

# 利用中位数进行光纤陀螺信号抗差估计

蒋庆仙<sup>1,2</sup> 王成宾<sup>2</sup> 马小辉<sup>2</sup> 陈晓璧<sup>2</sup>

(1 西安交通大学机械工程学院,西安市咸宁西路 28 号,710049)  
(2 西安测绘研究所,西安市雁塔路中段 1 号,710054)

**摘 要:**为了削弱光纤陀螺信号中异常噪声对寻北精度的影响,在滤除高频周期噪声的基础上,提出了一种处理陀螺信号的新算法。推导了陀螺信号的抗差解公式及其误差影响函数,取观测值的中位数作为抗差初值,利用一次抗差估计求得的观测残差再用中位数法求得均方差因子,并给出了高崩溃污染率的初值辅以 IGGⅢ 方案迭代解算的混合算法。计算结果表明,基于可靠初值和均方差因子估值的抗差估计可以有效削弱异常干扰对陀螺的影响。

**关键词:**抗差估计;中位数;粗差;陀螺漂移;异常干扰

**中图法分类号:**P213

在捷联寻北仪中,陀螺信号易受外界干扰的影响,干扰信号通常称为陀螺漂移,是导致寻北精度下降的主要原因。陀螺漂移可分为系统性和随机性两种。陀螺随机漂移是系统的主要误差源,常用的利用 Kalman 滤波和小波阈值消噪对陀螺随机漂移进行处理的方法有其局限性<sup>[1-3]</sup>。工程中常采用低通滤波处理陀螺信号,也有其缺点<sup>[4]</sup>。

近年来,抗差估计开始应用于陀螺异常噪声的处理,已取得了一些成效<sup>[5,6]</sup>。但由于对抗差估计的本质的理解不够准确,在使用中对抗差初值和均方差因子的处理有缺陷,不能有效发挥抗差估计抵制异常噪声的作用。本文采用了高崩溃污染率的初值辅以 IGGⅢ 方案迭代解算的混合算法,取观测值的中位数作为抗差初值,采用一次抗差估计求得的观测残差再用中位数法求得均方差因子。计算结果表明,该算法能够有效抵制异常噪声对陀螺的影响,提高了寻北精度。

## 1 粗差对陀螺信号 LS 解的影响

设观测向量  $\mathbf{L}$ ,未知参数向量估值  $\hat{\mathbf{X}}$ ,误差

方程为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \text{ 权矩阵 } \mathbf{P} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{A}$  为  $n \times m$  阶设计矩阵,也称观测矩阵; $\mathbf{V}$  为  $n \times 1$  维残差向量。

设观测值独立,先验权矩阵  $\mathbf{P} = \text{diag}[p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$ 。未知参数的最小二乘解为:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (2)$$

式(2)的误差影响函数为<sup>[7]</sup>:

$$\text{IF}_{\text{LS}}(L_i; \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}, F) = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_i (a_i \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}} - L_i) = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_i v_i \quad (3)$$

式中, $F$  为测值  $L_1, L_2, \cdots, L_n$  的污染分布函数; $v_i$  为第  $i$  个观测值的残差。

影响函数 IF 反映了不同位置上异常值对统计量所造成的相对影响。IF 越小,估值对异常值越不敏感<sup>[7]</sup>。

在静基座上采集一组光纤陀螺信号  $\{x_i\} (i = 1, 2, \cdots, n)$ ,误差方程为:

$$v_i = \hat{x} - x_i, \ p_i = 1 \quad (4)$$

式中, $\hat{x}$  为参数估值; $x_i$  为第  $i$  个观测值; $v_i$  为第  $i$  个观测值的残差; $p_i$  为第  $i$  个观测值的权。

参数的最小二乘解为:

$$\hat{x}_{LS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tag{5}$$

由式(3)、(4)得到  $\hat{x}_{LS}$  的误差影响函数为:

$$\text{IF}_{LS}(x_i; \hat{x}_{LS}, F) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \tag{6}$$

