

# 多期复测水准网的动态平差\*

于正林

**[摘要]** 本文在[2]、[3]的基础上,提出了两种多期复测水准网的动态平差方案:①、附有速率参数 $\lambda$ 的线性运动模型下的动态平差;②、附有加速率参数 $\gamma$ 的非线性运动模型下的动态平差。并简述了这两种平差方案的选择原则及其对平差结果带来的差异。最后论述了水准网动态平差的几个重要特性。

随着水准网复测周期的日益增多,有必要在两期复测水准网动态平差的基础上,深入研究多期复测水准网的动态平差方案。

地壳垂直升降的运动规律如同一个物体的运动规律一样,在不同的情况下呈现多样性。一般而言,物体的运动模式可分为匀速直线运动和变速运动两大类。因此,我们研究地壳垂直升降的运动模式,也必须考察线性运动模型和非线性的运动模型。而多期复测水准资料给我们研究不同的运动模型提供了可能。

本文将在[2]、[3]的基础上,着重阐述多期复测水准网在线性运动模型下的动态平差以及在匀加速运动模型(非线性的运动模型之一)下的动态平差。

文中还简述了平差方案的选择原则,以及不同平差方案所引起平差结果的差异;最后论述了水准网动态平差的几个重要特性。

## 一、线性运动模型下的动态平差方案

线性运动模式下的动态平差数学模型

$$E(L) = B_x X + B_\lambda \lambda \quad (1.1)$$

式中 $X$ 是中心时刻 $T^0$ 时的水准点高程参数, $\lambda$ 是复测期间内的水准点高程速率参数, $B_x$ 、 $B_\lambda$ 为系数矩阵。

令  $X = X^0 + x$  ,

则  $E(L) = B_x x + B_\lambda \lambda + B_0$  ,  $(1.2)$

式中  $B_0 = B_x X^0$  。

若某一无起始数据的自由水准网,经过 $m$ 期重复观测后分别有观测值向量 $L_1, L_2, \dots, L_m$ ,则依据(1.2)式得第 $k$ 期观测值 $L_k$ 的误差方程式

$$V_k = B_{x_k} x + B_{\lambda_k} \lambda + l_k \quad \} , \quad (1.3)$$

或  $V_k = B_k y + l_k$

式中  $l_k = B_{x_k} X^0 - L_k$  ,

$$B_k = [B_{x_k} \quad B_{\lambda_k}] \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$$y^T = [x^T \quad \lambda^T] \quad .$$

\* 本文是研究生毕业论文的一部份,指导教师是崔希璋教授、於宗俦副教授、刘大杰讲师。

再由 (1.3) 式得  $m$  期观测值  $L^T = [L_1^T \ L_2^T \ \dots \ L_m^T]$  的总体误差方程式

$$V = By + l \quad . \quad (1.4)$$

对于第  $ij$  测段 (起点为  $i$  终点为  $j$ ) 的第  $k$  期高差观测值  $h_{ij_k}$ , 则有纯量形式的误差方程式 (参阅 [3] 中的 (10) 式)

$$v_{ij_k} = -x_i + x_j - \Delta t_{ij_k} \lambda_i + \Delta t_{ij_k} \lambda_j + l_{ij_k}, \quad (1.5)$$

### 1. $m$ 期复测水准网整体平差时的计算公式

由 (1.4) 式组成法方程

$$Ny + W = 0, \quad (1.6)$$

式中

$$\begin{aligned} N &= B^T P B \\ W &= B^T P l \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

因系数矩阵  $B$  是列亏秩阵, 且  $R(B) = 2t - 2$ , 所以  $\det(N) = 0$ , 故 (1.6) 式有最小范数解

$$y = -N^+ W \quad . \quad (1.7)$$

为上机解算之方便, 本文采用“伪观测值法”得一等价法方程式

$$(N + GG^T)y + W = 0, \quad (1.8)$$

解之得

$$y = -QW, \quad (1.9)$$

式中

$$Q = (N + GG^T)^{-1}$$

$$G^T = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \\ & 0 & & 1 & 1 & \cdots 1 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

