文章编号：1671-8860(2011)07-0843-04　　　　**文献标志码**：A

等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式

李厚朴[1,2]　边少锋[1]　陈良友[3]

（1　海军工程大学导航工程系，武汉市解放大道 717 号，430033）
（2　海岛（礁）测绘技术国家测绘局重点实验室，青岛市前湾港路 579 号，266510）
（3　75230 部队，惠州市，512100）

摘　要：为实现等面积投影和等角投影间的直接变换，借助计算机代数系统 Mathematica，推导出了等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式，并将式中系数统一表示为椭球第一偏心率的幂级数形式，可解决不同参考椭球下的变换问题。算例分析表明，本导出公式的计算误差分别小于 10 m^2 和 10^{-4}(″)，可供实际使用。

关键词：地图投影；等面积纬度函数；等量纬度；计算机代数系统
中图法分类号：P226.3；P282

等面积投影和等角投影是地图投影中两类重要的投影，在测量、地图制图、地理信息系统(GIS)和全球空间信息网格的构建等领域中有着广泛的应用[1-6]。这两类投影之间的变换是实际生产中经常会遇到的一个基本问题。总体上，解决这一问题的方法主要有解析法[1,2]和数值法[7]，其中解析法最为常用。根据研究思路的不同，解析法又可分为正解变换法和反解变换法[2]。正解变换法建立了两种投影坐标之间的一一映射，给出了它们之间的直接解析式，表达了编图和制图的数学实质。对计算机辅助制图来说，这种表示最为方便，但由于涉及到非常复杂的数学运算，建立两投影间的直接关系式并非易事。目前，地球椭球模型下等面积投影和等角投影之间的变换主要采用反解变换法，即根据原有地图投影方程，反解出原地图投影点的地理坐标，然后代入新投影中求得该点在新投影下的直角坐标。这种方法虽然容易理解，但计算过程相当复杂，在处理海量数据间的变换时效率不高。

等面积纬度函数、等量纬度是等距离投影和等角投影中的两类重要变量，它们都是大地纬度的函数。如果能够得到等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式，那么将可以建立等面积投影和等角投影坐标间的直接解析式，从而革新这两类投影的传统变换模型，简化计算过程，来提高计算效率。近年来，国内外地图投影学者对等面积纬度函数、等量纬度与大地纬度之间的正反算问题进行了深入研究，取得了一批显著的成果[8-13]，但限于问题本身的复杂性，等面积纬度函数与等量纬度之间的变换目前主要是通过解算大地纬度间接实现的，从而导致无法建立等面积投影和等角投影坐标之间的直接关系式。为实现等面积投影和等角投影之间的直接变换，本文借助了具有强大符号运算功能的计算机代数系统 Mathematica[14]，推导出了等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式，并设计算例分析了导出公式的计算误差。

1　等面积纬度函数、等量纬度及其正反解公式

1.1　等面积纬度函数及其正反解公式

由地图投影理论可知，旋转椭球面单位经差由赤道至大地纬度 B 处所界曲边梯形的面积为[1,2]：

$$F = a^2(1-e^2)\int_0^B \frac{\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^2}\mathrm{d}B \quad (1)$$

式中，a 为参考椭球长半径；e 为椭球第一偏心率。

收稿日期：2011-04-20。
项目来源：国家自然科学基金资助项目(40774002，40904018，41071295)；海军工程大学自然科学基金资助项目(HGDYDJJ009)；海岛(礁)测绘技术国家测绘局重点实验室开放研究基金资助项目(2010B04)。

式(1)有分析解,积分后有[10]:

$$F = a^2(1-e^2)\cdot\left[\frac{\sin B}{2(1-e^2\sin^2 B)}+\frac{1}{4e}\ln\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B}\right] \quad (2)$$

式中,F 为等面积纬度函数。根据文献[12,13],等面积纬度函数的正解公式可以表示为:

$$\begin{cases}\vartheta = B+\gamma_2\sin 2B+\gamma_4\sin 4B+\gamma_6\sin 6B+\gamma_8\sin 8B\\ F = R'^2\sin\vartheta\end{cases} \quad (3)$$

等面积纬度函数的反解公式可以表示为:

$$\begin{cases}\vartheta = \arcsin(\frac{F}{R'^2})\\ B = \vartheta+C_2\sin 2\vartheta+C_4\sin 4\vartheta+C_6\sin 6\vartheta+\\ \quad C_8\sin 8\vartheta\end{cases} \quad (4)$$

1.2 等量纬度及其正反解公式

由地图投影理论可知,等量纬度 q 与大地纬度 B 的关系式为:

$$q = \int_0^B\frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)\cos B}\mathrm{d}B = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B}\right)^{e/2}\right] \quad (5)$$

