

# 补助点設在任意点的位置、从高斯投影 帶到相邻帶及从蘭字氏割园錐投影到高 斯投影的坐标变换公式

葉 雪 安

## 总 論

本文的目的为如何限制区域的大小使坐标变换的计算工作及制出图解表的工作降到很低，使在指定的范围内坐标变换的主要计算仅限于平面变换；就是两个平面系统相互间的关系为：原点的移动，坐标轴轉一定的角度并顧及一定的比例尺的变化，而把剩余誤差用图解表迅速地求得，因此該方法适用于在指定的范围内把大量的点子很快地施行坐标变换。該法的原理：补助点設在任意点的位置，这样可以使欲变换的点子尽量靠近补助点，因此剩余誤差的处理大为簡易。

导出补助点設在任意点位置的坐标变换公式方法有下列三种：

第一种方法 如图一，补助点  $c$  設在任意点的位置， $c$  点在第一个投影系统的坐标为  $(x_0)_1, (y_0)_1$ ；其在第二个投影系统的坐标为  $(x_0)_2, (y_0)_2$ 。把第一个投影系统正形描写到第二个投影系统内，必須适合于正形投影条件：

$$\Delta x_2 + i \Delta y_2 = f(\Delta x_1 + i \Delta y_1) \quad (\alpha)$$

式中  $\Delta x_2 = x_2 - (x_0)_2$ ,  $\Delta y_2 = y_2 - (y_0)_2$ ,  $\Delta x_1 = x_1 - (x_0)_1$ ,  $\Delta y_1 = y_1 - (y_0)_1$ 。

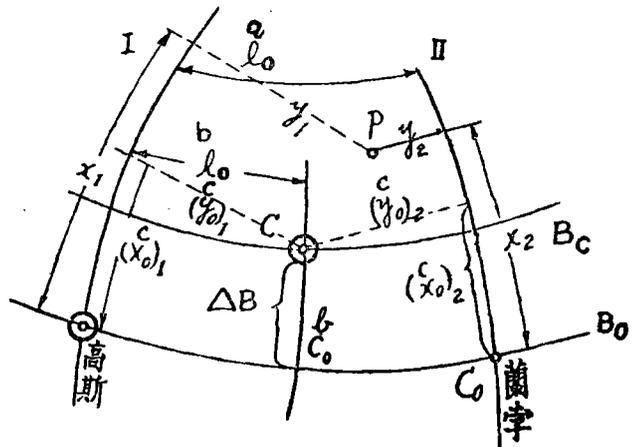
式  $(\alpha)$  写为  $\Delta z_2 = f(\Delta z_1)$ ，展开而成

下面的級数形式：

$$\Delta z_2 = c_1 \Delta z_1 + \frac{1}{2} c_2 \Delta z_1^2 + \frac{1}{6} c_3 \Delta z_1^3 + \frac{1}{24} c_4 \Delta z_1^4 + \dots$$

$$c_v = a_v + i b_v, v = 1, 2, 3, 4, \dots$$

规定了这两个正形投影系统以后，然后利用下面的出发公式求出这些系数  $a_v$  及  $b_v$ 。这个方法是一种最普遍的方法，立斯刀曾用这个方法导出两高斯投影带間坐标变换的一般公式，見〔註四〕。在从高斯投



图一

影带变换到相邻的高斯投影带时，該法較易，因为我們可以把緯圈 $B_c$ 上的 $c$ 移到 $c_0^b$ 上，而使 $\Delta B=0$ ，坐标变换公式內各項系数含有 $l_0^b$ 及 $l_0^a$ ，注意，緯圈 $B_0$ 可以上下移动，使其通过補助点 $c$ 。但在从高斯投影变换到兰亭氏投影或相反的变换，因为兰亭氏投影系統的原点不許移动，故 $\Delta B$ 进入到公式中，因之导出公式的手續甚为复杂，所以一般不采用第一种方法。

第二种方法 应用維洛魏茨公式〔註五〕即：

$$x_2 = (x_0^c)_2 + (\Delta x_1 \cos \Delta \alpha - \Delta y_1 \sin \Delta \alpha) \Delta m$$

$$y_2 = (y_0^c)_2 + (\Delta x_1 \sin \Delta \alpha + \Delta y_1 \cos \Delta \alpha) \Delta m$$

也就是利用方向改化及距离改化的方法，匈牙利坐标变换公式就是根据这个方法。若区域不大，則使用这个方法比第一种方法简单得多；然若地区加以扩大，則方向改化与距离改化公式中的高次項必須顧及，因此引起复杂的計算。

第三种方法是由著者初次試用的方法。該法分成两个阶段。第一阶段，暂时把補助点 $c$ 移到 $c_0$ 点上，若两个投影带都是高斯投影带，則問題就变为：補助点設在 $c_0$ 点上从第I带变为第II带，也就是克呂格(Krüger)公式，格罗斯馬恩(Grossmann)公式，維洛魏茨及拉宾諾維奇坐标变换数字表中的公式，布特凱韦契的公式。格罗斯馬恩公式的由来，也是根据这一个带正形描写到另一个带的方法，但公式简单，因为坐标变换公式中的各系数仅含有 $l_0^a$ 而沒有 $l_0^b$ 及 $\Delta B$ ，因此公式的推导大为簡易。格罗斯馬恩推导坐标变换公式的方法也可以应用到推导出从任何一种正形投影变到高斯投影的坐标变换公式，見〔註二〕。第二阶段把補助点 $c_0$ 移到 $c_0^b$ 点上，在平面上找出補助点 $c_0$ 与補助点 $c_0^b$ 間的关系式后代入格罗斯馬恩公式，加以简化后即得欲求的式子。

若从兰亭氏投影变到高斯投影，第一步求出補助点設在 $c_0$ 的坐标变换公式，这个公式見〔註三〕128頁到135頁，次在平面上找出 $c$ 与 $c_0$ 間的关系式，推导出欲求的式子。

这个方法也可以应用到从任何一种正形投影变到高斯投影。

出发公式〔註三〕

### 1. 正形投影的一般公式

$$z = \varphi(U) = d_1 U + \frac{1}{2} d_2 U^2 + \frac{1}{6} d_3 U^3 + \frac{1}{24} d_4 U^4 + \frac{1}{120} d_5 U^5 + \frac{1}{720} d_6 U^6 + \frac{1}{5040} d_7 U^7 + \dots$$

式中  $z = x + iy$ ,  $U = \Delta q + il$ ,  $\Delta q$ 为等量緯度差。

$$U = f(z) = a_1 z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \frac{1}{6} a_3 z^3 + \frac{1}{24} a_4 z^4 + \frac{1}{120} a_5 z^5 + \frac{1}{720} a_6 z^6 + \frac{1}{5040} a_7 z^7 + \dots$$

### 2. 高斯投影

$$d_1 = +N_0 \cos B_0, \quad d_2 = -N_0 \operatorname{tg} B_0 \cos^2 B_0, \quad d_3 = -N_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2) \cos^3 B_0,$$

$$d_4 = +N_0 \operatorname{tg} B_0 (5 - t_0^2 + 9\eta_0^2 + 4\eta_0^4) \cos^4 B_0,$$

$$d_5 = +N_0 (5 - 18t_0^2 + t_0^4 + 14\eta_0^2 - 58\eta_0^2 t_0^2 + 13\eta_0^4 - 64\eta_0^4 t_0^2) \cos^5 B_0,$$

$$d_6 = -N_0 \cos^6 B_0 \operatorname{tg} B_0 (61 - 58t_0^2 + t_0^4 + 270\eta_0^2 - 330\eta_0^2 t_0^2),$$

$$d_7 = -N_0 \cos^7 B_0 (61 - 479t_0^2 + 179t_0^4 - t_0^6)。$$

$$a_1 = \frac{1}{N_0 \cos B_0}, \quad a_2 = \frac{\operatorname{tg} B_0}{N_0^2 \cos B_0}, \quad a_3 = \frac{1}{N_0^3 \cos B_0} (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2),$$

$$a_4 = \frac{\operatorname{tg} B_0}{N_0^4 \cos B_0} (5 + 6t_0^2 + \eta_0^2 - 4\eta_0^4),$$

$$a_5 = \frac{1}{N_0^5 \cos B_0} (5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 + 6\eta_0^2 + 8\eta_0^2 t_0^2 - 3\eta_0^4 + 4\eta_0^4 t_0^2),$$

$$a_6 = \frac{\operatorname{tg} B_0}{N_0^6 \cos B_0} (61 + 180t_0^2 + 120t_0^4 + 46\eta_0^2 + 48\eta_0^2 t_0^2),$$

$$a_7 = \frac{1}{N_0^7 \cos B_0} (61 + 662t_0^2 + 1320t_0^4 + 720t_0^6)。$$

### 3. 兰李氏割圆锥投影

$$d_1 = \lambda_0, \quad d_2 = -\lambda_0 \sin B_0, \quad d_3 = \lambda_0 \sin^2 B_0,$$

$$d_4 = -\lambda_0 \sin^3 B_0, \quad d_5 = \lambda_0 \sin^4 B_0, \quad d_6 = -\lambda_0 \sin^5 B_0, \quad d_7 = \lambda_0 \sin^6 B_0,$$