解向量  $y$  的协因数阵

$$\begin{aligned} Q_y &= N^+ B^T P Q_{11} P B N^+ \\ &= N^+ N N^+ = N^+ \\ &= (N + GG^T)^{-1} - GG^T \quad . \end{aligned} \quad (1.11)$$

### 2. $m$ 期复测水准网分期逐次平差时的计算公式

设  $m = 3$ , 则由观测值  $L_1, L_2, L_3$  可得误差方程式

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \quad (1.12a)$$

由伪观测值  $L^*$  (又称虚拟观测值) 可得伪误差方程式

$$V^* = G^T y \quad . \quad (1.12b)$$

为推导公式之方便, 现设各期的观测向量  $L_1, L_2, L_3$  之间相互独立, 则有

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

上述假设对于多期复测水准网中的各期高差观测向量, 显然是成立的。

再令  $y = y_{1,2} + y_3$  , (1.14)

将 (1.12)、(1.13)、(1.14) 式代入 (1.8) 式, 略加整理得

$$\begin{aligned} & (N_1 + N_2 + GG^T) y_{1,2} + W_{1,2} \\ & + (N_1 + N_2 + N_3 + GG^T) y_3 + \tilde{W}_3 = 0 \end{aligned} , \quad (1.15)$$

式中

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= W_1 + W_2 \\ \tilde{W}_3 &= N_3 y_{1,2} + W_3 = B_3^T P_3 (B_3 y_{1,2} + l_3) = B_3^T P_3 \tilde{l}_3 \end{aligned} \quad , \quad (1.16)$$

由 (1.15) 式则得自由网分期逐次平差的法方程

$$\begin{aligned} \text{第1,2期:} \quad & (N_1 + N_2 + GG^T) y_{1,2} + W_{1,2} = 0 \\ \text{第3期:} \quad & (N_1 + N_2 + N_3 + GG^T) y_3 + \tilde{W}_3 = 0 \end{aligned} \quad \} , \quad (1.17)$$

它们各自的解

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= -Q_{1,2} W_{1,2} \\ y_3 &= -Q_3 \tilde{W}_3 \end{aligned} \quad , \quad (1.18)$$

式中

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= (N_1 + N_2 + GG^T)^{-1} \\ Q_3 &= (N_1 + N_2 + N_3 + GG^T)^{-1} \end{aligned} \quad . \quad (1.19)$$

解的最后结果

$$\begin{aligned} y &= y_{1,2} + y_3 \\ Q_y &= Q_3 - GG^T \end{aligned} \quad . \quad (1.20)$$

将 3 期逐次平差的计算公式加以推广, 就可得到当  $m$  期观测值向量  $L_1, \dots, L_m$  互不相关时, 复测水准网分期逐次平差的计算公式:

法方程式

$$\begin{aligned} \text{第1, 2期:} \quad & (N_1 + N_2 + GG^T) y_{1,2} + W_{1,2} = 0 \\ \text{第} k \text{期:} \quad & \left( \sum_{i=1}^k N_i + GG^T \right) y_k + \tilde{W}_k = 0 \\ \text{第} m \text{期:} \quad & \left( \sum_{i=1}^m N_i + GG^T \right) y_m + \tilde{W}_m = 0 \end{aligned} \quad , \quad (1.21)$$

式中

$$\begin{aligned} N_i &= B_i^T P_i B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \tilde{W}_k &= B_k^T P_k (B_k y_{1,2} + B_k y_3 + \dots + B_k y_{k-1} + l_k) \\ k &= 3, 4, \dots, m \end{aligned} \quad , \quad (1.22)$$

各自的解

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= -Q_{1,2} W_{1,2} \\ y_k &= -Q_k \tilde{W}_k \\ y_m &= -Q_m \tilde{W}_m \end{aligned} \quad , \quad (1.23)$$