根据文献[12,13],等量纬度的正解公式可以表示为:

$$\begin{cases}\varphi = B+\beta_2\sin 2B+\beta_4\sin 4B+\beta_6\sin 6B+\\ \quad\beta_8\sin 8B\\ q = \operatorname{arctanh}(\sin\varphi)\end{cases} \quad (6)$$

等量纬度的反解公式可以表示为:

$$\begin{cases}\varphi = \arcsin(\tanh q)\\ B = \varphi+B_2\sin 2\varphi+B_4\sin 4\varphi+B_6\sin 6\varphi+\\ \quad B_8\sin 8\varphi\end{cases} \quad (7)$$

2 等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式

2.1 等量纬度变换至等面积纬度函数的直接解算公式

由式(7)和式(3),可得等量纬度 q 变换至等面积纬度函数 F 的公式为:

$$\begin{cases}\varphi = \arcsin(\tanh q)\\ B = \varphi+B_2\sin 2\varphi+B_4\sin 4\varphi+B_6\sin 6\varphi+\\ \quad B_8\sin 8\varphi\\ \vartheta = B+\gamma_2\sin 2B+\gamma_4\sin 4B+\gamma_6\sin 6B+\\ \quad\gamma_8\sin 8B\\ F = R'^2\sin\vartheta\end{cases} \quad (8)$$

使用式(8)需要经过4步计算方可完成转换,较为复杂,有必要导出更为实用的直接解算公式。从理论上讲,可将该式中的变量 B 和 ϑ 消去,导出由等角纬度 φ 计算等面积纬度函数 F 的直接解算公式。但是,该过程人工推导起来极其繁琐,甚至难以实现。本文借助计算机代数系统 Mathematica 强大的数学分析能力,成功地解决了这一难题,在 $e=0$ 处将 F 展开为 e 的幂级数形式,取至 e^8 项,整理后可得:

$$F = a^2(t_1\sin\varphi+t_3\sin 3\varphi+t_5\sin 5\varphi+t_7\sin 7\varphi+t_9\sin 9\varphi) \quad (9)$$

式中系数为:

$$t_1 = 1-\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{12}e^4-\frac{7}{192}e^6-\frac{113}{5\,760}e^8;$$
$$t_3 = \frac{1}{12}e^2-\frac{7}{960}e^6-\frac{1}{192}e^8;$$
$$t_5 = \frac{1}{60}e^4+\frac{1}{192}e^6+\frac{1}{20\,160}e^8;$$
$$t_7 = \frac{31}{6\,720}e^6+\frac{7}{2\,304}e^8;t_9 = \frac{41}{26\,880}e^8 \quad (10)$$

根据三角函数的倍角形式与幂形式的转换关系,可将式(9)变换为:

$$F = a^2(m_1\sin\varphi+m_3\sin^3\varphi+m_5\sin^5\varphi+m_7\sin^7\varphi+m_9\sin^9\varphi) \quad (11)$$

式中系数为:

$$m_1 = 1;m_3 = -\frac{1}{3}e^2-\frac{1}{3}e^4-\frac{1}{3}e^6-\frac{1}{3}e^8;$$
$$m_5 = \frac{4}{15}e^4+\frac{3}{5}e^6+e^8;m_7 = -\frac{31}{105}e^6-\frac{338}{315}e^8;$$
$$m_9 = \frac{41}{105}e^8 \quad (12)$$

将式(8)第一式代入式(11),可得等量纬度 q 变换至等面积纬度函数 F 的直接解算公式为:

$$F = a^2(m_1\tanh q+m_3\tanh^3 q+m_5\tanh^5 q+m_7\tanh^7 q+m_9\tanh^9 q \quad (13)$$

2.2 等面积纬度函数变换至等量纬度的直接解算公式

由式(4)和式(6),可得等面积纬度函数 F 变换至等量纬度 q 的公式为:

$$\begin{cases}\vartheta = \arcsin(\frac{F}{R'^2})\\ B = \vartheta+C_2\sin 2\vartheta+C_4\sin 4\vartheta+C_6\sin 6\vartheta+\\ \quad C_8\sin 8\vartheta\\ \varphi = B+\beta_2\sin 2B+\beta_4\sin 4B+\beta_6\sin 6B+\\ \quad\beta_8\sin 8B\\ q = \operatorname{arctanh}(\sin\varphi)\end{cases} \quad (14)$$