(在切圆锥投影  $\lambda_0 = N_0 \cos B_0$ , 在割圆锥投影  $\lambda_0 = R_0 \sin B_0$ )

$$R_0 = K \cdot \operatorname{tg} \frac{L p_0}{2} \left( \frac{1 + e \cos p_0}{1 - e \cos p_0} \right)^{L/2},$$

$$p_0 = 90^\circ - B_0, \quad L = \sin B_0, \quad B_0 = \arcsin L,$$

$K, L$  为兰李氏割圆锥投影带的常数。

$$a_1 = \frac{1}{\lambda_0}, \quad a_2 = \frac{\sin B_0}{\lambda_0^2}, \quad a_3 = \frac{2 \sin^2 B_0}{\lambda_0^3}, \quad a_4 = \frac{6 \sin^3 B_0}{\lambda_0^4},$$

$$a_5 = \frac{24 \sin^4 B_0}{\lambda_0^5}, \quad a_6 = \frac{120 \sin^5 B_0}{\lambda_0^6}, \quad a_7 = \frac{720 \sin^6 B_0}{\lambda_0^7}$$

A1) 从格罗斯馬恩的高斯投影坐标变换公式导出补助点

#### 設在任意点位置的坐标变换公式

从〔注一〕頁2, 式(2a)并参考图二, 得格罗斯馬恩的公式如下:

$$\begin{aligned} x_2 = X_0^{B_0} + a_1^G \Delta x_1 - b_1^G \Delta y_1 + \frac{1}{2} a_2^G (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) - b_2^G \Delta x_1 \Delta y_1 + \\ + \frac{1}{6} a_3^G \Delta x_1 (\Delta x_1^2 - 3\Delta y_1^2) - \frac{1}{6} b_3^G \Delta y_1 (3\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + \dots \end{aligned} \quad (1) a$$

$$y_2 = b_1^G \Delta x_1 + a_1^G \Delta y_1 + \frac{1}{2} b_2^G (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + a_2^G \Delta x_1 \Delta y_1 +$$



$$x_0^a = X_0^a + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0^a l_0^a + \frac{t_0^a}{24} N_0 \cos^4 B_0 (5 - t_0^a + 9 \eta_0^a) l_0^a,$$

求出  $\Delta x_1^a$  与  $\Delta x_1^b$  及  $\Delta y_1^a$  与  $\Delta y_1^b$  的关系式如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1^a &= \Delta x_1^b - \frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0^a (l_0^a - l_0^b) - \\ &\quad - \frac{t_0^a}{24} N_0 \cos^4 B_0 (5 - t_0^a + 9 \eta_0^a) (l_0^a - l_0^b) + \dots, \\ \Delta y_1^a &= \Delta y_1^b - N_0 \cos B_0 (l_0^a - l_0^b) - \\ &\quad - \frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 (1 - t_0^a + \eta_0^a) (l_0^a - l_0^b) + \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

把式(3)代入式(1)a及(1)b加以简化后得:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2^b + a_1^b \Delta x_1^b - b_1^b \Delta y_1^b + \frac{1}{2} a_2^b (\Delta x_1^b - \Delta y_1^b) - \\ &\quad - b_2^b \Delta x_1^b \Delta y_1^b + \frac{1}{6} a_3^b (\Delta x_1^b - 3 \Delta x_1^b \Delta y_1^b) - \\ &\quad - \frac{1}{6} b_3^b (3 \Delta x_1^b \Delta y_1^b - \Delta y_1^b), \\ y_2 &= (y_0)_2^b + b_1^b \Delta x_1^b + a_1^b \Delta y_1^b + \frac{1}{2} b_2^b (\Delta x_1^b - \Delta y_1^b) + \\ &\quad + a_2^b \Delta x_1^b \Delta y_1^b + \frac{1}{6} b_3^b (\Delta x_1^b - 3 \Delta x_1^b \Delta y_1^b) + \\ &\quad + \frac{1}{6} a_3^b (3 \Delta x_1^b \Delta y_1^b - \Delta y_1^b), \end{aligned} \right\} (4)a$$

$$\left. \begin{aligned} a_1^b &= 1 - \frac{1}{2} (-1 + t_0^a - \eta_0^a) l_0^a \cos^2 B_0 - (1 + \eta_0^a) \cos^2 B_0 l_0^b + \\ &\quad + \frac{1}{24} (5 - 18 t_0^a + t_0^a + 14 \eta_0^a - 58 \eta_0^a t_0^a) l_0^a \cos^4 B_0 + \\ &\quad + (1 - 2 t_0^a + 3 \eta_0^a - 10 \eta_0^a t_0^a) \cos^4 B_0 l_0^a l_0^b + \frac{1}{6} \cos^4 B_0 (-5 + \\ &\quad + 13 t_0^a - 14 \eta_0^a + 49 \eta_0^a t_0^a) l_0^a l_0^b + \frac{1}{3} (-1 + 2 t_0^a - 4 \eta_0^a + \\ &\quad + 14 \eta_0^a t_0^a) \cos^4 B_0 l_0^a l_0^b, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= t_0 \cos B_0 l_0^a - \frac{1}{6} t_0 \cos^3 B_0 (-5 + t_0^2 - 9 \eta_0^2) l_0^3 - \\
 &\quad - 2 t_0 \cos^3 B_0 (1 + 2 \eta_0^2) l_0^a l_0^b + \cos^3 B_0 t_0 (1 + 3 \eta_0^2) l_0^a l_0^b, \\
 a_2 &= -\frac{2 t_0}{N_0} l_0^a \cos^2 B_0 (1 + 2 \eta_0^2) + \frac{t_0}{N_0} (1 + 5 \eta_0^2) \cos^2 B_0 l_0^a l_0^b, \\
 b_2 &= \frac{1 + \eta_0^2}{N_0} l_0 \cos B_0 + \frac{1}{6 N_0} (5 - 13 t_0^2 + 14 \eta_0^2 - \\
 &\quad - 49 \eta_0^2 t_0^2) l_0^3 \cos^3 B_0 - \frac{2}{N_0} (1 - t_0^2 + 3 \eta_0^2 - \\
 &\quad - 8 \eta_0^2 t_0^2) l_0^a l_0^b \cos^3 B_0 + \frac{1}{2 N_0} (1 - t_0^2 + 6 \eta_0^2 - \\
 &\quad - 17 \eta_0^2 t_0^2) \cos^3 B_0 l_0^a l_0^b, \\
 a_3 &= -\frac{2}{N_0^2} (1 - t_0^2 + 3 \eta_0^2 - 8 \eta_0^2 t_0^2) l_0^2 \cos^2 B_0 + \frac{1}{N_0^2} (1 + 6 \eta_0^2 - \\
 &\quad - 12 \eta_0^2 t_0^2) l_0^a l_0^b \cos^2 B_0, \\
 b_3 &= -\frac{\operatorname{tg} B_0}{N_0^2} (1 + 5 \eta_0^2 + 4 \eta_0^4) l_0^a \cos B_0.
 \end{aligned} \tag{4}b$$

$a_1$  及  $b_1$  的意义

图三内,  $M$  为平面边长  $d$  的中点,  $M$  点的纬度为  $B_m$ , 其平均弯曲半径为  $R_m$ .  $B_m'$  为通过  $M$  点的横坐标线的底点纬度, 底点纬度的平均弯曲半径为  $R_1$ .

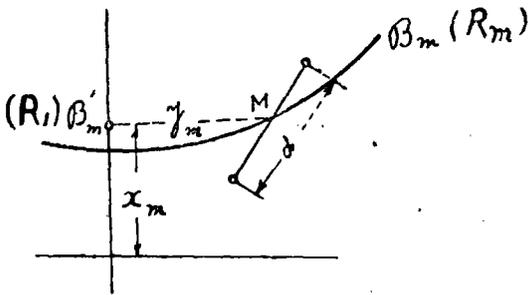


图 三

求  $M$  点的长度比公式为:

$$m = 1 + \frac{v_m^2}{2R_1^2} + \frac{v_m^4}{24R_1^4} (1 + 4 \eta_0^2), \tag{a}$$

若把  $R_1$  化为  $R_m$ , 则得:

$$m = 1 + \frac{v_m^2}{2R_m^2} + \frac{v_m^4}{24R_m^4} (1 + 4 \eta_0^2 - 24 \eta_0^2 t_0^2). \tag{b}$$

在距离改化的公式中去掉与  $\Delta x$  及  $\Delta v$  发生关系的项, 则得式 (a), 若把  $R_1$  化为  $R_m$  则得式 (b).

在坐标变换公式中采用式 (b).

在维洛魏茨公式 (见下面式 (6)), 严格而论,  $\Delta m'$  应改写为  $\Delta m$ , 而  $\Delta m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2/s}{d_1/s}$

$= \frac{[m_2]}{[m_1]}$ ; 1 表示第 I 带, 2 表示第 II 带,  $s$  为相应于平面距离  $d$  的大地线长度 (参考图五),

[ $m$ ]代表由辅助点到变换点间的距离改化。 $\Delta \delta$ 仅与 $\Delta x$ ,  $\Delta y$ 发生关系;若坐标变换公式仅限于平面变换,也就是仅顾及 $\Delta x$ 及 $\Delta y$ 项,则 $\Delta m$ 应改为 $\Delta m'$ ,而:

$$\Delta m' = \frac{(\text{长度比})_2 \text{在 } c_0 \text{ 点上}}{(\text{长度比})_1 \text{在 } c_0 \text{ 点上}}$$

$\Delta \delta = \delta_1 - \delta_2$ 应略去,因此維洛魏茨公式改写为:

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2 + \Delta m' \cos[(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2] \Delta x_1 - \Delta m' \sin[(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2] \Delta y_1 + \dots \\ y_2 &= (y_0)_2 + \Delta m' \sin[(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2] \Delta x_1 + \Delta m' \cos[(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2] \Delta y_1 + \dots \end{aligned}$$

$\gamma_0$ 为子午线收敛角在 $c_0$ 点上;上式缩写为:

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2 + a_1 \Delta x_1 - b_1 \Delta y_1 + \dots \\ y_2 &= (y_0)_2 + b_1 \Delta x_1 + a_1 \Delta y_1 + \dots \end{aligned}$$