式中

$$Q_k = \left( \sum_{i=1}^k N_i + GG^T \right)^{-1}, \quad k = 3, 4, \dots, m \quad (1.24)$$

解向量的最后结果

$$\left. \begin{aligned} y &= y_{1,2} + y_3 + \cdots + y_m \\ Q_y &= Q_m - G G^T \end{aligned} \right\} . \quad (1.25)$$

解的性质

1)  $y$  是整体平差法方程式  $Ny + w = 0$  的最小范数解, 又是平差数学模型  $L = By + B_0$  的最小二乘最小范数解;

2)  $Q_y$  是整体平差法方程式系数矩阵  $N$  的 Moore—Penrose 广义逆, 记作  $N^+$ ;

单位权方差  $\sigma^2$  的估值

$$\sigma_0^2 = V^T P V / (n - 2t + 2) , \quad (1.26)$$

式中  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ , 即  $m$  期高差观测值的总个数。可以证明,  $V^T P V$  也可在分期逐次平差中计算。

### 3. 复测水准网相关逐次平差时的计算公式

该法的基本思想是将前一次平差的解向量  $y_{k-1}$ , 当作一组虚拟观测值  $L_{k-1}^*$  (实际上, 它是  $L_1, \dots, L_{k-1}$  的线性函数), 列出其相应的虚拟误差方程式, 再与第  $k$  期误差方程式联列, 组成法方程, 使其解向量与整体平差的解向量相同。

仅以 3 期为例。

将第 1, 2 期整体平差后得到的解向量  $y_{1,2}$ , 当作一组虚拟的观测值向量  $L_{y_{1,2}}^*$ , 则有相应的虚拟误差方程式

$$V_{y_{1,2}}^* = y - y_{1,2} , \quad (1.27)$$

再与第 3 期的误差方程式

$$V_3 = B_3 y + l_3$$

联列, 得法方程式

$$(N_3 + P_{y_{1,2}}) y + \bar{W}_3 = 0 \quad (1.28)$$

$$N_3 = B_3^T P_3 B_3 \quad \left. \right\} \quad (1.29)$$

$$\bar{W}_3 = W_3 - P_{y_{1,2}} y_{1,2}$$

$P_{y_{1,2}}$  是虚拟观测值  $L_{y_{1,2}}^*$  的权矩阵, 因为

$$L_{y_{1,2}}^* = y_{1,2}$$

$$Q_{y_{1,2}} = N_{1,2}^+ = Q_{1,2} - G G^T$$

所以有

$$P_{y_{1,2}} = Q_{y_{1,2}}^+ \quad (1.30)$$

容易知道 (1.28) 式与 3 期整体平差时的法方程  $Ny + W = 0$  等价。

由于  $P_{y_{1,2}}$  在一般情况下是非对角阵, 所以  $L_{y_{1,2}}^*$  是一组相关观测值。故称此法为多期复测水准网的相关逐次平差。

### 4. 两期整体平差与多期整体平差的关系

设有  $m$  期观测, 依两期整体平差法可得  $m-1$  组未知参数的解, 依多期整体平差法仅得未知参数的唯一解。讨论两种平差方案的关系, 实质上就是探讨  $m$  期观测成果 1 次平差的唯一解与两期整体平差得到的  $m-1$  组解之间的关系。由于多期逐次平差与多期整体平差等

价, 因此可用多期逐次平差的解替代整体平差的解。

现以 3 期为例, 论证两种平差方案的关系。

设有 3 期观测值向量的误差方程式

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = B_1 y + l_1 \\ V_2 = B_2 y + l_2 \\ V_3 = B_3 y + l_3 \end{array} \right\} , \quad (1.31)$$

按逐次平差原理得

$$\text{第1次解算} \quad (N_{1,2} + GG^T) y' + W_{1,2} = 0 , \quad (1.32)$$

上式恰是第 1, 2 期整体平差时的法方程, 故有

$$y' = y_{1,2} , \quad (1.33)$$

$$\text{第2次解算} \quad (N_{1,2,3} + GG^T) \delta y' + \tilde{W}_3 = 0 , \quad (1.34)$$

