

# 工程测量控制网最优化设计的几个问题\*

彭 先 进

**【摘要】** 本文探讨工程测量控制网最优化设计的几个问题：

一、网形最优化 将全部控制点区分为两类点，对其中有一定选择范围的第二类点采用优选法定点。

二、边角观测精度最佳配合 对边角全测网、测角网加测边长、测边网加测方向（角度）分别进行讨论。

三、观测权分配最优化 通过求出最佳权分配比例来解决这类问题。

## 前 言

用于各种工程建设项目的测量控制网，不仅必须满足工程设计所提出的技术要求，而且在其布设过程中，应该力求花费最少的时间、人力和物力。这个目标，可以通过最优化设计来实现。

为了解决这类问题，通常要选取某些参数，建立最优化的目标函数，并给出一定的限值或条件，以数学方法求出参数的值，从而获得最优化的设计方案。当然，如果改变目标函数的形式及其限值或条件，所获得的参数随之不同，最优化方案亦改变了。

对于控制网设计的每个环节，只要其方案有选择的余地，均可进行最优化设计。

本文将对工程测量平面控制网的网形最优化方法、边角观测精度的最佳配合、观测值权分配最优化问题分别进行探讨。为此，在公式推导完成之后，编制了专用的电算程序，以运算的数据作为理论的验证。

文中进行精度估算时，采用参数平差法。附图中的误差椭圆，由文献〔1〕提供的公式计算，并取  $\mu = 1$ 。

## 网 形 最 优 化

根据参数平差公式，权系数阵  $Q_X$  与误差方程式系数阵  $A$  及观测值权阵  $P$  的关系为

$$Q_X = (A^T P A)^{-1}, \quad (1)$$

参数的函数的权倒数

$$Q_F = F Q_X F^T. \quad (2)$$

式中  $F$  —— 权函数式系数矢量。

由于  $A$  阵的元素是根据控制网的坐标来计算，所以  $Q_F$  与控制网的坐标存在着函数关系，记为

$$Q_F = \varphi(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \quad (3)$$

式中  $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$  —— 网中待定点纵横坐标。

\* 本文是研究生毕业论文的一部分，指导教师是李青岳教授、刘大杰讲师。

然而式(3)尚不能作为网形最优化的目标函数。因为通过对式(3)求极小值而得出的坐标，将会构成“理想网形”，缺乏实用价值。

为了得到适用于具体工程条件的最优化网形，可将所设计的控制网点区分为两类：

第一类点：由于受到测区地形、地质条件的限制或考虑工程的特殊需要，不能以精度作为选点的主要依据，更多顾及的是：足够的控制范围、适当的点位密度、较长的使用期限、良好的通视条件，工程本身的要求如建筑物主轴线上或其附近有控制点，等等。第一类点的选择通常凭经验完成，也可以进行待选方案的对比。

第二类点：虽然也受客观条件约束，但有一定的选择范围，可以从精度要求出发，以数学方法来优选控制点。这就是本文所要讨论的方法。其基本步骤是：在选好第一类点的基础上，根据客观条件确定第二类点的数目及各点的选择范围，建立目标函数，通过求极值的方法计算第二类点的最佳点位。

设网中有P个第二类点，其坐标为

$$(X, Y) = (x_1, y_1, \dots, x_p, y_p); \quad (4)*$$

各点的选点范围，以(X, Y)的定义域D表示：

$$D = \{(a_{x_1}, b_{x_1}), (a_{y_1}, b_{y_1}), \dots, (a_{x_p}, b_{x_p}), (a_{y_p}, b_{y_p})\}, \quad (5)*$$

式(5)含义为： $x_1$ 的定义域为 $(a_{x_1}, b_{x_1})$ ， $y_1$ 的定义域为 $(a_{y_1}, b_{y_1})$ ，等等。

现在，将式(3)中的第一类点的坐标作为常量，建立以第二类点坐标为变量的目标函数

$$Q_F = \Phi(X, Y) = \Phi(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) \quad (6)$$

如果能求出一组在定义域D内的坐标

$$(X^*, Y^*) = (x_1^*, y_1^*, \dots, x_p^*, y_p^*), \quad (7)$$

使得函数(6)有极小值，即

$$\Phi(X^*, Y^*) = \min_{(x, y) \in D} \Phi(X, Y), \quad (8)$$

则式(7)为最佳第二类点位坐标。

为了求得多变量函数 $\Phi(X, Y)$ 在定义域D内的极值，根据多变量单峰函数可以分析定义的原理([2])，对 $2p$ 个变量依次求极值，经过若干次循环，可以得出 $(X^*, Y^*)$ 的近似值。

应用优选法中的因素交替法，轮流地沿点1至点P之x、y方向搜索最优点，迭代程序如下：

(1) 选取初始值

$$(X^{(0)}, Y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}, y_p^{(0)}), \quad (9)$$

并代入式(6)估算 $Q_F^{(0)}$ 。

(2) 自第一个变量 $x_1$ 开始优选。步骤是：

(a) 按0.618法(参看图1)分别取

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= 0.382 (b_{x_1} - a_{x_1}) + a_{x_1} \\ x''_1 &= 0.618 (b_{x_1} - a_{x_1}) + a_{x_1} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

