与通过投影中心的射线相交构成像点。

取垂直于 z 轴的平面为观察平面,因此,投影中心 $p_o(x_o, y_o, z_o)$ 与点集合 P^* 中任意一点 $p^*(x_p, y_p, z_p)$ 构成的视线参数方程为:

$$\begin{cases} x = x_o + (x_p - x_o)t \\ y = y_o + (y_p - y_o)t \\ z = z_o + (z_p - z_o)t \end{cases} \quad (8)$$

整理,得参数 t :

$$t = \frac{z - z_o}{z_p - z_o} \quad (9)$$

代入 t ,得 $p^*(x_p, y_p, z_p)$ 在 xy 平面的投影点 (x, y) :

$$\begin{cases} x = x_o + \frac{(x_p - x_o)(z - z_o)}{z_p - z_o} \\ y = y_o + \frac{(y_p - y_o)(z - z_o)}{z_p - z_o} \end{cases} \quad (10)$$

此处,在计算上作简化处理。设观察平面为 xy 平面,即 z 值为 0,且投影中心位于位置 $(0,0,1)$,式(9)中参数 t 为:

$$t = \frac{1}{(1 - z_p)} \quad (11)$$

式(10)中 (x, y) 为:

$$\begin{cases} x = \frac{x_p}{1 - z_p} \\ y = \frac{y_p}{1 - z_p} \end{cases} \quad (12)$$

由式(12)可知,投影点坐标对 (x, y) 受其球面点 (x_p, y_p, z_p) 坐标值的共同限制,之间为一一映射关系。依据式(11)、(12),将点集合 P^* 中除投影中心之外的 $n-1$ 个点作投影变换至 xy 平面,得到点集合 P^\wedge 。很明显,在 xy 平面点集合 P^\wedge 中,任意两点位置不重叠。

1.3 球面邻接与球面闭合

对点集合 P^\wedge 作平面三角剖分,得到 Delaunay 三角网,将其表示为 $D(P^\wedge)$ 。由式(7)、(12)可知,旋转及投影操作均是作用于点集合的一一映射,因此,点集合 P 的邻接关系可被旋转点集合 P^* 表达,进而可被平面点集合 P^\wedge 表达,且邻接关系存在于 $D(P^\wedge)$ 中。此处, $n-1$ 个点已通过 $D(P^\wedge)$ 建立了邻接关系,但投影中心点并没有嵌入到 $D(P^\wedge)$ 中,因而,此时 SDTIN 并不是对球面的连续铺盖,即不闭合。因此,关键在于找到哪些球面点与投影中心点具有邻接关系。

设 $D(P^\wedge)$ 的凸壳为 $CH(P^\wedge)$,构成凸壳的点集合为 $P_{CH}^\wedge (P_{CH}^\wedge \subseteq P^\wedge)$, P_{CH}^\wedge 对应的球面点集合为

P_{CH} 。

命题 1 $\text{dis}(p_o, p_{CH}) < \text{dis}(p_o, p), p_{CH} \in P_{CH}, p \in P - P_{CH}$ 。

根据式(12),球面点 z 坐标值与其投影坐标 (x, y) 值成反比关系,即球面位置越接近投影中心 $(0,0,1)$,其平面投影坐标越远离 xy 平面原点 $(0,0)$ 。根据二维平面凸壳定义,对于任意平面凸壳边界点所对应的球面点,其与投影中心距离必然小于平面非凸壳边界点所对应的球面点与投影中心的距离。命题 1 成立。

设平面凸壳 P_{CH}^\wedge 所包含的结点数目为 m 。

命题 2 与构成平面凸壳 P_{CH}^\wedge 的 m 个点相对应的球面点是投影中心的 m 最邻近。

由命题 1 可知,命题 2 是成立的,即命题中的球面点与投影中心具有邻接关系。

1.4 三角形法向一致化

对于构成 SDTIN 的三角形,应具有一致的法向表示,具体表现在构成三角形的结点排列上。例如,平面 Delaunay 三角网的三角形缺省为结点逆时针排列,法向量指向 z 轴正方向。

空间 4 点 $p_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ 构成的四面体带符号体积公式为:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (13)$$

设球面三角形 t 的顶点为 $p_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $p_2(x_2, y_2, z_2)$ 、 $p_3(x_3, y_3, z_3)$,并且 $p_4(x_4, y_4, z_4)$ 为原点 $(0,0,0)$,代入式(13),则 V 为:

$$V = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad (14)$$

如果 V 为正值,则原点位于三角形法向量正方向;反之,则位于三角形法向量负方向。指定三角形的法向指向球面 SDTIN 所构成的球体外,即 V 值为负值,否则,需要调整三角形结点排列为原排列的逆形式。

