DOI:10.13203/j.whugis1981.01.009

关于用伪观测法作亏秩平差的一点看法

吕 言　　陈纪椿

【提要】：本文系80年5月西德W. Welsch教授来华讲学期间的学习心得体会。阐述了利用广义逆作亏秩平差的理论，并针对原文中要求伪观测方程系数矩阵B须满足$\begin{cases}AB^T=0\\BB^T=I\end{cases}$提出并从数学上证明只需$\begin{cases}AB^T=0\\B\text{行满秩}\end{cases}$即可。即不用伪逆 $(A^TA)^+$，而仅用满足彭罗斯（Penrose）条件（1）（4）的广义逆便可实现亏秩情况下的最小有偏平差，从而使伪观测条件得以减弱。

亏秩平差[1]的数学模型及相应的法方程是：

$$Ax=L \tag{1}$$

$$A^TAx=A^TL \tag{2}$$

其中A为$n\times u$矩阵，x为u维列向量，L为n维列向量，秩$\{A\}=r=u-d$，n为观测数，u为独立未知数个数，d为亏秩数，其中包括数亏（例如无起始数据之自由网）及形亏（实际观测不足以确定图形）。

显然从（1）（2）式形式上看，为常规最小二乘法平差没有什么不同，但究其实质，后者之法方程组系数矩阵A^TA与满秩方阵，而亏秩平差的法方程组系数矩阵A^TA为降秩方阵，既为降秩，其常义逆$(A^TA)^{-1}$必不存在，那么在这种情况下如何进行平差呢？

我们知道，在常规最小二乘法平差中

$$\text{估值}\ \hat{x}=(A^TA)^{-1}A^TL$$

$$\hat{x}\text{的数学期望}\ E(\hat{x})=(A^TA)^{-1}A^TE(L)=(A^TA)^{-1}A^TAx=x$$

又由广义误差传播律有 $Q_{\hat{x}}=(A^TA)^{-1}A^TQ_{LL}A(A^TA)^{-1}=(A^TA)^{-1}$

式中$Q_{LL}^{-1}=P$，在我们这里的情况下为单位矩阵I。

可见，$\hat{x}$是x的无偏估计量，而且还可证明$\hat{x}$亦是x的一致、有效估计量[2][3]。也就是说，在常规最小二乘法平差中，$\hat{x}$是x的最优无偏估计量，且协因数阵$Q_{\hat{x}}$唯一。

但在亏秩平差中，$(A^TA)^{-1}$不复存在。按矩阵代数中之广义逆定义[4]，降秩方阵A^TA的逆为广义逆，记为$(A^TA)^-$，满足$(A^TA)(A^TA)^-(A^TA)=A^TA$。在一般情况下，$(A^TA)^-(A^TA)\neq I$，于是我们有

$$\hat{x}=(A^TA)^-A^TL$$

$$E(\hat{x})=(A^TA)^-A^TE(L)=(A^TA)^-A^TAx\neq x$$

$$Q_{\hat{x}}=(A^TA)^-A^TQ_{LL}A(A^TA)^-=(A^TA)^-(A^TA)(A^TA)^-$$

$$\because\ (A^TA)Q_{\hat{x}}(A^TA)=(A^TA)(A^TA)^-(A^TA)(A^TA)^-(A^TA)=(A^TA)(A^TA)^-(A^TA)=A^TA$$

∴按广义逆定义$Q_{\hat{x}}$是$(A^TA)^-$型逆，不唯一。

在这里$\hat{x}$成了不可估量，用以衡量$\hat{x}$精度的协因数阵$Q_{\hat{x}}$也不唯一，“平差”自然无从谈起。如何设法使亏秩情况下之$\hat{x}$成为无偏可估或最小有偏可估，且有唯一的$Q_{\hat{x}}$？除了通常采用的经典法外，近几年来又提出了利用$(A^TA)^+$，即穆尔—彭罗斯（Moore—Penrose）广义逆（或称伪逆）作最佳线性最小有偏估计（BLIMBE）的伪观测法[1]。此法之基本思想是在原观测方程基础上加进虚拟观测方程，使其组合后构成之法方程系数阵为满秩方阵。伪观测值法的数学模型及相应的法方程为：