为简化计算,可消去式中的变量 B 和 φ,将 q

表示为 ϑ 的显函数形式。借助 Mathematica 在 $e=0$处将 q 展开为 e 的幂级数形式,取至 e^8 项,整理后可得:

$$q = \operatorname{arctanh}(\sin\vartheta) + f_1\sin\vartheta + f_3\sin3\vartheta + f_5\sin5\vartheta + f_7\sin7\vartheta \tag{15}$$

式中,

$$f_1 = -\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{30}e^4 - \frac{11}{1\,890}e^6 - \frac{107}{302\,400}e^8;$$
$$f_3 = -\frac{1}{90}e^4 - \frac{61}{11\,340}e^6 - \frac{2\,321}{907\,200}e^8;$$
$$f_5 = -\frac{1}{756}e^6 - \frac{5}{4\,032}e^8;\ f_7 = -\frac{71}{302\,400}e^8 \tag{16}$$

根据三角函数的倍角形式与幂形式的转换关系,式(15)可以变换为:

$$q = \operatorname{arctanh}(\sin\vartheta) + n_1\sin\vartheta + n_3\sin^3\vartheta + n_5\sin^5\vartheta + n_7\sin^7\vartheta \tag{17}$$

式中系数为:

$$n_1 = -\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{1}{35}e^6 - \frac{1}{63}e^8;$$
$$n_3 = \frac{2}{45}e^4 + \frac{136}{2\,835}e^6 + \frac{683}{14\,175}e^8;$$
$$n_5 = -\frac{4}{189}e^6 - \frac{218}{4\,725}e^8;\ n_7 = \frac{71}{4\,725}e^8 \tag{18}$$

将式(14)第一式代入式(17),可得等面积纬度函数 F 变换至等量纬度 q 的直接解算公式为:

$$q = \operatorname{arctanh}\left(\frac{F}{R^2}\right) + \frac{n_1}{R^2}F + \frac{n_3}{R^6}F^3 + \frac{n_5}{R^{10}}F^5 + \frac{n_7}{R^{14}}F^7 \tag{19}$$

由文献[12,13]可知:

$$R'^2 = a^2(1-e^2)\left(\frac{1}{2(1-e^2)} + \frac{1}{4e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right) \tag{20}$$

将式(20)代入式(19),整理后可得:

$$q = \operatorname{arctanh}\left(\frac{F}{a^2p_0}\right) + p_1\frac{F}{a^2} + p_3\left(\frac{F}{a^2}\right)^3 + p_5\left(\frac{F}{a^2}\right)^5 + p_7\left(\frac{F}{a^2}\right)^7 \tag{21}$$

式中系数为:

$$p_0 = 1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{1}{35}e^6 - \frac{1}{63}e^8;$$
$$p_1 = -\frac{1}{3}e^2 - \frac{8}{45}e^4 - \frac{104}{945}e^6 - \frac{1\,048}{14\,175}e^8;$$
$$p_3 = \frac{2}{45}e^4 + \frac{262}{2\,835}e^6 + \frac{1\,909}{14\,175}e^8;$$
$$p_5 = -\frac{4}{189}e^6 - \frac{1\,154}{14\,175}e^8;\ p_7 = \frac{71}{4\,725}e^8 \tag{22}$$

3　计算误差分析

为说明导出的等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式的准确性与可靠性,本文选用 2000 中国大地坐标系(CGCS2000)[15],参考椭球常数 a=6 378 137 m,$1/f$=298.257 222 101,对式(13)和式(21)的计算误差进行了分析。

误差分析的基本思路是:取定大地纬度 B_0,将其分别代入式(2)、式(5),可得等面积纬度函数、等量纬度的理论值 F_0、q_0。将 q_0 代入式(13),可得变换后的等面积纬度函数 F_1;将 F_0 代入式(21)可得变换后的等量纬度 q_1。将 F_1、q_1 分别与理论值 F_0、q_0 作差比较,得到式(13)、式(21)的计算误差 ΔF_1、Δq_1,如表 1 所示。

表 1　等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算式(13)和式(21)的计算误差

Tab. 1　Errors of the Direct Calculating Formulae Eq. 13 and Eq. 21 for Transformations between Authalic Latitude Function and Isometric Latitude

B_0 /(°)	ΔF_1 /m²	Δq_1 /(″)	B_0 /(°)	ΔF_1 /m²	Δq_1 /(″)
5	0.1	9.9×10^{-9}	50	4.7	-4.4×10^{-8}
10	0.8	1.8×10^{-8}	55	4.7	-6.5×10^{-8}
15	2.3	2.2×10^{-8}	60	5.0	-9.2×10^{-8}
20	4.2	2.2×10^{-8}	65	5.3	-1.4×10^{-7}
25	5.9	1.8×10^{-8}	70	5.5	-2.2×10^{-7}
30	6.7	1.0×10^{-8}	75	5.5	-4.0×10^{-7}
35	6.6	-6.6×10^{-10}	80	5.5	-9.1×10^{-7}
40	5.9	-1.3×10^{-8}	85	5.5	-3.7×10^{-6}
45	5.1	-2.8×10^{-8}	89	5.6	9.2×10^{-5}