\* 式(4)(5)仅作书写的缩略符号

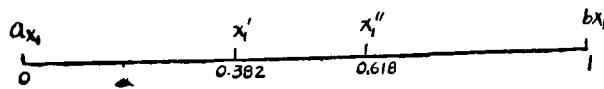


图 1

其余  $2p-1$  个变量保持不变，分别计算

$$\left. \begin{aligned} Q_F' &= \Phi(x_1', y_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}, y_p^{(0)}) \\ Q_F'' &= \Phi(x_1'', y_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}, y_p^{(0)}) \end{aligned} \right\};$$

(b) 比较  $Q_F'$  与  $Q_F''$ ，若  $Q_F' > Q_F''$ ，则说明  $x_1^*$  应在区间  $(x_1', b_{x_1})$  内；反之，则在  $(a_{x_1}, x_1'')$  内；

(c) 在 (b) 所判别的新区间内，重复上述 (a)、(b) 步骤；

(d) 直至所求出的  $x_1$  之最新搜索区间  $(a_{x_1}^{(k)}, b_{x_1}^{(k)})$  满足

$$|b_{x_1}^{(k)} - a_{x_1}^{(k)}| \leq \delta \quad (11)$$

式中  $K$  为搜索次数， $\delta$  为限差，则取

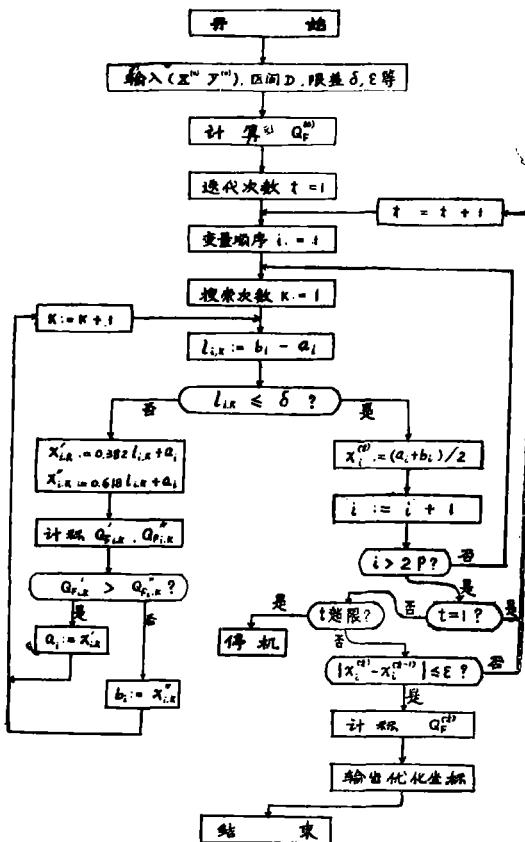


图 2

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \frac{a_{\mathbf{x}_1}^{(k)} + b_{\mathbf{x}_1}^{(k)}}{2}, \quad (12)$$

第一个变量的第一次迭代完成；

(3) 以所求出的  $\mathbf{x}_1^{(1)}$  代替式(9)中的  $\mathbf{x}_1^{(0)}$ ，对第二个变量  $y_1$  重复  $\mathbf{x}_1$  所经历的优选步骤，得出  $y_1^{(1)}$  之后，以  $y_1^{(1)}$  代替式(9)中的  $y_1^{(0)}$ 。如此依次进行到最后一个变量  $y_p$ ，从而得出第一次优选值

$$(X^{(1)}, Y^{(1)}) = (\mathbf{x}_1^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_p^{(1)}, y_p^{(1)}); \quad (13)$$

(4) 重复步骤(2)、(3)，直至第  $t$  次优选值

$$(X^{(t)}, Y^{(t)}) = (\mathbf{x}_1^{(t)}, y_1^{(t)}, \dots, \mathbf{x}_p^{(t)}, y_p^{(t)}) \quad (14)$$

满足

$$|\mathbf{x}_i^{(t)} - \mathbf{x}_i^{(t-1)}| \leq \varepsilon \wedge |y_i^{(t)} - y_i^{(t-1)}| \leq \varepsilon, \quad (i=1, 2, \dots, P) \quad (15)$$

式中  $\varepsilon$  为限差，则  $(X^{(t)}, Y^{(t)})$  为  $(X^*, Y^*)$  的近似值；

(5) 将  $(X^{(t)}, Y^{(t)})$  代入式(6)估算  $Q_F^{(t)}$ ，与  $Q_F^{(0)}$  相比较，即可看出优选后的效益。