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$(A^TA + B^TB)\ x = A^TL \tag{4}$$

式中B为$d\times u$虚拟观测值系数矩阵，(A^TA+B^TB)为满秩可逆方阵。

根据文献〔1〕,为了实现最小有偏平差,须利用满足彭罗斯四个条件[4]的伪逆$(A^TA)^+$，意即在满足$\overline{Q}=(A^TA+B^TB)^{-1}-B^TB=Q-B^TB=(A^TA)^+$的条件下来构造虚拟观测系数阵B（请注意本文Q的定义：$Q=(A^TA+B^TB)^{-1}$），则B必须满足：

$$\begin{cases} AB^T = 0 \\ BB^T = I \end{cases} \tag{5*}$$

可以证明，在此条件下$\overline{Q}=(A^TA+B^TB)^{-1}-B^TB=Q-B^TB=(A^TA)^+$：

$$\because\quad I=Q(A^TA+B^TB),\ B^T=QA^TAB^T+QB^TBB^T=QB^T,\ B=BQ$$

$$QA^TA=I-QB^TB=I-B^TB=(A^TA+B^TB)Q-B^TB=A^TAQ$$

∴　$\overline{Q}$满足彭罗斯全部四个条件：

1、$A^TA\overline{Q}A^TA=A^TA(Q-B^TB)A^TA=A^TAQA^TA=A^TA(I-B^TB)=A^TA$；

2、$\overline{Q}A^TA\overline{Q}=(Q-B^TB)A^TA(Q-B^TB)=QA^TAQ=(I-B^TB)\ Q=Q-B^TB=\overline{Q}$；

3；$(A^TA\overline{Q})^T=\overline{Q}A^TA=(Q-B^TB)A^TA=QA^TA=A^TAQ=A^TA(\overline{Q}+B^TB)=A^TA\overline{Q}$；

4、$(\overline{Q}A^TA)^T=A^TA\overline{Q}=A^TA(Q-B^TB)=A^TAQ=Q\ A^TA=\overline{Q}A^TA$。

由方程（4）有　$\hat{x}=QA^TL=(\overline{Q}+B^TB)A^TL=\overline{Q}A^TL=(A^TA)^+A^TL$

再由广义误差传播律：　$Q_{\hat{x}}=\overline{Q}A^TA\overline{Q}=\overline{Q}=(A^TA)^+$是唯一的

故可实现最小有偏平差。

问题在于是否非利用$(A^TA)^+$不可呢？回答是否定的。下面我们拟从不同角度用数学推导的方法加以论证。为便于说明问题，让我们先来讨论何谓最小有偏？

我们知道，平差模型观测方程是一矛盾方程组，而相应的法方程则是一相容方程组。进行平差的目的就是要求观测方程组的最小二乘解，即等价于求其法方程组的真解。在常规平差中，法方程系数阵A^TA为满秩矩阵，存在唯一的常义逆$(A^TA)^{-1}$。如前所述，其解$\hat{x}$为x的最优无偏估值，$Q_{\hat{x}}$唯一。但在亏秩情况下。$(A^TA)^{-1}$不存在。矛盾方程组（1）的最

小二乘解即相容方程组（2）的真解不唯一。但可以证明[4]，方程（1）的极小最小二乘解即方程（2）的最小范数解存在且唯一。因此在亏秩情况下，求观测方程的极小最小二乘解，虽然不再象满秩情况下能得到最优无偏估值，而是有偏估值，但却是最小有偏。综上所述，所谓最小有偏平差，就是求矛盾方程组（观测方程）（1）的极小最小二乘解，或称最小范数最小二乘解，也就是求相容方程组（法方程）（2）的最小范数解。从线性代数[4]知，$x=(A^TA)^-A^TL$ 是方程（2）的最小范数解的充分必要条件是 $(A^TA)^-$ 为满足彭罗斯条件（1）（4）的广义逆，记作 $(A^TA)\{1,4\}$。于是我们自然想到，不用 $(A^TA)^+$ 而用 $(A^TA)\{1,4\}$ 是否可以实现最小有偏平差呢？下面就从四个方面来证明在伪观测法中用 $(A^TA)\{1,4\}$ 与用 $(A^TA)^+$ 可得到完全相同的结果，从而提出伪观测法的最弱附加条件为：

$$\left\{\begin{array}{l} A^TB=0 \\ B\text{行满秩} \qquad (B\text{为}d\times u\text{矩阵}) \end{array}\right. \tag{5}$$