由式(6)可知,残差  $v_i$  对 LS 解的影响函数直接取决于  $v_i$ ,随  $v_i$  的增大而增大。若  $v_i$  无界,则误差影响也无界。显然,当观测值中含有异常值时,LS 解将被扭曲。

2 光纤陀螺信号的抗差估计

2.1 陀螺信号的高崩溃污染率抗差解

为了衡量抗差估计的抗差能力,引入崩溃污染率的定义<sup>[7]</sup>。当观测值中存在粗差时,取极值函数为<sup>[7]</sup>:

$$\sum_{i=1}^n p_i \rho(v_i) = \sum_{i=1}^n p_i \rho(\hat{x} - x_i) = \min \tag{7}$$

式中,  $\rho$  一般为适当选择的非负减函数。

式(7)对  $x$  求导,并令为 0,同时记  $\phi(v_i) = \partial \rho / \partial v_i$ ,则有:

$$\sum_{i=1}^n p_i \phi(v_i) = 0 \tag{8}$$

令  $\phi(v_i)/v_i = W_i$  (权因子),  $\bar{p}_i = p_i W_i$  为等价权函数。顾及式(4),得参数的抗差估计解为:

$$\hat{x}_R = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i x_i / \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \tag{9}$$

抗差估计的关键是寻求合适的等价权函数,以保证估值的抗差性和效率<sup>[8]</sup>。常用的 IGGⅢ 等价权函数为<sup>[7]</sup>:

$$\bar{p}_i = \begin{cases} p_i, & |\tilde{v}_i| \leq k_0 \\ p_i \frac{k_0}{|\tilde{v}_i|} \left( \frac{k_1 - |\tilde{v}_i|}{k_1 - k_0} \right)^2, & k_0 < |\tilde{v}_i| \leq k_1 \\ 0, & |\tilde{v}_i| > k_1 \end{cases} \tag{10}$$

式中,  $\tilde{v}_i = v_i / \sigma_i$ , 为标准化残差;  $\sigma_i = \hat{\sigma}_0 / \sqrt{p_i}$ ,  $\hat{\sigma}_0$  为均方差因子估值,采用初次平差的残差由中位数法求得<sup>[8]</sup>。  $k_0$  和  $k_1$  为临界值,一般  $k_0 \in [1.0 \ 1.5], k_1 \in [2.5 \ 8.0]$ 。

抗差估计解的抗差性取决于等价权函数和参数的初值<sup>[9]</sup>。当观测值服从 Laplace 分布时,中位数是极大似然估计。取观测值的中位数作为迭代初值可以保证初值具有 50% 的高崩溃污染率,即使有 50% 的数据受到粗差的污染,也能够得到可靠的初值<sup>[5,9,10]</sup>。

式(9)的解算一般采用迭代法,在消除了白噪声、周期噪声和高频噪声的前提下,取观测值的中位数作为抗差初值,采用如下步骤解算<sup>[9]</sup>。

1) 取全部观测值的中位数:

$$x^0 = \text{median}\{x_i\} \tag{11}$$

2) 求各观测值与中位数之差,即初始残差:

$$v_i^0 = x_i - x^0 \tag{12}$$

3) 计算均方差因子估值<sup>[8]</sup>:

$$\hat{\sigma}_0 = \text{median}\{|\sqrt{p_i} v_i^0|\} / 0.674 \ 5 \tag{13}$$

4) 取强淘汰权函数  $\bar{p}_i^0$  (见式(10),  $p_i = 1$ )。

5) 计算抗差估计解及观测值残差:

$$\hat{x}^1 = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i^0 x_i / \sum_{i=1}^n \bar{p}_i^0, v_i^1 = x_i - \hat{x}^1 \tag{14}$$

由于验前均方差因子  $\sigma_0$  往往不能可靠地反映实际观测样本的离散度,为了保证  $\sigma_0$  的可靠性,实际进行误差检验和抗差估计时需要重新计算。在求解得到一步抗差估计值后,再次计算观测值残差和  $\hat{\sigma}_0$ ,并以此为基础进行新的抗差估计迭代计算,且在以后的迭代计算中  $\hat{\sigma}_0$  不变<sup>[8]</sup>。