2 实验与分析

分析算法各步骤的时间复杂度,数据旋转变换 $O_{\tan}(c_1 \cdot n)$,投影变换 $O_{\text{pro}}(c_2 \cdot n)$,据欧拉公式,三角形数与结点数呈线性关系,即三角形结点排序为 $O_{\text{ord}}(c_3 \cdot n)$ 。设平面 Delaunay 三角网构网步骤的时间复杂度为 $O_{\text{del}}(\cdot)$,可得算法总时间复杂度为 $O(c \cdot n + \cdot)$, c 为常数 $c_1 + c_2 + c_3$ 。因

左项是 $O(n)$ 形式,所以算法时间复杂度决定于右项。如果平面 Delaunay 三角网为 $O(n)$ 复杂度,则其可与左项合并,算法复杂度为 $O(c \cdot n)$ 形式;如平面 Delaunay 三角网为其他复杂度形式,其复杂性高于左项,算法复杂度整体表现为平面 Delaunay 三角网构网的复杂度。

随机生成球面数据点,分别用平面 Delaunay 三角网逐点插入算法(时间复杂度为 $O(n^2)$)及平面 Delaunay 三角网分治算法(时间复杂度为 $O(n)$),得出点数目与球面构网的时间关系。由于避免了拼接过程,从图 1、2 可知,本文算法时间复杂度由所采用的平面 Delaunay 三角网算法的复杂度决定。虽然本文算法与平面 Delaunay 三角网分治算法两者均为线性特征,由于本文球面算法包含旋转变换、投影变换及法向调整步骤,使算法用时增多。值得说明的是,由于实验环境及具体实现方法的差异,平面 Delaunay 三角网构网用时会与某些文献中描述的不尽相同。

为了更加细致地表达计算过程,在球面邻接关系的建立中,按照球面点相对于投影中心 z 轴距离由大到小进行,并将投影中心移动到与视点同侧(见图 3)。

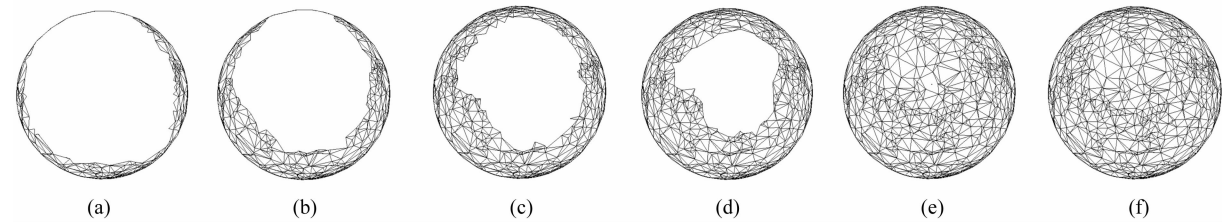


图 3 计算过程描述((a)~(d)为中间过程,(e)~(f)为球面闭合)

Fig. 3 Description of Computing Progress((a)-(d) are Middle Steps, (e)-(f) are Sphere Surface Closure)

3 结 语

本文提出了一种基于透视投影模型的 SD-TIN 整体构建算法,其以平面 Delaunay 三角网算法为基础,避免拼接,具有高效性与通用性。此外,在数据范围上,本文算法也可用于构建球面局部 Delaunay 三角网;在构网类型上,可向球面约束 Delaunay 三角网扩展。在球面数据邻接关系最优性方面,本文算法具有一定的局限性,原因是球面与平面不同胚。在保持算法高效性的前提下,球面邻接关系判定与优化是下一步亟待研究与解决的问题。

参 考 文 献

[1] 陈军. Voronoi 动态空间数据模型[M]. 北京: 测绘

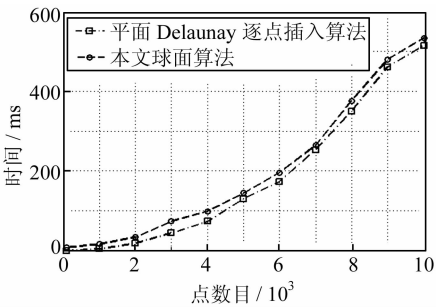


图 1 逐点插入算法与本文球面算法的时间关系
Fig. 1 Time Relation Between IIA and the Proposed Algorithm