式中

$$a_1 = \frac{(\text{长度比})_2 \text{在 } c_0 \text{ 点上}}{(\text{长度比})_1 \text{在 } c_0 \text{ 点上}} \cdot \cos[(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2]$$

$$b_1 = \frac{(\text{长度比})_2 \text{在 } c_0 \text{ 点上}}{(\text{长度比})_1 \text{在 } c_0 \text{ 点上}} \cdot \sin[(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2]$$

(5)

检验式(4)有无错误

若 $l_0^b = l_0^a$ , 即 $c_0$ 移到 $c_0$ 时(参考图二), 则式(4)变为格罗斯馬恩的正算式, 见[註一], 頁5, 式(4)。

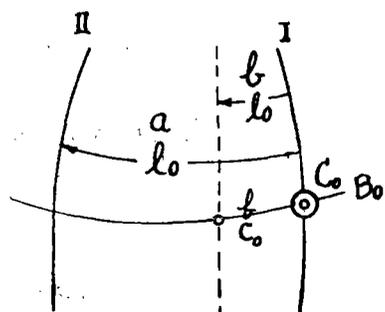
若 $l_0^b = 0$ ,  $l_0^a$ 作为负的, 则式(4)变为格罗斯馬恩的反算式, 见[註一]頁7, 式(6), 参考图四甲。

若由东带变换到西带, 用图四甲内所註的符号, 仍应用公式(4)  $a$ 及(4)  $b$ , 惟 $l_0^b$ 及 $l_0^a$ 以负值代入之。

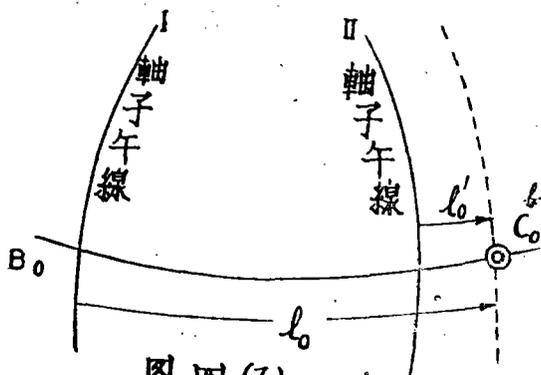
A2)用西带正形描写到东带的方法导出A1内式(4)

此即立斯刀方法詳細情形见[註四], 惟所用符号不同。基本公式见[註三], 128—135頁。

图四乙内 $l_0$ 就是本处的 $l_0^b$ ;  $l_0'$ 就是本处的 $(l_0^a - l_0^b)$ 。



图四(甲)



图四(乙)

若以上的关系代入立斯刀的公式見〔註四〕，即得本处的式(4)，故式(4)又受到檢驗。

A3) 导出补助点設在两条軸子午綫中間的立斯刀的坐标变换公式

若 $l_0^a = 2l_0^b = 2l_0^m$ ，参考图二；即 $c_0^b$ 移到 $c_0^m$ ，則式(4)变为立斯刀公式，見〔註三〕128—135頁。

A4) 从AI內的式(4)研究維洛魏茨公式〔注五〕所能达到的精度

从〔註五〕153頁——155頁写出下列各公式(参考图五)：

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2 + (\Delta x_1 \cos \Delta \alpha - \Delta v_1 \sin \Delta \alpha) \Delta m' \\ v_2 &= (v_0)_2 + (\Delta x_1 \sin \Delta \alpha + \Delta v_1 \cos \Delta \alpha) \Delta m' \\ \Delta \alpha &= [(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2] + (\delta_1 - \delta_2) \\ \Delta \delta &= \delta_1 - \delta_2 = \frac{\rho''}{2R_0^2} \Delta x_1 \Delta v_m \\ \Delta v_m &= (v_0)_1 - (v_0)_2 \\ \Delta m' &= \frac{d_2/s}{d_1/s} \cong 1 + (m-1)_2 - (m-1)_1 \end{aligned} \right\} (6)$$

式中1表示第I带，2表示第II带， $m$ 代表长度比，仅顧及二次項， $\gamma_0$ 为子午綫收敛角， $\delta$ 为方向改化。

严格而論， $\Delta m'$ 应改写为 $\Delta m$ ，而 $\Delta m$ 应为 $\frac{d_2}{d_1} = \frac{[m_2]}{[m_1]}$ ，参考图五； $[m] = \frac{d}{s}$ ， $[m]$ 代表由补助点到变换点間的距离改化，而維氏把距离改化写作长度比(便于立出数字表)，因此引起 $\Delta x_1^2$ ， $\Delta v_1^2$ 及 $\Delta x_1 \Delta v_1$ 的系数的不正確(只能算到几个公分正确)。根据研究由式(6)得下面的結果：

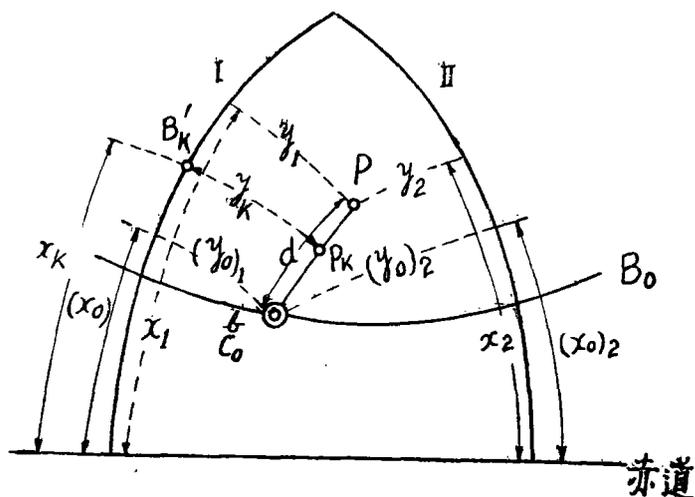
$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2 + \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 + \eta_0^2 - t_0^2) \cos^2 B_0 l_0^a - (1 + \eta_0^2) \cos^2 B_0 l_0^b \right\} \Delta x_1 - \\ &\quad - \left\{ t_0 \cos B_0 l_0^a - \frac{1}{6} t_0 \cos^3 B_0 l_0^3 (-5 + t_0^2 - 9 \eta_0^2) - 2(1 + 2 \eta_0^2) \cdot \right. \\ &\quad \left. l_0^3 l_0^b t_0 \cos^3 B_0 + t_0 \cos^3 B_0 \cdot (1 + 3 \eta_0^2) l_0^3 l_0^a \right\} \Delta v_1 - \frac{1}{2N_0} t_0 \cdot \\ &\quad \cdot \cos^2 B_0 l_0^a \Delta x_1^2 - \frac{\Delta x_1 \Delta v_1}{2N_0} l_0^a \cos B_0 \cdot \end{aligned} \right\} (7)$$

上式內除 $\Delta x_1$ 及 $\Delta v_1$ 的系数保持正确外，其余的項均不够正确，从式(4)得正确的結果应该是：

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2 + \dots \Delta x_1 - \dots \Delta v_1 + \left\{ -\frac{t_0}{N_0} l_0^a \cos^2 B_0 (1 + 2 \eta_0^2) + \frac{t_0}{2N_0} (1 + 5 \eta_0^2) \cos^2 B_0 \right. \\ &\quad \left. \cdot l_0^b \right\} (\Delta x_1^2 - \Delta v_1^2) - \frac{1 + \eta_0^2}{N_0} l_0^a \cos B_0 \Delta x_1 \Delta v_1 \cdot \end{aligned}$$

A5) 从AI內公式(4)研究匈牙利采用的导出坐标变换公式的方法〔註六〕及其精度

出发公式就是維氏的公式(6)，此处采用距离改化，故較維氏的公式为精确。



图五

计算次序:

1.  $\Delta x_1 = x_1 - (x_0)_1$ ,  $\Delta v_1 = v_1 - (v_0)_1$ ;

2.  $(\Delta v_2) = p\Delta v_1 + q\Delta x_1$ ,  $(\Delta x_2) = -q\Delta v_1 + p\Delta x_1$ ,  
 $p = \cos\{(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2\}$ ,  $q = \sin\{(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2\}$ ;

3. 计算  $\Delta m$  的值:  $\Delta m = \frac{[m_2]}{[m_1]}$ ,

$[m_2]$  为  $d$  的距离改化在带 II,  $[m_1]$  为  $d$  的距离改化在带 I;

4.  $(\Delta v_2)' = \Delta m(\Delta v_2)$ ,  $(\Delta x_2)' = \Delta m(\Delta x_2)$ ;

5. 计算  $d\delta = \delta_1 - \delta_2$ ;

6.  $(\Delta v_2)'' = (\Delta x_2)'d\delta$ ,  $(\Delta x_2)'' = -(\Delta v_2)'d\delta$ ;

7.  $v_2 = (v_0)_2 + (\Delta v_2)' + (\Delta v_2)''$ ,

$x_2 = (x_0)_2 + (\Delta x_2)' + (\Delta x_2)''$ 。

(8)

在计算  $\Delta m$  时, 距离改化公式取  $\frac{1}{R^2_k}$  项及  $\Delta v^2_1$  项而略去  $\frac{1}{R^3_k} \eta^2_0$  项及  $\frac{1}{R^4_k}$  项; 注意根据图五内的  $x_k$ , 从子午线弧长表, 求出底点纬度  $B'_k$ , 由  $B'_k$  求出平均弯曲半径  $R_k$ ; 在计算  $\delta_1 - \delta_2$  时, 方向改化公式只取  $\frac{1}{R^2_k}$  项。由于略去  $\frac{1}{R^3_k} \eta^2_0$  项, 故可假定  $(R^2_k)_1 = (R^2_k)_2 = R^2_0$ 。  $R_0$  为平均弯曲半径根据纬度  $B_0$ 。由于略去  $\frac{1}{R^4_k}$  项, 对  $v_2$  式而言, 使  $\Delta x^2_1 \Delta v_1$  及  $\Delta v^3_1$  的系数不正确; 也就是说引起  $a_3$  的不正确。