以下证明均以此为条件，不再另行说明。（在条件（5）下 (A^TA+B^TB) 为满秩方阵的推证见本文（二））

（一）求方程（2）的最小范数解只须用 $Q=(A^TA+B^TB)^{-1}$

如前所述，矛盾方程（1）的极小最小二乘解就是相容方程（2）的最小范数解，是唯一存在的；$x=(A^TA)^-A^TL$ 为相容方程（2）的最小范数解的充分必要条件是 $(A^TA)^-\in A^TA$ 1,4}，而 $Q=(A^TA+B^TB)^{-1}$ 正是满足彭罗斯条件（1）(4）的广义逆，即 $Q\in A^TA\{1,4\}$，所以 $x=QA^TL$ 就是方程 $A^TAx=A^TL$ 的最小范数解，也即方程（1）的极小最小二乘解。

实际上，$Q\in A^TA\{1,3,4\}$，证明如下：

$\because\ I=Q(A^TA+B^TB)$，$B^T=QA^TAB^T+QB^TBB^T=QB^TBB^T$

$$\therefore\left\{\begin{array}{l} QA^TA=I-QB^TB \\ QB^T=B^T(BB^T)^{-1},\quad BQ=(BB^T)^{-1}B \end{array}\right. \tag{6}$$

$\therefore$ 1、$A^TAQA^TA=A^TA(I-QB^TB)=A^TA(I-B^T(BB^T)^{-1}B)=A^TA$

3、$(A^TAQ)^T=QA^TA=I-QB^TB=I-B^TB(BB^T)^{-1}B=(I-B^T(BB^T)^{-1}B)^T=(QA^TA)^T=A^TAQ$

4、$(QA^TA)^T=(I-QB^TB)^T=(I-B^T(BB^T)^{-1}B)^T=I-B^T(BB^T)^{-1}B=I-QB^TB=QA^TA$

$\therefore\ Q\in A^TA\{1,3,4\}$　这里我们只需用 $Q\in A^TA\{1,4\}$ 就够了。

所以对相容方程 $A^TAx=A^TL$ 来说，$x=QA^TL$ 就是它的最小范数解，必然是唯一的。另一方面。我们注意到，由方程（4）：

$$(A^TA+B^TB)x=A^TL \quad \text{其存在唯一真解为:}$$
$$x=(A^TA+B^TB)^{-1}A^TL=QA^TL$$

也就是说，伪观测法的法方程（4）的真解，就是亏秩平差法方程（2）的最小范数解，也即亏秩平差观测方程(1)的极小最小二乘解，求其解只须用到 $Q\in A^TA\{1,4\}$，无须利用 $(A^TA)^+$，而 $A^TA\{1,4\}$ 由条件（5）导出，$(A^TA)^+$ 由条件（5*）导出，所以伪观测方程系数矩阵 B 只须满足条件（5）而无须满足（5*）。

（二）$\hat{x}$，$Q_{\hat{x}}$ 的表达式由 A 唯一确定，与 B 无关

这里要用到豪斯霍德（Householder）变换[6]，在我们的情况下可叙述为：——对于

u×n 矩阵 A^T，秩$\{A^T\}=u-d$，$n\geqslant u-d$，必定存在正交矩阵 H^T，使 $H^TA^T=\begin{pmatrix}A_1^T\\ O\end{pmatrix}$，这种变换即称为豪斯霍德变换。其中 A_1^T 是 $(u-d)\times n$ 矩阵，秩$\{A_1^T\}=u-d$，O 是 $d\times n$ 零矩阵。将其转置后可得 $AH=(A_1,O)$。这就是说，任一列不满秩矩阵 A 都可通过豪斯霍德变换化为列满秩矩阵 A_1 和零矩阵 O 之组合。