2.2 误差影响函数及验后精度估计

将式(3)中的权  $p_i$  替换为等价权  $\bar{p}_i$ ,并顾及式(4),得到陀螺信号抗差解公式的误差影响函数为:

$$\text{IF}_R(x_i; \hat{x}_R, F) = -\sum_{i=1}^n \bar{p}_i v_i / \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \tag{15}$$

由式(15)可见,残差  $v_i$  对参数估值的影响主要取决于等价权  $\bar{p}_i$ 。当  $v_i$  增大到某临界值时,等价权  $\bar{p}_i$  减小,甚至为零。由于等价权的作用,当观测值受到粗差污染时,陀螺信号的抗差解能够减免粗差的干扰。

单次测量的中误差为:

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{n-1-t_0} \sum_{i=1}^n \bar{p}_i (\hat{x}_R - x_i)^2} \tag{16}$$

单次测量的均方根误差(RMS)为:

$$\hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{n-t_0} \sum_{i=1}^n \bar{p}_i (\tilde{x} - x_i)^2} \tag{17}$$

式中,  $\tilde{x}$  为观测值的真值;  $t_0$  为  $\bar{p}_i = 0$  的观测值个数。

3 计算与分析

采用光纤陀螺寻北仪在室外测试得到的数据进行实验。光纤陀螺的零偏稳定性为 0.02 °/h,采样频率为 400 Hz。进行了 8 组寻北实验,每组实验的采样时间为 70 s。图 1 为寻北仪的 8 组原始数据,其中,上排数据为寻北仪在第一个位置的

采样值按时间顺序排列,下排数据为寻北仪在第二个位置的采样值按时间顺序排列。

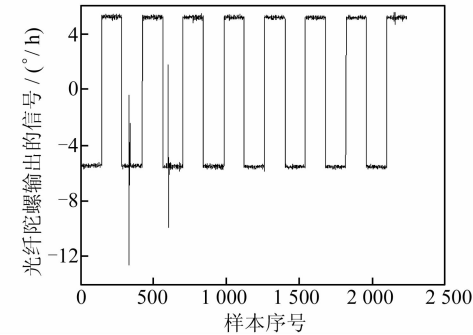


图 1 光纤陀螺输出的原始信号  
Fig. 1 Original Signals of FOG

从陀螺输出信号的时间序列可以看出,较大的几个粗差存在于第 2 个测回的第一个位置和第 3 个测回的第一个位置。但是很难看出其中包含的噪声特性以及周期噪声的频率。为此,对陀螺信号进行频谱分析。

考虑到观测信息较充足,且涉及到硬件存储的容量及计算速度,首先,对 0.5 s 的数据进行最小二乘估计,得到一个较可靠的估值。处理后,70 s 的数据就减少为 140 个。对光纤陀螺在第 2 个测回第一个位置的输出信号进行频谱分析,图 2~4 分别为陀螺信号及其功率谱和噪声的功率谱密度。由此可知,有用信号的能量远远高于噪声的能量,周期噪声的频率主要集中在 30~50 Hz 之间,幅度为 3 dB/Hz。然后,进行低通滤波。这两步处理只是抗差估计前的预处理。最后,采用抗差估计求解最佳估值,以削弱异常干扰的影响。

图 5 给出了低通滤波后噪声的功率谱密度。由此可知,低通滤波消除了高频噪声,周期噪声的频率主要集中在 10~20 Hz 之内,幅度为 1 dB/Hz。

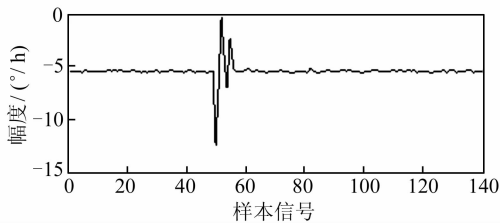


图 2 光纤陀螺信号  
Fig. 2 FOG Signal

方位角真值为  $153^{\circ}04'56.4''$  ( $153.0823^{\circ}$ )。在解算中分别采用观测值的中误差和均方根误差评定寻北精度。对实验数据采用 5 个方案进行解算:① 最小二乘估计 (LS)。② 全部观测值取均值作为抗差初值,抗差估计 (LS1+RO)。③ 全部