在匈牙利限制.  $\Delta v_1 \leq 40km$ ,  $\Delta x_1 \leq 10km$ ,  $d_{最大} \cong 41km$ 。式(8)所能达到的精度

$$\begin{aligned}
 y_2 = & (y_0)_1 + \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1 + \eta_0^2 - t_0^2) \cos^2 B_0 l_0^a - (1 + \eta_0^2) \cos^2 B_0 l_0^a l_0^b \right\} \\
 & \cdot \Delta y_1 + \left\{ t_0 \cos B_0 l_0^a - \frac{1}{6} t_0 \cos^3 B_0 l_0^a (-5 + t_0^2 - 9 \eta_0^2) - 2(1 + \right. \\
 & + 2 \eta_0^2) l_0^a l_0^b t_0 \cos^3 B_0 + t_0 \cos^3 B_0 (1 + 3 \eta_0^2) l_0^b l_0^a \left. \right\} \Delta x_1 + \\
 & + \frac{1}{2N_0} (1 + \eta_0^2) \cos B_0 l_0^a (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + \frac{t_0 \cos^2 B_0}{N_0} \left\{ -2l_0^a + \right. \\
 & + l_0^a l_0^b \left. \right\} \Delta x_1 \Delta y_1 + \frac{1}{6} \left( \frac{-t_0}{N_0^2} l_0^a \cos B_0 \right) (\Delta x_1^3 - 3 \Delta x_1 \Delta y_1^2) + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N_0^2} t_0^2 \cos^2 B_0 l_0^a \right) \Delta x_1^2 \Delta y_1 - \frac{1}{6} \left\{ \frac{2t_0^2 \cos^2 B_0}{N_0^2} l_0^a + \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} \frac{\cos^2 B_0}{N_0^2} (l_0^a l_0^b - l_0^a) \right\} \Delta y_1^3.
 \end{aligned} \tag{9}$$

$\Delta x_1^2 \Delta y_1$  及  $\Delta y_1^3$  的系数 (即上面划有横线的项) 不符合, 若不顾及  $l_0^a$ , 则  $\Delta x_1^2 \Delta y_1$  及  $\Delta y_1^3$  项尽可略去。

A6) 从 A1 内式 (4) 导出 *Hunger* [註七], *Schroeder-Kaestner* [註八] 公式

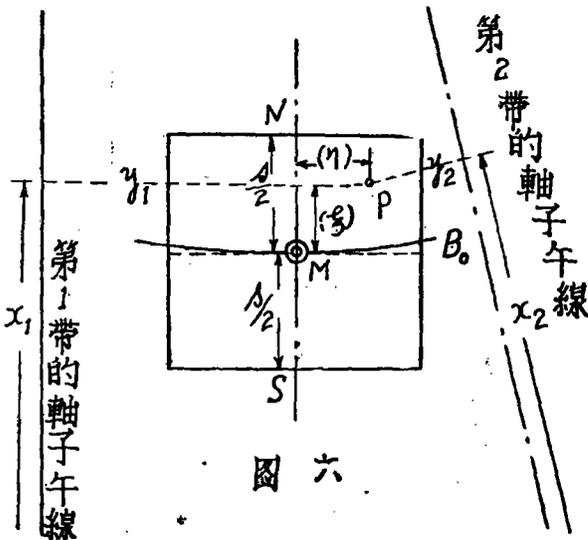
参考图六, 注意 *NS* 平行于第 I 带的轴子午线。设  $x_1 + iy_1 = z_1$ ,  $x_2 + iy_2 = z_2$ :

利用 
$$z_2 - z_1 = c(z_1 - z_1), \tag{10}$$

此处 
$$c = c_1 + ic_2, \tag{11}$$

求出  $c_1$  及  $c_2$  如下:

$$c_1 = \frac{x_2 - x_1}{s} \quad \text{及} \quad c_2 = \frac{y_2 - y_1}{s} \tag{12}$$



图六

按照式 (10), 把  $c$  应用到  $PS$  线或  $PN$  线上, 则

所得  $z_2$  当然不十分正确, 故以近似值  $z'_2$  替代正确值  $z_2$ , 由此得:

$$z'_2 - z_2 = c(z_1 - z_1), \tag{13}$$

或 
$$z'_2 - z_2 = c(z_1 - z_1), \tag{14}$$

式 (13) 及 (14) 称谓平面相似变换公式。

以  $dx$  及  $dy$  表示  $x'_2$  及  $y'_2$  的修正值, 则由

式 (13) 得:

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_2 &= c_1(x_1 - x_1) - c_2(y_1 - y_1) + v_x \\ y_2 - y_2 &= c_2(x_1 - x_1) + c_1(y_1 - y_1) + v_y \end{aligned} \right\} (15)$$

如果一切的计算从M点出发，则有下列的关系式：

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_2 &= c_1(x_1 - x_1) - c_2(y_1 - y_1) + v_x \\ -) \quad x_2 - x_2 &= c_1(x_1 - x_1) - c_2(y_1 - y_1) + v_x \\ x_2 - x_2 &= c_1(x_1 - x_1) - c_2(y_1 - y_1) + v_x - v_x \end{aligned} \right\} (16)$$

同理  $y_2 - y_2 = c_2(x_1 - x_1) + c_1(y_1 - y_1) + v_y - v_y$

根据〔註九〕，导出Hunger公式及其扩充式如下：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{I^b}{2} a_2 \left\{ (\xi)^2 - \frac{s^2}{4} - (\eta)^2 \right\} - b_2^b (\xi) (\eta) + \frac{I^b}{6} a_3 \left\{ (\xi)^3 - \frac{s^2}{4} (\xi) - \right. \\ &\quad \left. - 3(\eta)^2 (\xi) \right\} - \frac{I^b}{6} b_3 \left\{ 3(\xi)^2 (\eta) - \frac{s^2}{4} (\eta) - (\eta)^3 \right\} \\ v_y &= a_2^b (\xi) (\eta) + \frac{I^b}{2} b_2 \left\{ (\xi)^2 - \frac{s^2}{4} - (\eta)^2 \right\} + \frac{I^b}{6} a_3 \left\{ 3(\xi)^2 (\eta) - \frac{s^2}{4} (\eta) - \right. \\ &\quad \left. - (\eta)^3 \right\} + \frac{I^b}{6} b_3 \left\{ (\xi)^3 - \frac{s^2}{4} (\xi) - 3(\eta)^2 (\xi) \right\} \end{aligned} \right\} (17)$$

Hunger公式原来的形式为：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= +2k_\eta (\xi) (\eta) - k_\xi \left\{ (\xi)^2 - (\eta)^2 - \frac{s^2}{4} \right\} \\ v_y &= -2k_\xi (\eta) (\xi) - k_\eta \left\{ (\xi)^2 - (\eta)^2 - \frac{s^2}{4} \right\} \end{aligned} \right\} (18)$$

(17)与(18)作一比较得  $k_\eta = -\frac{I^b}{2} b_2, \quad k_\xi = -\frac{I^b}{2} a_2$

Hunger公式原来的形式  $k_\eta = \frac{M}{s^2} \frac{4v_y}{s^2}, \quad k_\xi = \frac{M}{s^2} \frac{4v_x}{s^2}$  } (19)

式中  $v_y = y_2 - y'_2, v_x = x_2 - x'_2, x_2, y_2$  必须预先计算， $y'_2, x'_2$  依式(15)计算得之，惟须略去  $v_x$  及  $v_y$ 。当  $(\xi) = 0, (\eta) = 0$ ，则  $v_x = v_x, v_y = v_y$ ，故由式(18)得：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= +k_\xi \frac{s^2}{4} = -\frac{I^b}{2} a_2 \frac{s^2}{4} \\ v_y &= +k_\eta \frac{s^2}{4} = -\frac{I^b}{2} b_2 \frac{s^2}{4} \end{aligned} \right\} (19)a$$

式(19)的第一式的优点为：不必计算M点在带I及带II的平面坐标，而由M的经纬度直接

計算系数 $k_\eta$ 及 $k_s$ ，我們从下面的A9)得：

$$c_1 = a_1^b, \quad c_2 = b_1^b$$

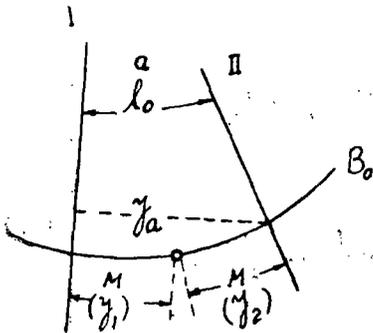
故不必預先求出 $N, S$ 点在带I及带II的平面坐标，而用 $M$ 点的經緯度直接求出 $c_1$ 及 $c_2$ 。

$a_2^b$  为二次項，如实施坐标变换的范围不大，可以略去 $a_2^b$ ，因此 $k_s$ 可略去，由此得Schroeder-Kästner公式：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= 2k_\eta(\xi)(\eta), \\ v_y &= -k_\eta\left\{(\xi)^2 - (\eta)^2 - \frac{s^2}{4}\right\}. \end{aligned} \right\} (20)1$$

按式(19)的第一式：

$$k_\eta = -\frac{1}{2} \frac{b}{b_2} = -\frac{1 + \eta_0^2 a}{2N_0} l_0 \cos B_0$$