计算框图见图 2。

以某大型水利枢纽工程首级控制网选点为例（图 3）。大坝位于江面峡谷转入开阔的河段，坝长 2.56 公里，江心有两个长形小岛。

第一类点按下列步骤选出：

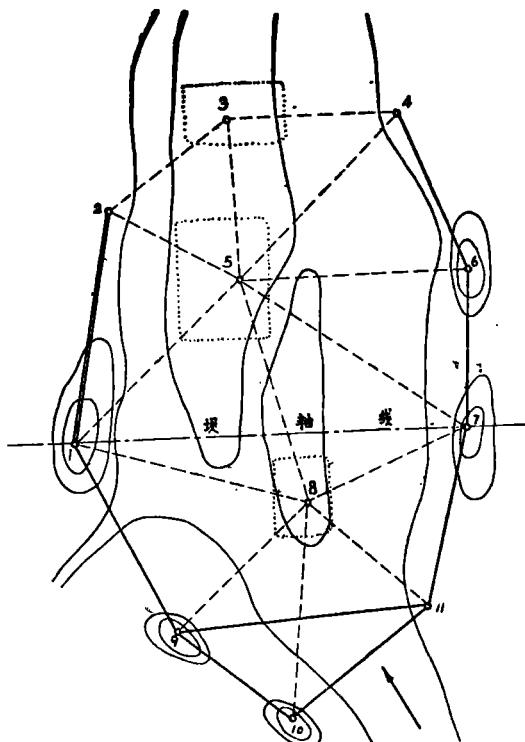


图 3

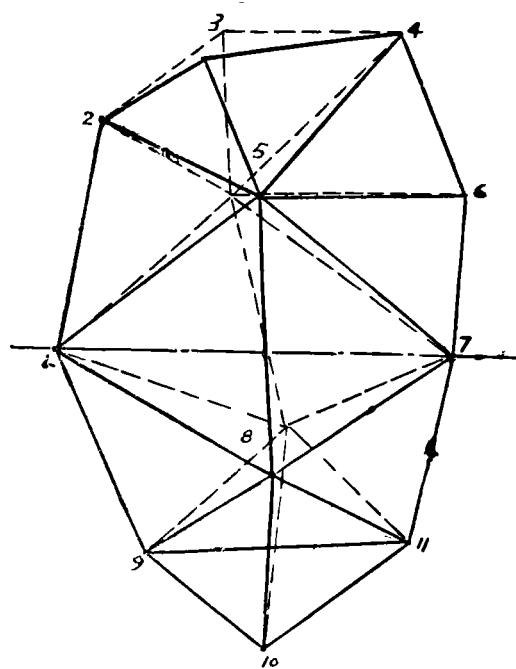


图 4

(1) 由设计的坝轴线位置, 结合实地条件, 在两岸小山上选出点1和点7, 满足坝轴线上有点的要求;

(2) 以边长略大于1公里, 点位通视良好、地质稳固的要求, 沿江边分别自点1、7始向上下游选出2、4、6、9、10、11诸点, 其控制面积略大于工程设计范围;

(3) 江心岛上地势平坦, 在其上选点有较大的活动余地, 应列入第二类点。

第二类点按本文所述方法进行优选, 如图3中的点3、5、8, 已绘出其初始位置及定义域。取  $Q_F = \text{tr}Q_X$ ,  $\delta = \epsilon = 30$ 米, 方向观测中误差  $m_\gamma = 0''.4$ , 方向数46个, 以1—2边为始边, 经过三次迭代, 历时40分钟(TQ16机)。其  $(X^{(0)}, Y^{(0)})$  为水利勘测部门1974年施测的控制网坐标, 估算得  $Q_F^{(0)} = 2.57$ , 而优化后的  $(X^{(3)}, Y^{(3)})$  估算得  $Q_F^{(3)} = 2.45$ 。二者相差0.12, 降低近5%。

优化前后的网形在图4中分别以虚线和实线绘出。各项数据列于表1。

表 1 (单位: 米)

点号	未知量	初 始 值	取 值 区 间			优化后值	(优化后值) — (初始值)
			a	b	b—a		
3	x	17203.5	17000	17400	400	17011.1	-192.4
	y	6141.2	5800	6400	600	5910.6	-230.6
5	x	16054.7	15500	16500	1000	16004.1	-50.6
	y	6175.6	5600	6400	800	6341.7	166.1
8	x	14492.6	13800	14600	800	14146.9	-345.7
	y	6597.6	6500	6800	300	6513.5	-84.1

### 几点说明:

一、目标函数式(6)的具体形式, 应根据工程的特点、网的用途来确定。由于它直接影响最优化方案的结果, 故应慎重选择, 必要时可用数种函数形式试算比较。

二、所得第二类点坐标在用于实地布点时, 有时需根据地形地质条件作小范围内的调整, 如避开水塘等。这种调整并不影响网形优化。通常应在最靠近优化点位的地方布点。

三、为了在最优解为边值  $a_1$  或  $b_1$  时不致被漏掉, 可将该变量的定义域取得稍大(大于限差  $\delta$  即可)。

四、点数多的大型网, 尤其是长型网, 可分区分段优选。

五、与网形最优化的其他方法(如〔3〕提出的逐渐趋近法、比降法等)相比较, 本方法有下述优点:

(1) 简捷可靠, 无需繁复的矩阵求导等运算, 易于掌握;

(2) 计算工作由电子计算机完成, 迅速准确;

(3) 由于规定了定义域, 所求的点位较为实用。

## 边角观测精度最佳配合

### (一) 边角全测网

由于观测了全部边长和方向，增加了多余观测量。因此，应该以边角观测是否对提高精度均有效益来衡量边角观测精度的配合。不仅测边精度稍作改变时对网的精度有较大影响，同时要求与之配合的测方向精度稍作改变时对网的精度也有较大影响，这就是测边与测方向两种观测值“同等精度增益”的原则。