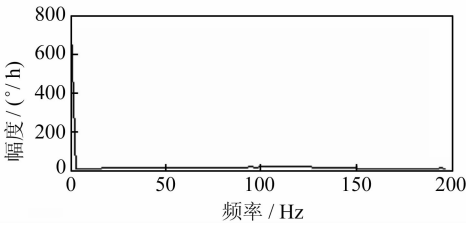


图 3 光纤陀螺信号的功率谱  
Fig. 3 Energy Spectrum of FOG

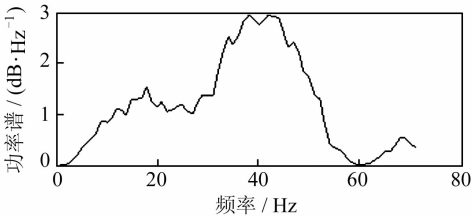


图 4 噪声的功率谱密度  
Fig. 4 Power Spectrum Density of Noise



图 5 低通滤波后噪声的功率谱密度  
Fig. 5 Power Spectrum Density of Noise After Low-Pass Filtering

观测值取中位数作为抗差初值,抗差估计 (RO1+RO)。④ 每一组观测值取均值作为抗差初值,抗差估计 (LS2+RO)。⑤ 每一组观测值取中位数作为抗差初值,抗差估计 (RO2+RO)。

各个方案的最后计算结果见表 1。测值的权反映了每个测回的估值对本方案中方位角估值的贡献。表 2 给出了 4 个抗差估计方案的抗差初值和均方差因子估值。迭代收敛的条件为  $|\hat{x}^{k+1} - \hat{x}^k| \leq 1 \times 10^{-3}$ 。

分析上文计算结果,可以得出如下结论。

1) 方案①~⑤都具有一定的抗差性,方位角估值的最大偏差为  $0.007^{\circ}$ 。算例中,第 3 测回中的粗差没有对本测回的估值造成影响,也没有影响方位角的估值。第 2 测回的估值明显受到粗差的污染,采用抗差估计对其进行降权处理,减弱了对方位角估值的影响。

2) 最小二乘估计不具有抗差性,其控制粗差影响的能力要低于抗差估计。最小二乘估值与抗差估值的最大偏差为  $0.012^{\circ}$ ,与真值相差  $0.038^{\circ}$ ,

表 1 观测数据处理结果比较

Tab. 1 Comparison for Data Processing

	LS	LS1+RO	RO1+RO	LS2+RO	RO2+RO
1/(°)	153.160 1.000	153.157 0.600	153.157 0.757	153.158 0.106	153.157 0.169
2/(°)	153.166 1.000	153.178 0.116	153.178 0.172	153.178 0	153.178 0.001
3/(°)	153.093 1.000	153.099 1.000	153.099 1.000	153.097 1.000	153.098 1.000
4/(°)	153.106 1.000	153.107 0.3999	153.108 1.000	153.106 0.424	153.112 0.397
5/(°)	153.083 1.000	153.087 1.000	153.087 1.000	153.084 1.000	153.086 1.000
6/(°)	153.122 1.000	153.122 1.000	153.122 1.000	153.122 1.000	153.122 1.000
7/(°)	153.136 1.000	153.138 1.0000	153.138 1.000	153.136 0.970	153.137 1.000
8/(°)	153.098 1.000	153.098 1.0000	153.096 1.000	153.100 1.000	153.098 1.000
方位角 /(°)	153.120	153.114	153.115	153.108	153.110
中误差 /(′)	1.874	1.340	1.445	1.081	1.049
RMS /(′)	3.089	2.213	2.298	1.892	1.889