图七

又按  $l_0 \cos B_0 \approx \frac{v_a}{N_0} \approx \frac{(v_1)^M - (v_2)^M}{N_0}$

代入 $k_\eta$ 式，則得：

$$k_\eta = -\frac{1 + \eta_0^2}{2N_0^2} \left\{ (v_1)^M - (v_2)^M \right\}$$

按  $\frac{1 + \eta_0^2}{N_0^2} = \frac{1}{r_0^2}$ ， $r_0$ 为平均弯曲半径，因之：

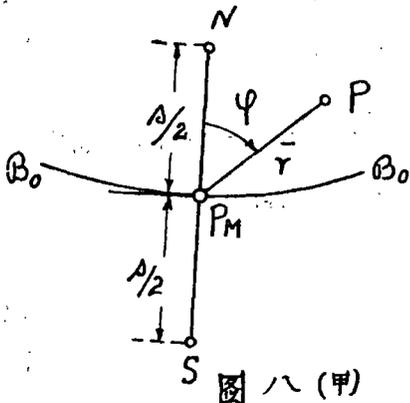
$$k_\eta = -\frac{(v_1)^M - (v_2)^M}{2r_0^2} \quad (20)2$$

根据式(18)及式(20)1可繪出图解表，詳細情形見下面C)实用之部。

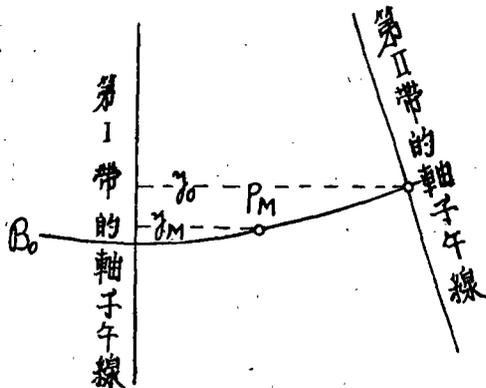
A7) 从式(18)略去 $a_3$ 及 $b_3$ 直接导出利用平面相似变换后的剩余誤差〔註九〕

参考图八甲，根据式(18)略去 $a_3$ 及 $b_3$ 直接导出剩余誤差为：

$$|d| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{s^2}{8} \frac{D_0}{r_0^2} \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1} \left\{ 1 + \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{2}{3} v_0^2 - 2v_0 v_M + \frac{v_M^2}{2} \right) \right\} \quad (21) a$$



图八(甲)



图八(乙)

在实用上如算到 $cm$ 正确，则可略去划有横线的项，因此得：

$$|d| = \frac{s^2}{8} \frac{y_0}{r_0^2} \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1}, \quad (21)b$$

此处  $\rho = \frac{2\bar{r}}{s}$ 。  $y_0$ 及 $y_M$ 的意义见图八乙，  $r_0$ 为属于 $B_0$ 的平均弯曲半径，  $s$ 为用于坐标变换的基线长度。

按〔註九〕，178页式(14)得：

$$|d| = \frac{s^2}{8} \frac{y_0}{r_0^2} \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{2}{3} \eta_0^2 + 2\eta_0 y_M + \frac{y_M^2}{2} t_0^2 \right) \right\},$$

注意上式内  $\eta_0 = -y_0$ ，因此上式写为：

$$|d| = \frac{s^2}{8} \frac{|y_0|}{r_0^2} \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{2}{3} y_0^2 + 2y_0 y_M + \frac{y_M^2}{2} t_0^2 \right) \right\},$$

上式与(21)a作比较仅差在  $\frac{y_M^2}{2} t_0^2$  项上。

AS)式(21)b的应用 (参考〔註九〕)

1.在(21)b式中，因  $\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1 = \text{常数}$  表示 Cassini 曲线方程式，对于不同常数我们可用一定比例尺绘出曲线图 (参考下面C)实用之部内图二十一)。

欲求式(21)b式中的 $|d|$ 值，先计算出下面的常数 $K$ ：

$$K = \frac{s^2}{8} \frac{y_0}{r_0^2} \quad (21)c$$

根据实施坐标变换区域的地形图把欲变换的点 $P$ 用下面的方法转绘到曲线图内，这样就可以从曲线图内读得  $\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1}$  的值。该值乘以 $K$ 即得 $|d|$ 的值。参考图八甲，先从图上或用计算方法求出 $P$ 点的 $\bar{r}$ 及 $\varphi$  (以 $P_MN$ 为起始方向)，计算出  $\rho = 2\bar{r}/s$ ，然后按C)实用之部图二十一内 $\rho$ 的比例尺根据 $P$ 点的 $\varphi$ 及 $\rho$ 把 $P$ 点转绘到曲线图上。

2.我们也可以提出下面的一个问题：假如在施行两个已知的系统间的坐标变换时，不许超出规定的 $|d|$ 值，则基线长度 $s$ 应几何？及欲变换点离开基线 $NS$ 最多为几何？对于此问题的回答如下：因为坐标变换的基线的自乘进入到(21)b式中，所以用限制 $s$ 的方法来减少 $|d|$ 的值，假如我们已经选定了 $s$ 的值，则须限制坐标变换区域在东西方向。从曲线图中 (见C)实用之部图二十一) 可以看出，假定在基线两旁各给以  $\frac{1}{2}s$  宽度的带状，则  $\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1}$  最大为  $\sqrt{5} \cong 2.24$ 。若在基线两旁各给以  $\frac{1}{3}s$  宽度的带状，则最大为  $\sqrt{2} \cong 1.41$ ，所以：

$$\text{对基线两旁各给以 } \frac{1}{2}s \text{ 宽度的带状，则 } d_{\text{最大}} = K\sqrt{5},$$

$$\text{对基线两旁各给以 } \frac{1}{3}s \text{ 宽度的带状，则 } d_{\text{最大}} = K\sqrt{2}.$$

} (21)d

A9)改进应用Hunger公式施行坐标变换的方法

1.应用平面相似变换 (即利用 $c_1$ 及 $c_2$ ) 与应用A1)内式(4)a及(4)b的比较式(4)a内的 $a_3$ 项及 $b_3$ 项在实用上可以略去，因为我们可以限制区域的大小，一般为 $24 \times 24 \text{ km}^2$ ，则 $a_3$ 及 $b_3$ 项为数值极微，可以略去。在区域的中心选定一点作为辅助点，求出该点的近似

經緯度，因此可以求出 $B_0$ ， $l_0^b$ 及 $l_0^a$ 的数值(参考图六)。預为計算補助点 $M$ 在第I带的坐标 $(x_0)_1$ ， $(y_0)_1$ 及該点在第II带的坐标 $(x_0)_2$ ， $(y_0)_2$ 。根据(4)b計算出 $a_1^b$ ， $b_1^b$ ， $a_2^b$ 及 $b_2^b$ 的数值。式(4)a的 $a_2^b$ 項及 $b_2^b$ 項与式(18)及式(19)作一比較，注意 $\Delta x_1 = (\xi)$ ， $\Delta y_1 = (\eta)$ ，則得。

$$\left. \begin{aligned} & \text{式(4)a的} \frac{1}{2} a_2^b (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) - b_2^b \Delta x_1 \Delta y_1 = \\ & = \text{式(18)的第一式中的} -k_\xi \{ (\xi)^2 - (\eta)^2 \} + 2k_\eta (\xi)(\eta) = v'_x \\ & \text{及式(4)a的} \frac{1}{2} b_2^b (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + a_2^b \Delta x_1 \Delta y_1 = \\ & = \text{式(18)的第二式中的} -k_\eta \{ (\xi)^2 - (\eta)^2 \} - 2k_\xi (\xi)(\eta) = v'_y \end{aligned} \right\} (22)$$

应用式(22)，則式(4)a写为：

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= M(x_0)_2 + a_1^b \Delta x_1 - b_1^b \Delta y_1 + v'_x \\ y_2 &= M(y_0)_2 + b_1^b \Delta x_1 + a_1^b \Delta y_1 + v'_y \end{aligned} \right\} (23)$$

因此式(18)写为：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x + k_\xi \frac{s^2}{4} = v'_x - \frac{1}{2} a_2^b \frac{s^2}{4} \\ v_y &= v'_y + k_\eta \frac{s^2}{4} = v'_y - \frac{1}{2} b_2^b \frac{s^2}{4} \end{aligned} \right\} (24)$$

注意式(24)，則式(16)写为：

$$\begin{aligned} x_2 &= M(x_0)_2 + c_1^M (x_1 - x_1^M) - c_2^M (y_1 - y_1^M) - \frac{1}{2} a_2^b \frac{s^2}{4} + v'_x - l_x \\ y_2 &= M(y_0)_2 + c_2^M (x_1 - x_1^M) + c_1^M (y_1 - y_1^M) - \frac{1}{2} b_2^b \frac{s^2}{4} + v'_y - l_y \end{aligned}$$

設  $x_1 - x_1^M = (\xi) = \Delta x_1$ ， $y_1 - y_1^M = (\eta) = \Delta y_1$ ，应用式(19)a，則上式写为：

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= M(x_0)_2 + c_1 \Delta x_1 - c_2 \Delta y_1 + v'_x \\ y_2 &= M(y_0)_2 + c_2 \Delta x_1 + c_1 \Delta y_1 + v'_y \end{aligned} \right\} (25)$$

式(23)与式(25)作一比較，則得：

$$\left. \begin{aligned} a_1^b &= c_1, & b_1^b &= c_2 \end{aligned} \right\} (26)$$

在平面相似变换利用下列两式計算出 $c_1$ 及 $c_2$ 的数值：

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{x_2^n - x_2^s}{s} & c_2 &= \frac{y_2^n - y_2^s}{s} \end{aligned} \right\} (27)$$