如果不遵守“同等精度增益”原则，就会出现一种观测值对网的精度起决定性作用，而另一种观测值显得无足轻重，造成工作量上的浪费。

边角全测网的平差，是对边长、方向观测值进行整体平差，它与测边网、测角网分别单独平差的关系，在权系数阵方面：

$$Q_x = (Q_{x(s)}^{-1} + Q_{x(\gamma)})^{-1}, \quad (16)$$

式中三个  $Q_x$  依次为边角全测网、测边网、测角网的权系数阵。

式(16)通常难于继续推演。仅当各权系数阵为对角阵（例如以起始边为底的等腰三角形并以等权观测）时，才有

$$Q_x = Q_{x(s)} Q_{x(\gamma)} (Q_{x(s)} + Q_{x(\gamma)})^{-1},$$

其元素为

$$q_{x(i)} = \frac{q_{x(s)i} q_{x(\gamma)i}}{q_{x(s)i} + q_{x(\gamma)i}}, \quad (17)$$

此即加权平均公式。它是式(16)的特例即相关系数为零的情况。因此，可以把式(16)称为“相关加权平均”，以说明整体平差与个别平差的关系。

对于式(17)，为了使参与加权平均的各方有同等的精度增益，显然应该

$$q_{x(s)i} = q_{x(\gamma)i}, \quad (18)$$

推广到式(16)，则应有

$$Q_{x(s)} = Q_{x(\gamma)}, \quad (19)$$

以参数的函数的权倒数  $Q_{F(s)}$ 、 $Q_{F(\gamma)}$  来说明“同等精度增益”原则，为

$$Q_{F(s)} = Q_{F(\gamma)} \quad (20)$$

即边角网分别按测边网和测角网求得的目标函数值相等时，该边角网的边角观测值具有同等精度增益，故为最佳配合。

由线性化后的函数式

$$f(X) = FX \quad (21)$$

以及

$$X = -Q_x A^T P l = \alpha^T l, \quad (22)$$

$$\alpha = -P A Q_x, \quad (23)$$

得

$$f(X) = F \alpha^T l. \quad (24)$$

由协方差传播律([4])，顾及  $l$  与  $L$  方差相同，可得

$$Q_F = F \alpha^T Q_L \alpha F^T, \quad (25)$$

如果为等权观测，并令方差因子为 1，有

$$Q_L = P^{-1} = m^2 E \quad (26)$$

式中  $m$  — 观测中误差，  $E$  — 单位阵。

代入式 (25)，得

$$Q_F = F \alpha^T \alpha F^T m^2 \quad . \quad (27)$$

对于测边网，当边长大致相等时，可近似地看作等精度观测，而得测边网平差时

$$Q_{F(s)} = k_s^2 m_s^2, \quad (28)$$

$$k_s^2 = F \alpha_s^T \alpha_s F^T \quad . \quad (29)$$

式中  $m_s$  为测边中误差。

对于等精度观测的测角网，

$$Q_{F(\gamma)} = k_\gamma^2 m_\gamma^2 \quad , \quad (30)$$

$$K_\gamma^2 = F \alpha_\gamma^T \alpha_\gamma F^T \quad . \quad (31)$$

将式 (28)、(30) 代入式 (20)，得

$$k_s m_s = k_\gamma m_\gamma \quad . \quad (32)$$

边角观测精度之比为

$$m_s : m_\gamma = k_\gamma : k_s \quad . \quad (33)$$

式 (33) 中的  $k_\gamma$  与  $k_s$ ，可以用试算来求得，即分别取  $m_s = 1 \text{ cm}$ ， $m_\gamma = 1''$ ，分别由式 (28)、(30) 得

$$k_s = \sqrt{Q_{F(s)}} \quad | \quad m_s = 1 \quad ,$$

$$k_\gamma = \sqrt{Q_{F(\gamma)}} \quad | \quad m_\gamma = 1 \quad .$$

以本文的方法，对图 5 的四种图形进行边角观测精度配配合计算。结果如表 2。

表 2

图号	目标函数	$k_\gamma$	$k_s$	$k_\gamma : k_s$	例 $m_s$ (厘米) : $m_\gamma$ (秒)
a	点 3 点位中误差	1.58	1.4	1.13	0.79 : 0.7
b	点 4 点位中误差	1.81	1.4	1.29	0.90 : 0.7
c	点 4 点位中误差	2.83	2.5	1.13	0.79 : 0.7
d	点 8 点位中误差	3.68	5.0	0.74	0.52 : 0.7

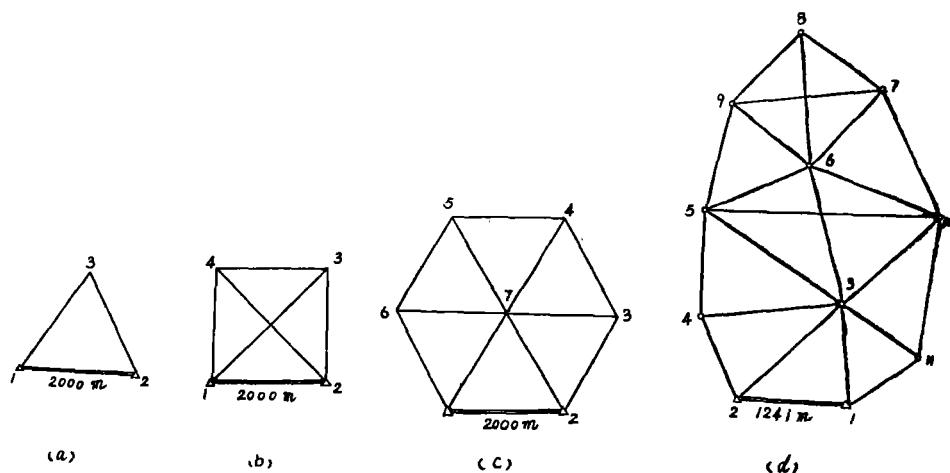


图 5

## (二) 测角网加测边长

测角网加测边长，是为了提高网的“纵向”（即由起始边出发的延伸方向）精度。图6所示的即为同一测角网加测边长前后的情况。图(a)为一 $m_\gamma = 0''.7$ 的测角网，图(b)为该网加测1—3、3—6、6—8三条边 ( $m_s = (0.5 + 10^{-8}s)$ 厘米)，二者的差异很显著。