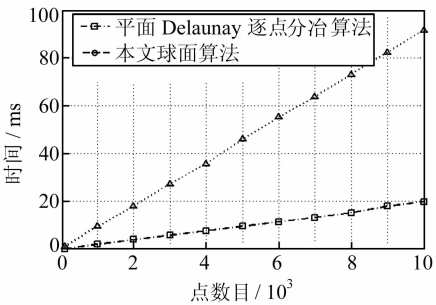


图 2 分治算法与本文球面算法的时间关系
Fig. 2 Time Relation Between DCA and the Proposed Algorithm

出版社, 2002

[2] Christopher G, Mir A M. Towards the Global GIS [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing, 2000, 55: 150-163

[3] Fang T, Les A P. Delaunay Triangulation in Three Dimensions[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1995, 15(5): 62-69

[4] Okabe A, Boots B, Sugihara K. Spatial Tessellations-Concepts and Applications of Voronoi Diagrams[M]. Chichester: Wiley, 1992

[5] Chen Jun, Zhao Xuesheng, Li Zhilin. An Algorithm for the Generation of Voronoi Diagrams on the Sphere Based on QTM[J]. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 2003, 69(1): 79-90

[6] 童晓冲, 贲进, 张永生. 基于二十面体剖分格网的球面实体表达与 Voronoi 图生成[J]. 武汉大学学报 · 信息科学版, 2006, 31(11): 966-970

[7] 白建军,赵学胜,陈 军. 基于椭球面三角格网的数字高程建模[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2005, 30(5): 383-387

[8] Gopi M, Krishnan S. A Fast and Efficient Projection Based Approach for Surface Reconstruction [C]. The 15th Symposium on Computer Graphics and Image Processing, Brasilia, Brazil, 2002

[9] 纪凤欣,欧宗瑛,秦绪佳,等. 基于 Delaunay 三角剖分的层析图像离散数据表面重建算法[J]. 工程图学学报, 2001, 22(2): 53-58

[10] Robert J R. Delaunay Triangulation and Voronoi Diagram on the Surface of a Sphere [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1997, 23 (3): 416-434

[11] Tsai V J D. Delaunay Triangulations in TIN Creation: an Overview and a Linear-Time Algorithm[J]. International Journal of Geographical Information Systems, 1993, 7(6): 501-524

[12] 王青,王融清,鲍虎军,等. 散乱数据点的增量快速曲面重建算法 [J]. 软件学报, 2000, 11(9): 1 221-1 227

[13] 王永波,盛业华,闫国年,等. 基于 Delaunay 规则的无组织采样点集表面重建方法[J]. 中国图像图形学报, 2007, 12(9):1 537-1 543

第一作者简介:李佳田,博士,副教授,研究方向为不规则空间剖分模型与 GIS 算法。
E-mail:ljwtwcx@163.com

Perspective Projection Algorithm for Sphere Delaunay Triangulated Irregular Network

LI Jiatian¹ LI Jia¹ DUAN Ping¹ YU Li¹

(1 Land Resources Engineering,Kunming University of Science and Technology,
68 Wenchang Road, Kunming 650093, China)

Abstract: In order to solve the merging problem in constructing sphere Delaunaytriangulated irregular network (SDTIN), considering the position feature of sphere datum, an overall planarity algorithm with the perspective projection model is proposed. We place the projected center on the sphere and use the sphere position restriction (i. e. x , y and z coordinates). Then one to one mapping between sphere and plane is accomplished. The experimental results show that the proposed algorithm is effective and generic, and its time complexity is determined by the adopted algorithm of plane Delaunay triangulated irregular network.

Key words: sphere Delaunay TIN; perspective projection model; plane Delaunay TIN

About the first author: LI Jiatian, Ph.D, associate professor. His research interests include model of irregular space subdivision and algorithms in GIS.
E-mail: ljwtwcx@163.com

下期主要内容预告

- 脉冲激光抽运铷原子钟研究

► 面向遥感应用的 GNSS 反射信号接收处理系统及实验

► 利用非组合精密单点定位提取区域电离层延迟及其精度评定

► 960~1 610 MHz 频段全球业务及 GNSS 频谱兼容分析

► 用于 GNSS 的 SpT 星载原子钟及时间系统介绍

► 区域卫星导航系统硬件延迟解算

► S 频段用于卫星导航的电磁环境研究
- 杜志静,等

李伟强,等

李 玮,等

卢 鋈,等

王庆华,等

吴晓莉,等

赵 阳,等