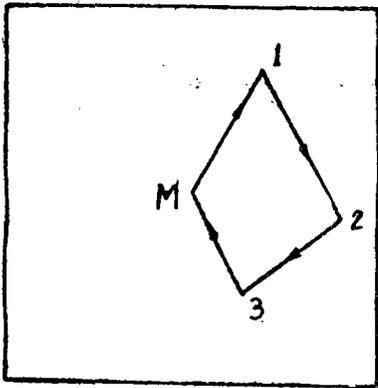
如欲算到 $mm$ 正确，則 $c_1$ 及 $c_2$ 的数值应算到小数点后第八位正确；若 $v_2^n - v_2^s$ 的数值不够大，

则 $c_1$ 及 $c_2$ 就不易计算得正确,欲求精确,应该应用式(4)b或式(5)计算出 $a_1^b$ 及 $b_1^b$ 的数值。 $l'_x$ ,  $l'_y$ 的数值可由图解表(制法见下面C)实用之部)直接查得。

应用平面相似变换有其缺点,因为必须预先计算 $N.S.M$ 三点在第I带及第II带的坐标,用以计算出 $c_1$ 及 $c_2$ 的数值。

若用式(4)a及(4)b施行坐标变换,只根据 $M$ 点的经纬度(区域中心的近似经纬度)求出 $M$ 点在第I带及第II带的坐标。我们可以计算出很精密的 $a_1^b, b_1^b, a_2^b, b_2^b$ 的数值。在计算 $a_1^b, b_1^b$ 的数值时,亦可应用式(5),或由维洛魏茨著:高斯克吕格坐标表(总参谋部测绘局译印)内的 $(\gamma_0)_1, (\gamma_0)_2, (m-1)_1, (m-1)_2$ 的数值,然后按式(5)求出 $a_1^b$ 及 $b_1^b$ 的数值,但不够精密,只能算到几个公寸正确,如欲精确,应用式(4)b。应用式(23)与 $l'_x$ 及 $l'_y$ 的图解表即可解决在小区域内( $24 \times 24 km^2$ )施行大量点子的坐标变换问题。

2. 连续计算一连串点子的方法



图九

$$x_2 - x_1 = a_1^b(x_1 - x_1) - b_1^b(y_1 - y_1) + l'_x \quad (28)$$

$$x_2 - x_1 = a_1^b(x_1 - x_1) - b_1^b(y_1 - y_1) + l'_x \quad (29)$$

$$x_2 - x_1 = a_1^b(x_1 - x_1) - b_1^b(y_1 - y_1) + l'_x - l'_y \quad (30)$$

依此类推得:

$$x_2 - x_1 = a_1^b(x_1 - x_1) - b_1^b(y_1 - y_1) + l'_x - l'_y \quad (31)$$

$$x_2 - x_1 = a_1^b(x_1 - x_1) - b_1^b(y_1 - y_1) + l'_x - l'_y \quad (32)$$

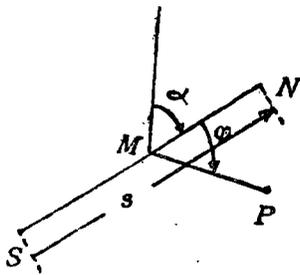
在 $M$ 点上 $(\xi) = 0, (\eta) = 0$ , 故由式(22)得:

$$l'_x = 0, \quad l'_y = 0 \quad (33)$$

同理, 写出求 $l'_y$ 的各式。

3. 若 $NS$ 线不平行于第I带的轴子午线, 如何施行坐标变换?

第一带的轴子午线



图十

按式(10): 
$$z_2 - z_1 = c_1(z_1 - z_1), \quad (10)$$

设  $\Delta x_1 = x_1 - x_1, \Delta y_1 = y_1 - y_1$ , 则式(10)写为:

$$x_2 + iy_2 - x_1 - iy_1 = (c_1 + ic_2)(\Delta x_1 + i\Delta y_1),$$

即 
$$(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) = c_1\Delta x_1 - c_2\Delta y_1 + i(c_1\Delta y_1 + c_2\Delta x_1),$$

由上式得:

$$x_2 - x_1 = c_1\Delta x_1 - c_2\Delta y_1,$$

$$y_2 - y_1 = c_1\Delta y_1 + c_2\Delta x_1,$$

由上二式得:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{\binom{n}{s} (x_2 - x_1) \binom{n-s}{s} (x_1 - x_2) + \binom{n}{s} (y_2 - y_1) \binom{n-s}{s} (y_1 - y_2)}{s^2} \\ c_2 &= \frac{\binom{n}{s} (x_1 - x_2) \binom{n-s}{s} (y_2 - y_1) - \binom{n}{s} (y_1 - y_2) \binom{n-s}{s} (x_2 - x_1)}{s^2} \end{aligned} \right\} (34)a$$

若NS平行于第I带的轴子午线, 则 $y_1 - y_2 = 0, x_1 - x_2 = s$ , 故由式(34)得:

$$c_1 = \frac{\binom{n}{s} (x_2 - x_1)}{s}, \quad c_2 = \frac{\binom{n}{s} (y_2 - y_1)}{s}$$

根据格罗斯馬恩的研究〔註九〕, 剩余误差  $|d|$  与  $\alpha$  脱离关系 (图十),  $|d|$  的公式仍为式(21)b。  $v_x$  及  $v_y$  的公式如下:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2} a_2^b \left\{ (\xi)^2 - (\eta)^2 - \frac{s^2}{4} + \frac{1}{2} s^2 \sin \alpha \right\} - b_2^b \left\{ (\xi)(\eta) - \frac{s^2}{8} \sin 2\alpha \right\}, \\ v_y &= a_2^b \left\{ (\xi)(\eta) - \frac{s^2}{8} \sin 2\alpha \right\} + \frac{1}{2} b_2^b \left\{ (\xi)^2 - (\eta)^2 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{2} \sin^2 \alpha \right\}. \end{aligned} \right\} (34)b$$

4. 用平面相似变换連續計算一連串点子的方法

由图十一得

$$s = \sqrt{\binom{e}{s} \binom{a}{s}^2 + \binom{e}{s} \binom{a}{s}^2} = \sqrt{[\Delta v_1]^2 + [\Delta x_1]^2}, \quad (35)$$

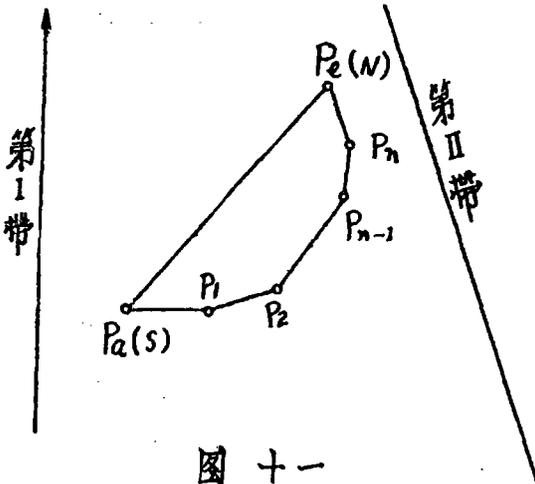
[ ] 代表代数和, 以1代表第I带, 以2代表第II带。

已知:

$$\left. \begin{aligned} \binom{a-1}{1} \binom{1}{a} \Delta v_1 &= \binom{a-1}{1} \binom{1}{a} \Delta v_1, & \binom{a-1}{1} \binom{1}{a} \Delta x_1 &= \binom{a-1}{1} \binom{1}{a} \Delta x_1, \\ \binom{1-2}{2} \binom{2}{1} \Delta v_1 &= \binom{1-2}{2} \binom{2}{1} \Delta v_1, & \binom{1-2}{2} \binom{2}{1} \Delta x_1 &= \binom{1-2}{2} \binom{2}{1} \Delta x_1, \\ & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-e}{e} \binom{e}{n} \Delta v_1 &= \binom{n-e}{e} \binom{e}{n} \Delta v_1, & \binom{n-e}{e} \binom{e}{n} \Delta x_1 &= \binom{n-e}{e} \binom{e}{n} \Delta x_1, \end{aligned} \right\} (36)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 - v_1 &= [\Delta v_1] = \binom{a-1}{1} \binom{1-2}{2} \cdots \binom{n-e}{e} \Delta v_1, \\ x_1 - x_1 &= [\Delta x_1] = \binom{a-1}{1} \binom{1-2}{2} \cdots \binom{n-e}{e} \Delta x_1 \end{aligned} \right\} (37)$$

求各点在第II带的坐标。式(37), 作为检核計算的。預为求出  $P_a, P_e$  点在第II带的坐标,



图十一

用下两式求  $c_1$  及  $c_2$ :

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{[\Delta v_1][\Delta v_2] + [\Delta x_1][\Delta x_2]}{s^2} = \frac{\binom{e}{s} \binom{a}{s} \binom{e}{s} \binom{a}{s} (y_1 - y_2) + \binom{e}{s} \binom{a}{s} \binom{e}{s} \binom{a}{s} (x_1 - x_2)}{s^2} \\ c_2 &= \frac{[\Delta x_1][\Delta v_2] - [\Delta v_1][\Delta x_2]}{s^2} = \frac{\binom{e}{s} \binom{a}{s} \binom{e}{s} \binom{a}{s} (x_1 - x_2) - \binom{e}{s} \binom{a}{s} \binom{e}{s} \binom{a}{s} (y_1 - y_2)}{s^2} \end{aligned} \right\} (38)$$