现在，对图(b)改变加测边的精度，绘出点位误差及纵、横向误差变化曲线如图7。

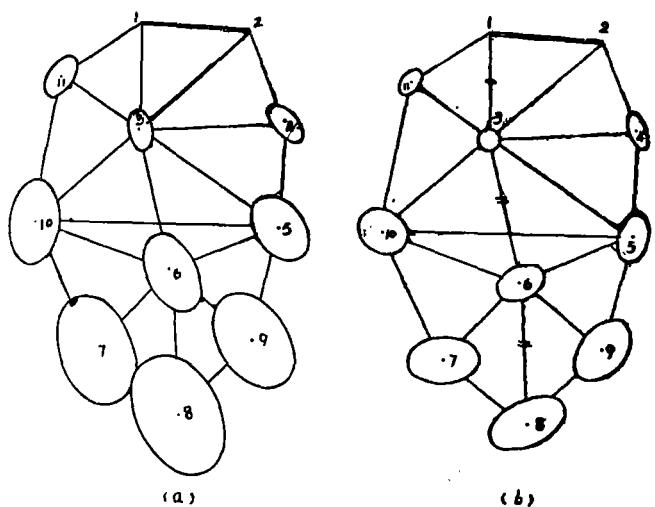


图 6

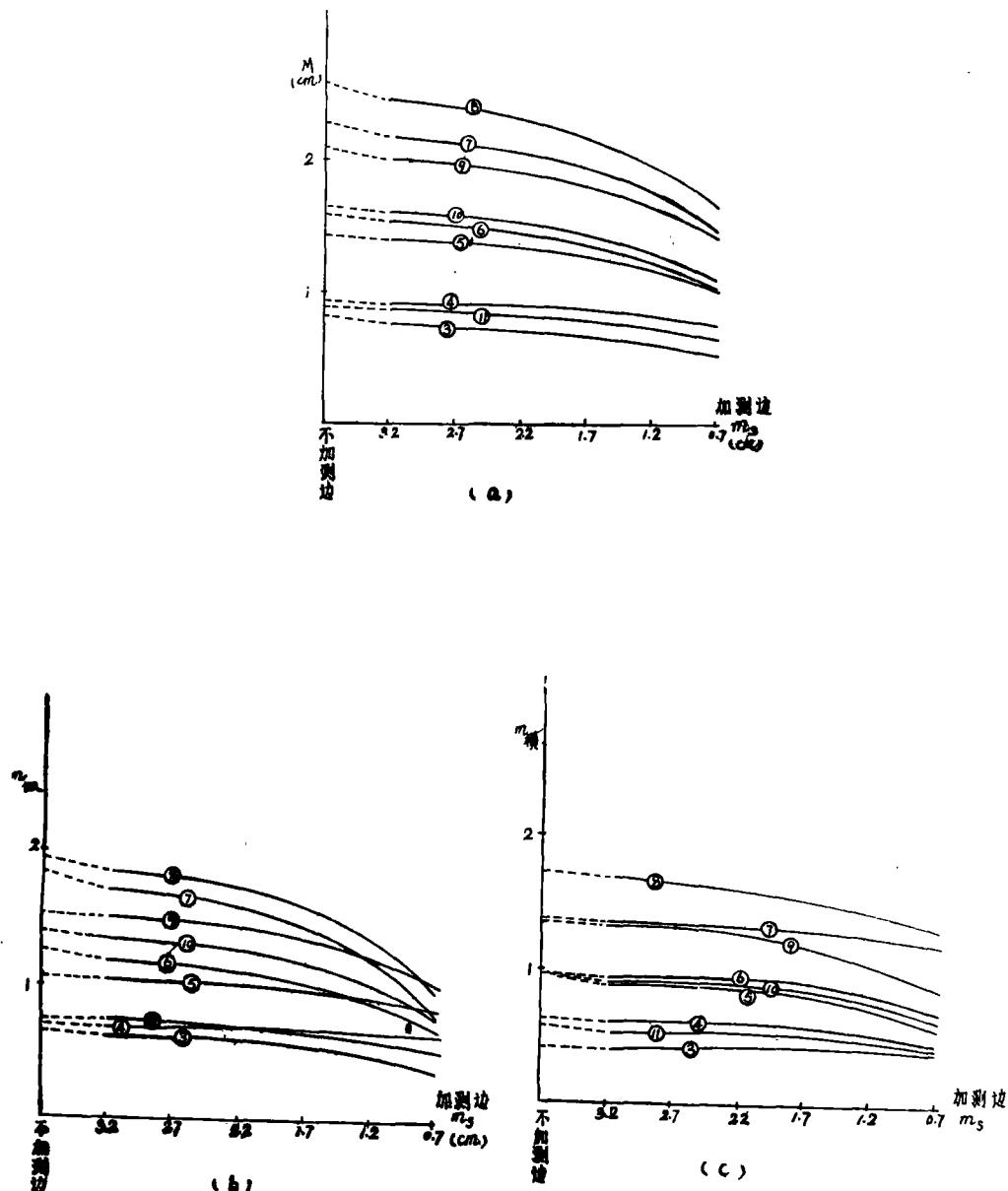


图 7

由图 7 可知：(1) 纵向精度改善趋势明显，说明加测边的精度选择应以一定点的纵向精度是否达到要求为目标。(2) 网中加测边长路线以外的点 7、9、10 等的精度获得同样的改善，说明在选择加测边路线时，不必迂回到所有的点。试算表明，应选择最少的边数，以直伸导线形式由起始边抵达指定点（或最弱点）。