又设 $BH=(B_1,B_2)$，其中 B_1 为 $d\times(u-d)$ 矩阵，B_2 为 d 阶方阵。由于 H^T 为正交矩阵，即 $HH^T=H^TH=I$，故有：

$$AB^T=AHH^TB^T=(A_1,O)\begin{pmatrix}B_1^T\\ B_2^T\end{pmatrix}$$

$$\because\quad AB^T=0$$

$$\therefore\quad A_1B_1^T=0\quad,\quad A_1^TA_1B_1^T=0$$

又 A_1 为列满秩矩阵，即 $\det(A_1^TA_1)\neq 0$，故必 $B_1^T=0$

$$\therefore\quad BH=(0,B_2)$$

由条件（5）知 B 为行满秩阵，故 B_2 为d 阶满秩方阵。

另有　$H^TQH=H^T(A^TA+B^TB)^{-1}H=(H^TA^TAH+H^TB^TBH)^{-1}=$

$$=\begin{pmatrix}A_1^TA_1 & \\ & B_2^TB_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & (B_2^TB_2)^{-1}\end{pmatrix}$$

其中 $A_1^TA_1$ 和 $B_2^TB_2$ 均为满秩方阵，故 Q 必满秩。

$$\therefore\quad \hat{x}=QA^TL=HH^TQHH^TA^TL=H\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & (B_2^TB_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^T\\ O\end{pmatrix}L=$$

$$=H\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1}A_1^TL\\ O\end{pmatrix}$$

由广义误差传播律：$Q_{\hat{x}}=QA^TAQ=HH^TQHH^TA^TAHH^TQHH^T=$

$$=H\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & (B_2^TB_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^TA_1 & \\ & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & (B^TB_2)^{-1}\end{pmatrix}H^T$$

$$=H\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & O\end{pmatrix}H^T$$

可见，在满足（5）的条件下，$\hat{x}$，$Q_{\hat{x}}$ 与 B完全无关，仅由 A 唯一确定，而 H 的引进仅仅是证明问题的一种手段，不会对 $\hat{x}$，$Q_{\hat{x}}$ 产生影响。

下面我们顺便推导一下矩阵 $Q_{\hat{x}}$ 之迹 $tr\{Q_{\hat{x}}\}$ [1] 的表达式。

由　$$tr\{Q_{\hat{x}}\}=tr\left\{H\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & O\end{pmatrix}H^T\right\}=tr\left\{H^TH\begin{pmatrix}(A_1^TA_1)^{-1} & \\ & O\end{pmatrix}\right\}$$

$$=tr\{(A_1^TA_1)^{-1}\}^*$$

将特征方程 $|(A_1^TA_1)^{-1}-\lambda I|=0$ 展开后引用韦达定理可知 $tr\{(A_1^TA_1)^{-1}\}$ 等于 $(A_1^TA_1)^{-1}$ 诸

* 这里用到矩阵求迹的一个性质：$tr\{AB\}=tr\{BA\}$，其中 A、B 分别为 $m\times n$，$n\times m$ 矩阵

特征值之和[5]。

设λ为$(A_1^TA_1)^{-1}$的特征值，即有$(A_1^TA_1)^{-1}\xi=\lambda\xi$（$\xi$为属于$\lambda$的特征向量），则可得$(A_1^TA_1)\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$，故$\frac{1}{\lambda}$为$A_1^TA$的特征值，所以$(A_1^TA_1)^{-1}$的特征值是$A_1^TA_1$相应特征值的倒数。

再考虑相拟变换$H^T(A^TA)H=\begin{pmatrix}A_1^TA_1 & \\ & O\end{pmatrix}$，即$(A^TA)$与$\begin{pmatrix}A_1^TA_1 & \\ & O\end{pmatrix}$相似，而相似矩阵具有相同的特征值。又$\det(A_1^TA_1)\neq 0$，故$A^TA$中所有非零特征值即为$A_1^TA_1$之特征值，所以$tr\{Q_{\hat{x}}\}$等于$A^TA$中所有非零特征值倒数之和，是一个完全由A所确定的数值，并不随B的不同而变化。

（三）QA^T为$A\{1,2,3,4\}$，即$QA^T=A^+$，且$x=A^+L$　$Q_{\hat{x}}=A^+(A^+)^T$

现在我们再从A^+的唯一性出发，推证x与$Q_{\hat{x}}$的唯一性。

考虑$Q=(A^TA+B^TB)^{-1}$，因为B满足条件（5），（并不要求$BB^T=I$），所以B^TB不唯一，Q也不唯一，但有趣的是QA^T却是唯一的，即有$QA^T=A^+$，从而$\hat{x}$，$Q_{\hat{x}}$均随之唯一确定，现证明如下：