求各点在第II带的平面坐标的坐标变换公式:

$$\left. \begin{aligned}
 & \overset{1}{y}_2 = \overset{1}{y}_2 + c_1 \overset{a-1}{\Delta} \overset{1}{y}_1 + c_2 \overset{a-1}{\Delta} \overset{1}{x}_1 + \overset{a-1}{\Delta} \overset{1}{y}_y, & \overset{1}{x}_2 = \overset{1}{x}_2 + c_1 \overset{a-1}{\Delta} \overset{1}{x}_1 - c_2 \overset{a-1}{\Delta} \overset{1}{y}_1 + \overset{a-1}{\Delta} \overset{1}{x}_x, \\
 & \overset{2}{y}_2 = \overset{2}{y}_2 + c_1 \overset{1-2}{\Delta} \overset{2}{y}_1 + c_2 \overset{1-2}{\Delta} \overset{2}{x}_1 + \overset{1-2}{\Delta} \overset{2}{y}_y, & \overset{2}{x}_2 = \overset{2}{x}_2 + c_1 \overset{1-2}{\Delta} \overset{2}{x}_1 - c_2 \overset{1-2}{\Delta} \overset{2}{y}_1 + \overset{1-2}{\Delta} \overset{2}{x}_x, \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \overset{n}{y}_2 = \overset{n}{y}_2 + c_1 \overset{(n-1)-n}{\Delta} \overset{n}{y}_1 + c_2 \overset{(n-1)-n}{\Delta} \overset{n}{x}_1 + \overset{(n-1)-n}{\Delta} \overset{n}{y}_y, & \overset{n}{x}_2 = \overset{n}{x}_2 + c_1 \overset{(n-1)-n}{\Delta} \overset{n}{x}_1 - c_2 \overset{(n-1)-n}{\Delta} \overset{n}{y}_1 + \overset{(n-1)-n}{\Delta} \overset{n}{x}_x, \\
 & \overset{e}{y}_2 = \overset{e}{y}_2 + c_1 \overset{n-e}{\Delta} \overset{e}{y}_1 + c_2 \overset{n-e}{\Delta} \overset{e}{x}_1 + \overset{e}{\Delta} \overset{e}{y}_y, & \overset{e}{x}_2 = \overset{e}{x}_2 + c_1 \overset{n-e}{\Delta} \overset{e}{x}_1 - c_2 \overset{n-e}{\Delta} \overset{e}{y}_1 + \overset{e}{\Delta} \overset{e}{x}_x.
 \end{aligned} \right\} (39)$$

$\overset{e}{y}_2$  式及  $\overset{e}{x}_2$  式作为检验计算之用。

5. 由式(22)直接导出只利用  $\overset{b}{a}_1$  及  $\overset{b}{b}_1$  (参考式(23)) 进行平面变换后的剩余误差

按式(22)得:

$$\begin{aligned}
 v'_x &= \frac{1}{2} \overset{b}{a}_2 \{ (\xi)^2 - (\eta)^2 \} - \overset{b}{b}_2 (\xi) (\eta), \\
 v'_y &= \overset{b}{a}_2 (\eta) (\xi) + \frac{1}{2} \overset{b}{b}_2 \{ (\xi)^2 - (\eta)^2 \},
 \end{aligned}$$

由此得

$$|d| = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{b}{a}_2^2 + \overset{b}{b}_2^2} \overline{r}^{-2} = \frac{1}{2} \frac{\overset{b}{y}_0}{\overline{r}^2_0} \overline{r}^{-2} \quad (40)1$$

$$\text{或 } |d| = \frac{1}{2} \frac{\overset{b}{y}_0}{\overline{v}^2_0} \{ (\xi)^2 + (\eta)^2 \}, \quad \overline{r}^2 = (\xi)^2 + (\eta)^2 \quad (40)2$$

设  $\overset{b}{y}_0 = 200km$ ,  $\overline{r}^2 = (\xi)^2 + (\eta)^2 = I^2 + I^2 = 2km^2$ ,  
 则  $|d| = 5mm$ , 也就是说, 若在一幅  $1:5000$  图上, 其图廓大小为  $2 \times 2km$ , 进行平面变换, 则其剩余误差为  $5mm$ , 如算到  $1cm$  正确, 则平面变换已足够正确。  
 从这里可以看出, 式(40)1比式(21)b简单得多。

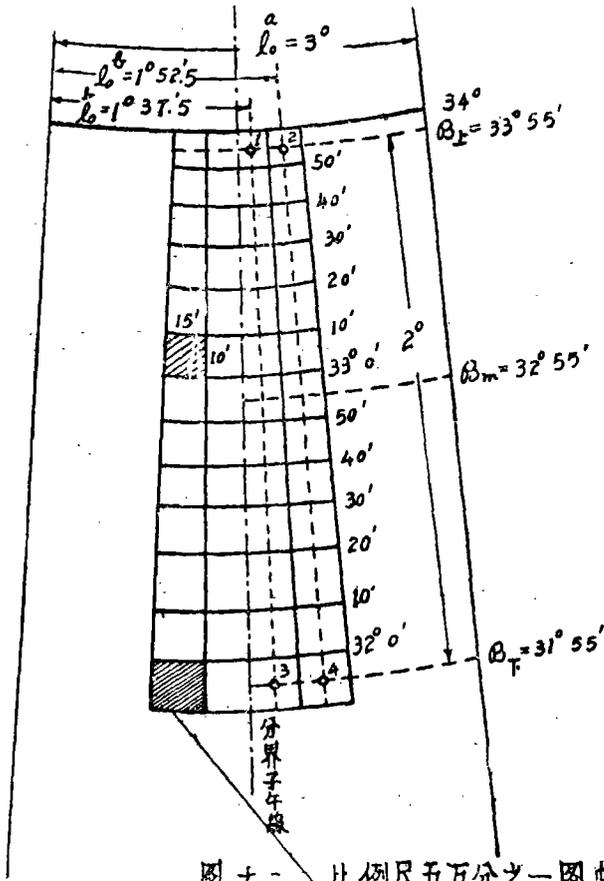
A10) 应用式(23)在大区域内进行坐标变换的方法[註七]

图十二表示  $3^\circ$  带的重叠部分, 在南北方向限制纬度差为  $2^\circ$ , 在该地区内进行坐标变换。我们首先考察在带的分界子午线右边的重叠部分。

按式(19)及式(4)b得:

$$k_\eta = - \frac{1}{2} \overset{b}{b}_2 = - \frac{1}{2} \frac{1 + \eta^2_0}{N_0} \overset{a}{l}_0 \cos B_0 + \overset{a}{l}^3_0 \text{ 项及带有 } \overset{b}{l}_0 \text{ 及 } \overset{a}{l}_0 \overset{b}{l}_0 \text{ 的三次项,}$$

三次项可以略去, 故  $k_\eta$  与  $\overset{a}{l}_0$  及  $B_0$  发生关系, 而与  $\overset{b}{l}_0$  不发生关系, 因为  $\overset{a}{l}_0 = 3^\circ = \text{常数}$ , 故  $k_\eta$  仅与纬度发生关系。



图十二 比例尺五万分之一图幅

$$k_g = -\frac{l^b}{2} a_2 = +\frac{t_0^a}{N_0} l_0^a \cos^2 B_0 (1 + 2\eta_0^2) - \frac{t_0}{2N_0} (1 + 5\eta_0^2) l_0^a b$$

根据上面各式求出对于点 1、2、3、4 的各  $k_\eta$  及各  $k_g$  的值如下表：

緯度	点	$k_\eta$ cm/km <sup>2</sup>	点	$k_g$ cm/km <sup>2</sup>	平均值	总平均值
33° 55'	1	-0.3418	1	0.0145	0.0143	0.0139
	2		3	0.0141		
31° 55'	3	-0.3498	2	0.0137	0.0135	
	4		4	0.0133		

从表中可以看出：对于緯度差为 2° 及 3° 带的重叠部分的地区， $k_g$  的变动极少，实用上当作常数； $k_\eta$  的变化虽较大，但亦甚微。我们取其平均值：

$$k_{\eta} = -0.3458 \text{cm/km}^2, \quad k_{\xi} = +0.0139 \text{cm/km}^2,$$

对图十二所示的范围一律采用上面的平均值。根据式(22)或(24)可以制出图解表,从该图解表内(制法见下面实用之部)查出 $l'_x$ 及 $l'_y$ (或 $v_x$ 及 $v_y$ )的数值。由于 $k_{\eta}$ 的变化较大,如取上面的平均值制出图解表当作适用于图十二所示的范围,则由此所得的 $l'_x$ 及 $l'_y$ (或 $v_x$ 及 $v_y$ )的数值尚含有1到2公分的误差,我们必须从检得的 $l'_x$ 及 $l'_y$ (或 $v_x$ 及 $v_y$ )值上加修正值 $dv$ 。下面导出求 $dv$ 的公式。

首先求出 $k_{\eta}$ 的变动。按:

$$k_{\eta} = -\frac{1}{2} b_2 = -\frac{1}{2} \frac{1 + \eta_0^2}{N_0} l_0^a \cos B_m, \quad (41)$$

在图十二内设 $B_m = 32^{\circ}55'$ ,由上式得:

$$d k_{\eta} = \frac{1 + \eta_0^2}{2N_0} \frac{l_0^a}{\rho} \sin B_m \frac{dB}{\rho} = k (dB)^{\circ} \quad (42)$$