现以网中指定点的纵向误差为目标函数，分析  $m_s$  与  $m_y$  的配合问题。

设对该点纵向误差要求为  $m_{纵}$ ，由测角网估算得  $m_{纵y}$ ，加测边长得  $m_{纵s}$ 。这里加测边数少，可忽略测边与测角平差的相关性，而取简单加权平均

$$m_{\text{纵}}^2 = \frac{m_{\text{纵},y}^2 + m_{\text{纵},s}^2}{m_{\text{纵},y}^2 - m_{\text{纵},s}^2}, \quad (34)$$

因而有

$$m_{\text{纵},s}^2 = \frac{m_{\text{纵},y}^2 - m_{\text{纵}}^2}{m_{\text{纵},y}^2 - m_{\text{纵}}^2}. \quad (35)$$

对于等边直伸导线（这里可近似认为），其终点纵向误差与测边中误差  $m_s$  关系为

$$m_{\text{纵},s}^2 = K m_s^2, \quad (36)$$

式中  $K$  为边数。

因此，为了使测角网中某点的纵向误差  $m_{\text{纵},y}$  在加测边长之后达到  $m_{\text{纵}}$ ，所加测的边长精度可由下式计算：

$$m_s = \sqrt{\frac{1}{K} \frac{m_{\text{纵},y}^2 - m_{\text{纵}}^2}{\sqrt{m_{\text{纵},y}^2 - m_{\text{纵}}^2}}}. \quad (37)$$

例如，由图 6 (a) 估算点 8 的  $m_{\text{纵},y} = 2.02$  厘米，欲使其降至  $m_{\text{纵}} = 1.4$  厘米，按图 (b) 加测三边，代入式 (37) 算得  $m_s = 1.1$  厘米。从图 7 (b) 上可量取得相同的结果。

### （三）测边网加测方向（角度）

与上节类似，可以举出图 8 的例子，其所示分别为加测方向前后的测边网。当  $m_y$  取不同值时，绘出与图 7 含义相同的曲线（图 9）。

由图可见：(1) 横向精度提高显著，故应以横向精度为目标函数；(2) 选择直伸导线的路线为宜。

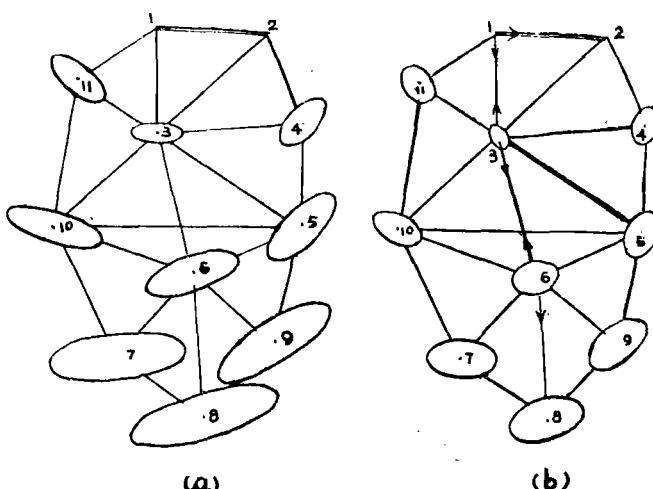


图 8

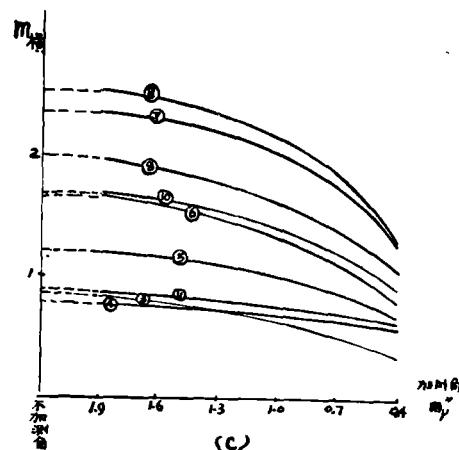
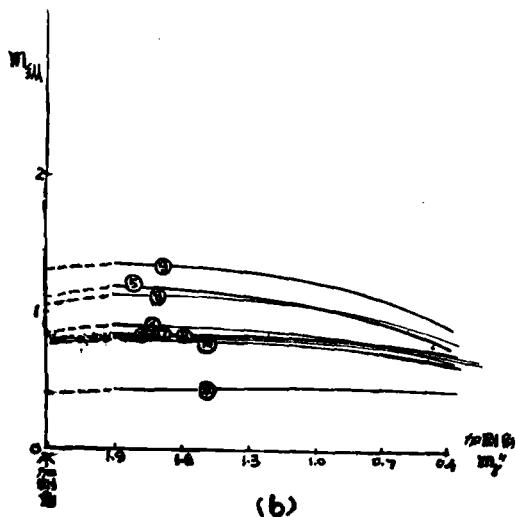
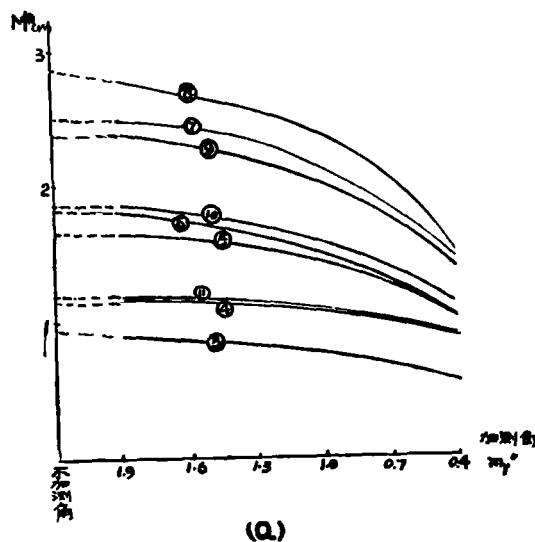