由（5）、(6）有：

1、$A(QA^T)A=A(I-QB^TB)=A-AQB^TB=A-AB^T(BB^T)^{-1}B=A$

2、$(QA^T)A(QA^T)=(I-QB^TB)(QA^T)=QA^T-QB^TBQA^T=$
$$=QA^T-QB^T(BB^T)^{-1}BA^T=QA^T-QB^T(BB^T)^{-1}(AB^T)^T=QA^T$$

3、$(AQA^T)^T=AQA^T$

4、$(QA^TA)^T=(I-QB^TB)^T=(I-B^T(BB^T)^{-1}B)^T=$
$$=I-B^T(BB^T)^{-1}B=I-QB^TB=QA^TA$$

以上四式正是彭罗斯广义逆的四个条件，故QA^T是A的穆尔—彭罗斯逆A^+，即$QA^T=A^+$。

于是，$\hat{x}$和$Q_{\hat{x}}$可表示为：

$$\hat{x}=QA^TL=A^+L$$
$$Q_{\hat{x}}=QA^TAQ=A^+(A^+)^T$$

根据A^+的唯一性，立即可知$\hat{x}$、$Q_{\hat{x}}$是由A所唯一确定的，故仅用$A^TA\{1,4\}$即可实现最小有偏平差；并且由推导过程可知，我们除$AB^T=0$及B满秩之外，并未用到其他任何条件，所以对于伪观测方程$Bx=0$，要求$BB^T=I$是不必要的。

（四）条件（5）与（5*）对模型（3）的等价性

下面我们再从另外一个角度来证明，根据条件$\begin{cases}AB^T=0\\ B\text{行满秩}\end{cases}$（5）和条件$\begin{cases}AB^T=0\\ BB^T=I\end{cases}$（5*），对模型（3）所作的平差结果完全一致。

这里要用到矩阵的格拉姆—施密特（Gramm—Schmidt）正交化[6]——即对于行满秩矩阵B，可以构造出一个满秩方阵S（通常为三角阵），使SB的各个行向量均为单位向量，并且彼此正交，即 $(SB)(SB)^T = I$。换句话说，一组线性无关的向量组可通过格拉姆—施密特正交化变成一组单位正交向量组。

记 $SB = B_0$，于是有：

$$AB_0^T = AB^TS^T = 0，且 B_0B_0^T = I。即$$

$$\begin{cases} AB^T = 0 \\ B行满秩 \end{cases} \xrightarrow{格拉姆—施密特正交化} \begin{cases} AB_0^T = 0 \\ B_0B_0^T = I \end{cases}$$

通常，平差模型的观测方程两端不能乘以一个非正交矩阵。但从下面的证明可知，若将伪观测方程 $Bx = 0$ 两端乘以一个满秩矩阵S（不必是正交矩阵），使之变成 $B_0x = 0$；亦即将模型（3）两端乘以矩阵 $\begin{pmatrix} E & \\ & S \end{pmatrix}$，使之变为 $\begin{pmatrix} A \\ B_0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix}$（3*），并不会影响平差的结果。

考虑模型（3）：$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix}$ 可写成：

$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} HH^T x = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix}$，其中H是豪斯霍德变换矩阵；由（二）可知，$AH = (A_1, O)$；

$BH = (O, B_2)$，故可得：

$$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix} \quad 即 \quad \begin{cases} A_1y_1 = L \\ B_2y_2 = 0 \end{cases};$$

其中 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y = H^Tx$

又 B_2 是d阶满秩方阵，故以上方程可化为：

$$\begin{cases} A_1y_1 = L \\ y_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

于是模型（3）的最小二乘解x可由方程（7）的最小二乘解通过正交变换 $x = H^Ty$ 得到。

再考虑模型（3*）：$\begin{pmatrix} A \\ SB \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix}$，同样由：

$$\begin{pmatrix} A \\ SB \end{pmatrix} HH^T x = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix} \quad 可得 \quad \begin{pmatrix} A_1 & \\ & SB_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix}，即$$

$$\begin{cases} A_1y_1 = L \\ SB_2y_2 = 0 \end{cases}，同样有 \begin{cases} A_1y_1 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