式中 
$$k = \frac{1 + \eta_0^2}{2N_0} \frac{l_0^a}{\rho^2} \sin B_m. \quad (43)$$

从式(42)我们可以假定:在纬度差为 $2^{\circ}$ 的范围内 $dk_{\eta}$ 与 $dB$ ( $dB = B - B_m$ )成正比例。

若略去 $k_{\xi}$ ,则按式(22)或(24)对 $l'_x$ 及 $l'_y$ (或 $v_x$ 及 $v_y$ )有下面的公式:

$$v = k_{\eta} \cdot F$$

取微分得:

$$dv = dk_{\eta} \cdot F = dk_{\eta} \cdot \frac{v}{k_{\eta}},$$

以式(42)代入上式得:

$$dv = v \cdot \frac{dk_{\eta}}{k_{\eta}} = v \cdot (dB)^{\circ} \frac{\frac{1 + \eta_0^2}{2N_0} \frac{l_0^a}{\rho^2} \sin B_m}{-\frac{1}{2} \frac{1 + \eta_0^2}{N_0} \frac{l_0^a}{\rho} \cos B_m},$$

故 
$$dv = -v (dB)^{\circ} \frac{1}{\rho} \text{tg} B_m \quad (44)$$

对于图十二,  $B_m = 32^{\circ}55'$ , 我们求得:

$$dv = -0.0113 \cdot v \cdot (dB)^{\circ} \quad (45)$$

式中 $dv$ 及 $v$ 以 $\text{cm}$ 为单位,  $dB$ 以度为单位。

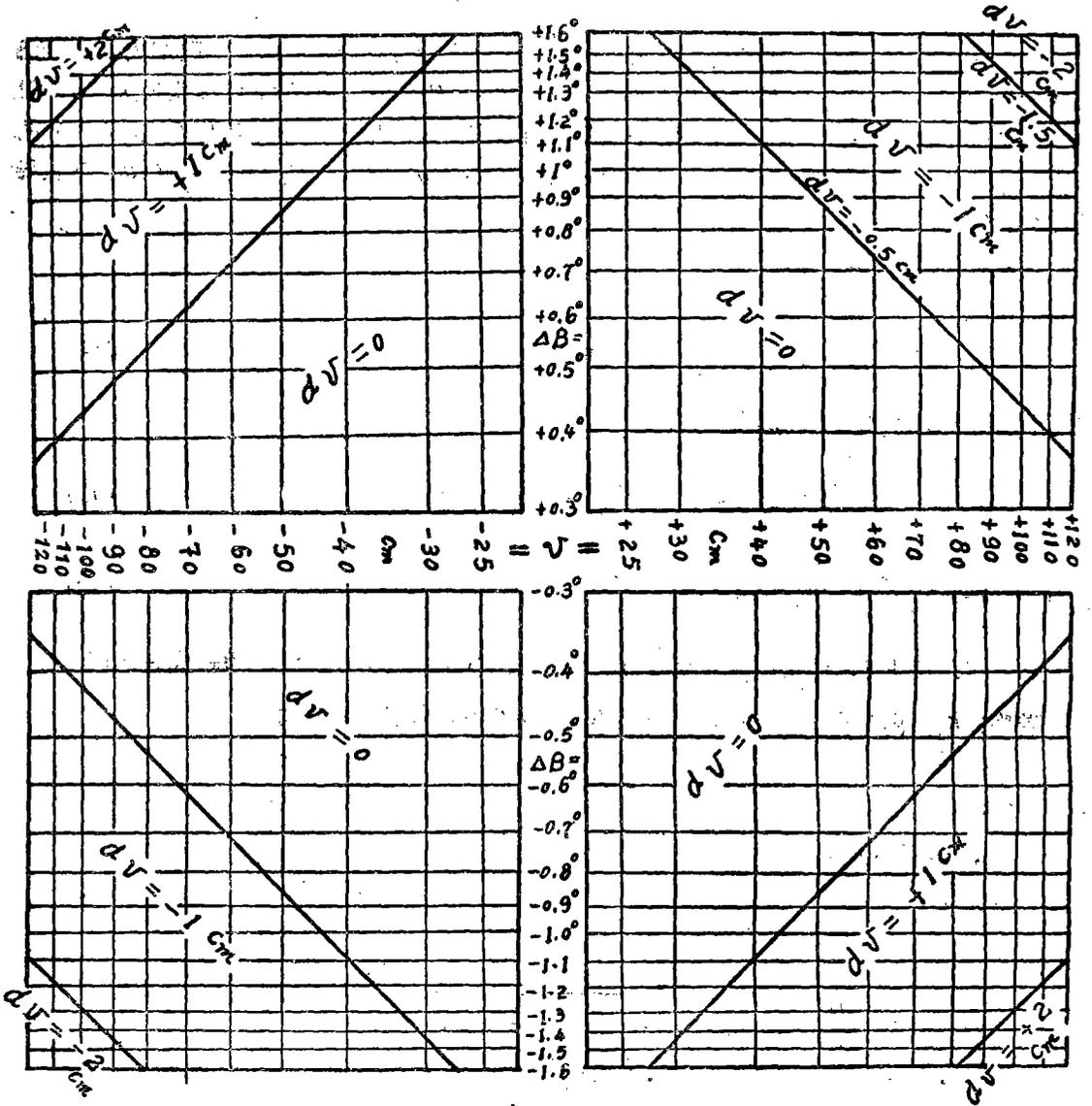
从上式得:

$$|dv| = 0.0113 \cdot v \cdot dB$$

取对数得:

$$\lg |dv| = \lg 0.0113 + \lg v + \lg dB \quad \text{即} \quad \lg dB = -\lg 0.0113 + \lg dv - \lg v \quad (46)$$

从式(46)对于 $dv = 0.5 \text{cm}$ 及 $dv = 1.5 \text{cm}$ 制出图解表,见图十三。



图十三

从图十三可以看出 $dv=0cm, =\pm 1cm$ 及 $\pm 2cm$ 的范围。

### 参 考 书

[註一]叶雪安著：高斯投影坐标变换问题的研究，同济大学学报第四期，1956年。

[註二]叶雪安著：维罗魏茨及拉宾诺维奇高斯坐标变换数表字中公式的扩充。

[註三]叶雪安著：地图投影，龙门书店出版。

[註四]Zeitschrift für Vermessungswesen (以下简称Z.f.V.), 1941年 283—287页；

立斯刀著：两高斯投影带间坐标变换的一般公式。

[註五]薩卡托夫著：高等测量学教程(译本)。

[註六]Proj. I, Hazay: Die Umformung von der stereographischen Proj. und

*der konformen Zylinderproj. auf die Gauss-Krügersche Proj.* 1954年

〔註七〕Z.f.V. 1938年 687/693頁 Hunger文。

〔註八〕Z.f.V. 1940年 385/392頁 Küstner文。

〔註九〕Z.f.V. 1944年 173/180頁 Grossmann文。

待續

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ИЗ  
 ЗОНЫ ПРОЕКЦИИ ГАУССА В СМЕЖНУЮ ЗОНУ И ИЗ ПРОЕК-  
 ЦИЮ ЛАМБЕРТА НА СЕКУЩЕМ КОНУСЕ В ПРОЕК-  
 ЦИИ ГАУССА ПО СПОСОБУ ВСПОМО-  
 ГАТЕЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ЛЮБОМ

МЕСТЕ

Е. Сю-ань

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Существуют два вида преобразования координат: первым является преобразование однородных координат и вторым — преобразование неоднородных. Однородные координаты получаются в результате единичного вычисления по пунктам государственной триангуляции. Неоднородные координаты получаются по двум разным системам. Эти две системы различны потому, что не только различны картографические проекции, но и эти две системы триангуляционных сетей возникают в разное время и независимо друг от друга. Ошибки в измерении приводят к различию случайного характера этих двух систем. Так, например, для государственного триангуляционного пункта преобразуются плоские координаты Гаусса из шести-градусной зоны в трехградусную. Такое преобразование является преобразованием однородных координат. При преобразовании координат триангуляционного пункта свободной сети триангуляции города или промышленного района в координаты государственной общей системы проекции (шестиградусную или трехградусную зону), если достаточно идентичных пунктов, то можно применять метод преобразования неоднородных координат. В данной работе излагается только преобразование однородных координат. На основе этой работы автор провел исследование преобразования неоднородных координат.

В данную работу входят три части. В первой части (А) применяется сравнительно простой метод вывода формул преобразования координат из зоны проекции Гаусса в смежную зону по способу вспомогательной точки на любом месте, см. ниже формулы (4). Изучается точность формулы Вировца [5] и формул преобразования координат [6], принятых в Венгрии.

Из формул (4) выводятся формулы (см. ниже формулы (23)), подобные формулам Хунгера и расширенные формулы Хунгера (см. фор. (17)).

При применении формулы Хунгера необходимо предварительно вычисляются плоские

координаты точек N, S и M на восточной и западной зонах. Если используется формула (23), то этот процесс является ненужным, а только по приближенным широтам и долготам центра района, где производится преобразование координат, непосредственно вычисляются коэффициенты, необходимые при выполнении преобразования плоских координат и коэффициенты, необходимые для разработки графика. При наличии формулы (17) можно понять как ограничить район преобразования координат, чтобы вычислительная работа ограничилась плоским преобразованием, а избыточные ошибки быстро получились, подготовительные работы наиболее уменьшились. Поэтому этот способ пригоден для этого случая, когда в определенных пределах района (обычно  $24 \times 24 \text{ км}^2$ ), большое количество точек быстро подвергается преобразованию координат и дает точность 0,004 м. Кроме того, автор также изложил применение плоского подобного преобразования, т. е. применение точек N, S и M и графика для производства преобразования координат и формулу Гросмана для определения избыточных ошибок.

Вторая часть (B) основана на теории первой части. Во второй части выводятся формулы преобразования координат из проекции Ламберта на сечущем конусе в проекцию Гаусса и обратно, когда вспомогательная точка находится на любом месте, а также показал, как производить преобразование координат и с учетом двух разных эллипсоидов.

Третья часть (C) является практической частью, где автор показал метод разработки графика для обработки избыточных ошибок и некоторые примеры вычисления.