表 2 不同方案的抗差初值与均方差因/(°)

Tab. 2 Initial Value and Standard Deviation Factor of Various Schemes/(°)

	LS1+RO	RO1+RO	LS2+RO	RO2+RO
抗差初值	153.137	153.138	153.122	153.112
均方差因子	0.038	0.039	0.029	0.030

且最小二乘估值的离散度大于抗差估值的离散度。在最小二乘估计中,测值对估值的贡献相等。

3) 抗差估计中均方差因子主要用来标准化残差,其可靠性与粗差的探测和判别有关,从而影响估值的优劣。方案④的均方差因子估值小于方案②、③、⑤的均方差因子估值,在对第 2 测回估值的处理中,方案④给予 0 权,而方案②、③、⑤分别给予一个小权。这说明在均方差因子受异常误差影响而偏大时,在同一显著性水平下,粗差探测或抗差估计纳伪的可能性也随之增大了,因而方案②、③、⑤仅对第 1 测回的估值作降权处理,没有剔除。

4) 抗差估计初值的选取对于获得参数的可靠解有较大影响。若初值可靠,则估值可靠,反之亦然。当观测样本较大时,中位数初值和最小二乘初值相比小样本的初值更可靠,算例中方案②和③获得了优于方案④和⑤的估值。当采用每一组观测值的中位数或均值作为初值时,完成一次寻北可以立即解算,且中位数初值比最小二乘初值可靠,因而采用方案⑤解算寻北结果的实时性

好,更合理。  
5) 在  $\sigma_0$  可靠的前提下,可以适当放宽淘汰域的临界值以保证参数估值的效率,算例中取  $k_0=2.5, k_1=6$ 。

4 结 语

抗差估计能够削弱信号中存在的异常干扰的影响,并且可以将异常干扰剔除而不影响其余有用信号。然而,参数估值的可靠性取决于残差的可靠性,进而残差的抗差性影响参数估值的抗差性。在观测数据中存在观测粗差的情况下,本文给出的中位数初值辅以 IGG III 方案迭代解算的混合算法,保证了参数估值的抗差性和效率,有效地剔除了异常干扰,获得了较高的寻北精度。

参 考 文 献

[1] 周跃庆,高宁,刘鲁源. 抗野值自适应 Kalman 滤波及其在陀螺信号处理中的应用[J]. 天津大学学报, 2004,37(9):815-817

[2] 吴富梅,杨元喜. 基于小波变换和序贯抗差估计的捷联惯导初始对准[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2007,32(7):617-620

[3] 陈刚,张朝霞,庄良杰. 小波域中值滤波器在陀螺寻北仪中的应用[J]. 天津大学学报,2006,39(7):797-800

[4] 任明荣,刘星桥,吴富梅,等. 小波去噪技术在捷联寻北仪中的应用[J]. 北京理工大学学报,2004,24(7):592-595

[5] 王成宾,蒋庆仙,吴富梅,等. 二位置寻北仪中光纤陀螺输出信号的处理[J]. 测绘科学与工程,2008,28(4):43-47

[6] 蒋庆仙,王成宾,吴富梅. 抗差估计在光纤陀螺信号处理中的应用[J]. 中国惯性技术学报,2009,17(1):71-75

[7] 杨元喜. 抗差估计理论及其应用[M]. 北京:八一出版社,1993

[8] 杨元喜,吴富梅. 临界值可变的抗差估计权函数[J]. 测绘科学技术学报,2006,23(5):317-320

[9] Yang Y. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation [J]. Journal of Geodesy, 1999, 73(5):268-274

[10] 王振杰,欧吉坤,曲国庆. 抗差估计的初值选择[J]. 地壳形变与地震,2001,21(3):32-35

第一作者简介:蒋庆仙,高级工程师,主要从事陀螺定向技术研究。  
E-mail:jiangqingx@163.com