与方程（7）完全相同。

这就是说，模型（3）和（3*）的平差结果是完全一致的，这就从另外一个角度证明了对于伪观测模型（3）来说，由于条件（5）和（5*）是等价的，故 $BB^T=I$ 并非必要条件。

至此已足以说明在亏秩平差中仅用 $Q\in A^TA\{1,4\}$，而不必用 $\overline{Q}=(A^TA)^+$，亦即 B 只须满足条件（5），即可实现最小有偏平差。

最后，我们在以上论证的基础上，再从理论上探讨一下有关伪观测方程的设计问题。

首先需要证明一下条件 $AB^T=0$ 与 $A^TAB^T=0$ 的等价性。

由 $AB^T=0$ 导出 $A^TAB^T=0$ 是显然的；

又由 $A^TAB^T=0$，可得 $H^TA^TAHH^TB^T=0$，

即 $$\begin{pmatrix} A_1^TA_1 & \\ & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1^T \\ B_2^T \end{pmatrix}=0,$$ 或 $A_1^TA_1B_1^T=0$，

又 $\det(A_1^TA_1)\neq 0$，故必 $B_1^T=0$，

即 $$H^TB^T=\begin{pmatrix} O \\ B_2^T \end{pmatrix},$$

故 $$AB^T=AHH^TB^T=(A_1,O)\begin{pmatrix} O \\ B_2^T \end{pmatrix}=0$$

于是，$AB^T=0$ 与 $A^TAB^T=0$ 等价，即有以下关系：

$$AB^T=0 \Longleftrightarrow A^TAB^T=0$$

由 $A^TAB^T=0$ 可知，B^T 的列向量是矩阵 A^TA 的属于零特征值的特征向量，这就给出了一种通过求矩阵 A^TA 的特征向量来构造 B 的途径。

另外，我们考虑以下的方法：

首先，构造 A 的豪斯霍德变换矩阵 H，有 $AH=(A_1,O)$，再任取 d 阶满秩方阵 B_2（不妨就取单位矩阵），则 $B=(O,B_2)H^T$ 即为所求，其中 O 为 $d\times(u-d)$ 零矩阵。

由于 $AB^T=AH\begin{pmatrix} O \\ B_2^T \end{pmatrix}=(A_1,O)\begin{pmatrix} O \\ B_2^T \end{pmatrix}=0$，且 $\det(BB^T)=\det(B_2B_2^T)\neq 0$，故矩阵 B 完全满足条件（5）。

对于某些类型的无形亏平差问题（如测边网），其秩亏数可按其类型完全加以确定，故可设计出规范化的具有最简单形式的伪观测方程系数矩阵 B[1]。

参 考 文 献

〔1〕 Welsch.W: Some Techniques for monitoring and Analyzing Deformations and Control Nets 1980.

〔2〕 崔希璋等：广义测量平差 1979.

〔3〕 李庆海、陶本藻：数理统计在测量中的应用 1979。
〔4〕 南京大学：线性代数 1978。
〔5〕 北京大学：高等代数 1978。
〔6〕 冯康等：数值计算方法 1979。

Some Remarks on the Adjustment with Rank—Defects by Using Pseudo—Observations

Lü Yan Chen Jichun

Abstract

This paper is a study report after having attended the lectures by Prof. W. Welsch of West Germany, given at Wuhan in May 1980.

The theory of the adjustment with rank-defects by using the generalized inverse is discribed. while the coefficient matrix of the pseudo-observations equation must satisfy $AB^T = 0$ and $BB^T = I$ as is required in the above mentioned lectures, it is shown here in this article that only $AB^T = 0$ and rank $\underset{d,u}{\{B\}} = d$ is necessary. That is to say that, in order to realize the minimum biased adjustment in the case of rank defects, we need not use the pseudo-inverse $(A^T A)^+$ but may use the generalized inverse$(A^T A)^-$, which meets the Penrose conditions (1) and (4) only. Thus the conditions needed for the pseudo-observations can be reduced.