由表 1 可以看出,本文导出的等量纬度变换至等面积纬度函数的直接解算式(13)的误差小于 10 m²(与之相对应的纬度误差小于 10^{-6}″);导出的等面积纬度函数变换至等量纬度的直接解算式(21)的误差小于 10^{-4}″,可以满足测量和地图学要求的计算精度。

4　结　语

为实现等面积投影和等角投影间的直接变换,本文借助计算机代数系统 Mathematica,推导出了等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式,并将式中系数统一表示为椭球第一偏心率的幂级数形式,可解决不同参考椭球下的变换问题。利用该式可实现等面积投影和等角投影的直接变换,从而简化投影变换的计算过程,提高计算效率。算例分析表明,本文导出公式的计算误差

分别小于10 m^2 和 $10^{-4}{''}$，可以满足测量和地图学要求的计算精度。

参 考 文 献

[1] 胡毓矩，龚剑文，黄伟. 地图投影[M]. 北京：测绘出版社，1997

[2] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京：解放军出版社，1989

[3] 龚健雅. 地理信息系统基础[M]. 北京：科学出版社，2001

[4] Snyder J P. An Equal-Area Map Projection for Polyhedral Globes[J]. Cartographica，1992，29(1)：10-21

[5] 张永生，贲进，童晓冲. 地球空间信息球面离散网格——理论、算法及应用[M]. 北京：科学出版社，2007

[6] 刘丽群，乔俊军. 双曲型经线等面积伪圆柱投影族的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2007，32(6)：552-555

[7] 吕晓华，刘宏林. 地图投影数值变换方法综合评述[J]. 测绘学院学报，2002，19(2)：150-153

[8] 孙群，杨启和. 底点纬度解算以及等量纬度和面积函数反解问题的探讨[J]. 测绘学院学报，1985(2)：64-75

[9] Yang Qihe，Snyder J P，Tobler W R. Map Projection Transformation：Principles and Applications [M]. London：Taylor & Francis，2000

[10] 钟业勋，魏文展. 由子午线弧长和球面梯形面积反算纬度的方法[J]. 测绘工程，2003，12(4)：16-18

[11] Craig R. Auxiliary Latitude Formulas：Finding the Coefficients Numerically and Symbolically [C]. Wolfram Technology Conference，Champaign，America，2006

[12] 边少锋，纪兵. 距离纬度等量纬度和等面积纬度展开式[J]. 测绘学报，2007，36(2)：218-223

[13] 李厚朴，边少锋. 辅助纬度反解公式的Hermite插值法新解[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2008，33(6)：623-626

[14] 边少锋，许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京：国防工业出版社，2004

[15] 陈俊勇. 中国现代大地基准——中国大地坐标系统2000(CGCS2000)及其框架[J]. 测绘学报，2008，37(3)：269-271

第一作者简介：李厚朴，博士，讲师，研究方向为大地测量和卫星导航。

E-mail：lihoupu1985@126.com

The Direct Calculating Formulae for Transformations Between Authalic Latitude Function and Isometric Latitude

LI Houpu[1,2] *BIAN Shaofeng*[1] *CHEN Liangyou*[3]

(1 Department of Navigation，Naval University of Engineering，717 Jiefang Road，Wuhan 430033，China)

(2 Key Laboratory of Surveying and Mapping Technology on Island and Reef，State Bureau of Surveying and Mapping，579 Qianwangang Road，Qingdao 266510，China)

(3 75230 Troops，Huizhou 512100，China)

Abstract：In order to realize the direct transformations between authalic and conformal projections，the direct calculating formulae for transformations between authalic latitude function and isometric latitude are derived with the help of computer algebra system Mathematica. Their coefficients are expressed uniformly in a power series of the first eccentricity of the ellipsoid，and the transformation problem when different reference ellipsoids are used could be solved. Numerical examples show that errors of the two formulae is less than 10 m^2 and $10^{-4}{''}$ respectively，which could satisfy practical application.

Key words：map projection；authalic latitude function；isometric latitude；computer algebra system

About the first author：LI Houpu，Ph.D，lecturer，majors in geodesy and satellite navigation.

E-mail：lihoupu1985@126.com