图 9

类似式 (35)，这里有

$$m_{\text{横}y}^2 = \frac{m_{\text{横}s}^2 m_{\text{横}}^2}{m_{\text{横}s}^2 - m_{\text{横}}^2} \quad . \quad (38)$$

而等边直伸导线端点横向误差估算公式为

$$m_{\text{横}y}^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) \bar{S}^2}{3\rho^2} m_y^2 \quad , \quad (39)$$

式中  $k$  —— 加测角数,  $\bar{S}$  —— 平均边长。

因此得出测边网加测方向的精度应为:

$$m_{\gamma} = \sqrt{\frac{3}{k(k+1)(2k+1)}} \cdot \frac{m_{\text{横}} s}{\sqrt{m_{\text{横}}^2 - m_{\text{横}}^2}} \cdot \frac{\rho''}{\bar{S}} , \quad (40)$$

若加测角度, 则测角精度为

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}} \cdot \frac{m_{\text{横}} s}{\sqrt{m_{\text{横}}^2 - m_{\text{横}}^2}} \cdot \frac{\rho''}{\bar{S}} \quad (41)$$

例如, 由图 8(a)估算点 8 的  $m_{\text{横}} = 2.56$  厘米, 欲使其降至  $m_{\text{横}} = 1.8$  厘米, 测角数 3,

$\bar{S} = 1400$  米, 求得  $m_{\gamma} = 0''.7$  或  $m_{\beta} = 1''$ 。

本文所提供的计算边角观测精度配合的公式, 与目前所通用的公式即

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{\gamma}}{\rho} \quad (42)$$

相比较, 区别在于: 式(42)仅考虑边长  $S$  影响, 而对于网形的差异不能反映出来。至于工程测量控制网对点位精度的特殊要求, 式(42)是无法解决的; 而这些都是工测控制网设计所可能遇到的问题。因此本文的方法更为准确可靠。

### 观测权分配最优化

观测权分配, 即不等权观测问题, 其目的有二:

(一) 在满足设计的精度要求前提下, 争取观测工作量最小;

(二) 在工作量一定时, 争取设计要求精度较高的部分有最好的精度。

以往这两个问题是分别处理的, 推导出各自的计算公式(例如[1]、[3])。本文将它们作为一个问题来解决, 因为它们的实质是一样的, 都是观测权分配最优化。

由式(25), 展开得

$$\begin{aligned} Q_F &= F \alpha^T P^{-1} \alpha F^T \\ &= (f_1 f_2 \cdots f_t) \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1t} \\ \vdots \\ \alpha_{1t} \cdots \alpha_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & p_n^{-1} \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1t} \\ \vdots \\ \alpha_{1t} \cdots \alpha_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t f_i f_k \alpha_{ij} \alpha_{ik} p_j^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

令

$$b_j = \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^t f_i f_k \alpha_{ij} \alpha_{ik}, \quad (44)$$

则有

$$Q_F = \sum_{j=1}^n b_j p_j^{-1}, \quad (45)$$

附加条件

$$\sum_{j=1}^n P_j = C \text{ (常数)} , \quad (46)$$

求极值

$$Q_F = \min. \quad (47)$$

用拉格朗日求条件极值方法解得

$$P_j = \frac{\sqrt{b_j}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}} C, \quad (48)$$

令

$$\rho_j = \frac{\sqrt{b_j}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}}, \quad (49)$$

显然有

$$\sum_{j=1}^n \rho_j = 1 \quad (50)$$

$$P_j = \rho_j C \quad (51)$$

由式(46)知道,  $C$  为权总和, 故式(51)表示观测权按  $\rho_j$  的比例重新分配。而按  $\rho_j$  分配后的权可以满足式(47)。顾及式(43)、(51), 有

$$Q_F = F \alpha^T \rho^{-1} \alpha F^T \frac{1}{C} = \min, \quad (52)$$

但  $C$  为常数, 故必有

$$F \alpha^T \rho^{-1} \alpha F^T = \min. \quad (53)$$

这就是  $\rho$  的作用, 它使式(53)能够成立。而当  $Q_F$  为常数时, 亦有

$$C = F \alpha^T \rho^{-1} \alpha F^T \frac{1}{Q_F} = \min. \quad (54)$$

式(54)、(52)就分别回答了本节开头所提出的两个问题。解决问题的途径都是求出权分配比例  $\rho$ 。其方法是:

(1) 计算权分配比例  $\rho$ ;

(2) 对于问题(一), 按式(54)求最小工作量  $C$ ; 问题(二)则已经给出  $C$ ;

(3) 按式(51)计算各观测值的权。

由于  $b_j$  本身与  $P_j$  有关, 故在以式(49)计算  $\rho_j$  时, 需以逐渐趋近来进行。其迭代程序如:

(1) 令  $C = n$ ,  $\rho_j^{(0)} = \frac{1}{n}$ ;

(2) 计算

$$P_j = \rho_j C,$$

$$Q_x = (A^T P A)^{-1},$$

$$\alpha = -P A Q_x,$$

$$Q_F = F \alpha^T P^{-1} \alpha F^T.$$

## (3) 计算

$$b_j = \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^t f_i f_k \alpha_{j+k}$$

## (4) 求出

$$\rho_j = \frac{\sqrt{b_j}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}}$$

(5) 重复步骤(2)、(3)、(4)，直至第*l*次迭代满足

$$|Q_F^{(l)} - Q_F^{(l-1)}| \leq \varepsilon, \quad (55)$$

式中  $\varepsilon$  —— 限差。

计算框图见图10。

应该指出，由于目前测量技术的限制，观测精度不可能总是满足式(51)所提出的要求；而另一方面，对于网中的各观测元素，一般应有最起码的观测精度。这样，在按上述最佳权分配比例制订观测方案时，尚需根据实际情况对过大或过小的比例作适当的调整。

例如，对图3所示的（未进行网形优化）测边网以点5、6、7、8四点的点位误差之和为目标函数，

$$Q_F = m_5^2 + m_6^2 + m_7^2 + m_8^2,$$

计算权分配比如表3。

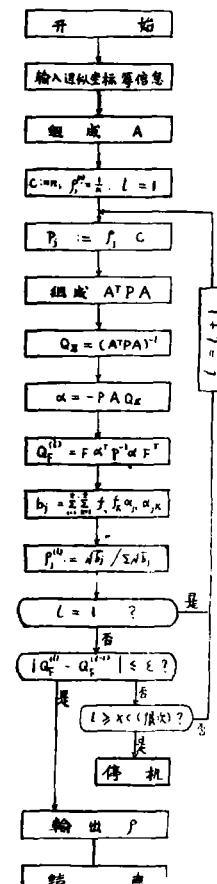


图10

表 3

边号	边长 S	分配比例 $\rho_i$	边号	边长 S	分配比例 $\rho_i$
1—5	1579.4	0.1995	5—7	1941.6	0.1106
1—7	2805.7	0.1189	5—8	1618.1	0.0822
1—8	1676.2	0.0905	6—7	1186.7	0.0224
1—9	1621.6	0.0007	7—8	1310.4	0.0212
2—3	1048.8	0.0322	7—11	1270.2	0.0008
2—5	1074.6	0.1724	8—9	1242.5	0.0006
3—4	1241.0	0.0274	8—10	1520.2	0.0006
3—5	1149.2	0.0184	8—11	1179.8	0.0007
4—5	1645.2	0.0261	9—10	1097.9	0.0005
4—6	1081.5	0.0202	9—11	1768.9	0.0004
5—6	1653.3	0.0532	10—11	1147.9	0.0005

等权观测与不等权观测时  $Q_F$  比较(表4):

表 4

点 号	等 权 观 测	不 等 权 观 测	较 差
5	0.49	0.14	0.35
6	2.04	1.34	0.70
7	1.69	0.78	0.91
8	0.91	0.45	0.46
$Q_F$	5.13	2.71	2.42

计算表明, 6—7, 7—8二边的权分配比例不如设想的那么大, 但在直观上, 为了提高点6、7、8的精度, 似应赋予与5—6、5—7、5—8等边相同的权。可见不用数学的方法, 是难以准确地解决这类问题的。

### 结 束 语

本文所研究的方法可供一般的水利、桥梁、企业、矿山建设的工程测量控制网设计借鉴。但这些方法还有待进一步完善。

工程测量控制网最优化设计的内容十分丰富, 如能在我国的生产实践中广泛应用, 必将产生良好的经济效果。

### 参 考 文 献

- [1] 李青岳: 工程测量专用控制网的最优化问题 武测资料 1979, 2
- [2] 数学手册编写组: 《数学手册》
- [3] З.П. ТАМУТИС «Оптимальные методы проектирования геодезических сетей»
- [4] 崔希璋等: 《广义测量平差》武汉测绘学院 1978

## Some Problems in Optimum Design of Engineering Surveying Control Nets

Peng Xianjin

### Abstract

In this paper some problems in optimum design of engineering surveying control nets are studied;

1. Optimization of net form All control points are divided into two kinds. The second kind of points which has certain ranges of selection is selected by the optimum seeking method.

2. Optimum coordination between the precision of observations of sides and angles  
The optimum coordination is discussed separately for the case of triangulation-trilateration net, triangulation net with observing some sides and trilateration net with observing some directions (or angles).

3. Optimization of the distribution of observation weights This problem is solved by seeking the optimum proportion of weights distribution.