由此得 3 期整体平差的解

$$y = y' + \delta y'$$

令  $y = y_{1,2,3}$ , 并顾及 (1.33) 式

$$y_{1,2,3} = y_{1,2} + \delta y' . \quad (1.35)$$

现将 (1.31) 式略为变更次序后, 即有

$$\left. \begin{array}{l} V_2 = B_2 y + l_2 \\ V_3 = B_3 y + l_3 \\ V_1 = B_1 y + l_1 \end{array} \right\} , \quad (1.36)$$

再按上述步骤可得

$$y_{1,2,3} = y_{2,3} + \delta y'' , \quad (1.37)$$

式中  $y_{2,3}$  就是第 2, 3 两期整体平差的解,  $\delta y''$  由下式解出

$$(N_{1,2,3} + GG^T) \delta y'' + \tilde{W}_1 = 0 . \quad (1.38)$$

将 (1.35), (1.37) 两式相加得

$$y_{1,2,3} = \frac{1}{2}(y_{1,2} + y_{2,3}) + \frac{1}{2}\delta y , \quad (1.39)$$

式中  $\delta y = \delta y' + \delta y''$  。

再将 (1.34), (1.38) 两式相加得

$$(N_{1,2,3} + GG^T) \delta y + \tilde{W}_1 + \tilde{W}_3 = 0 , \quad (1.40)$$

解之并顾及  $\tilde{W}_1$ ,  $\tilde{W}_3$  的定义式, 则有

$$\delta y = -Q(W_{1,3} + N_3 y_{1,2} + N_1 y_{2,3}) , \quad (1.41)$$

$$\text{故 } y_{1,2,3} = \frac{1}{2}(y_{1,2} + y_{2,3}) - \frac{1}{2}Q(W_{1,3} + N_3 y_{1,2} + N_1 y_{2,3}) .$$

$$(1.42)$$

可以证明, 当  $y_{1,2} = y_{2,3} = y$  时,  $\delta y = 0$  ,

$$\text{此时 } y_{1,2,3} = \frac{1}{2}(y_{1,2} + y_{2,3}) = y .$$

当  $y_{1,2} \neq y_{2,3}$  时, 但它们具有随机性的波动时, 则有

$$y_{1,2,3} \approx \frac{1}{2} (y_{1,2} + y_{2,3}) \quad , \quad (1.43)$$

推广到  $m$  期的重复观测, 则有

$$y_{1,2,\dots,m} \approx \frac{1}{m-1} (y_{1,2} + \dots + y_{m-1,m}) \quad (1.44)$$

为进一步论证上式, 现将两个试算网 (A: 京津沧水准网, B: 唐山水准网, 下同) 的平差结果列于表 1。表中分别提供 A 网 66—71—75 年 3 期平差的  $\lambda$  解与  $\frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2)$ 、B 网 67—71 年 5 期和 71—75 年 5 期平差的  $\lambda$  解与  $\frac{1}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$  的差值绝对值的平均数及其它。

表 1 多期平差的  $\lambda$  解与两期解的均值  $\bar{\lambda}$  之比较表

网名	年号/期数	$ \bar{d}\lambda $ (mm)	$ \bar{d}\lambda  /  \bar{\lambda} $ (%)	$\min  d\lambda $ (mm)	$\max  d\lambda $ (mm)
A	66—71—75/3	0.47	9	0.02	1.80
B	67—71/5	0.89	15	0.02	2.95
	71—75/5	2.15	13	0.02	5.20

## 二、非线性运动模型下的动态平差方案

一般而言, 地壳垂直形变的模式不仅因地而异, 而且因时而异。这主要是因为引起地壳垂直形变的原因不尽相同, 各地的地质条件也有差异等等。因此, 不仅要研究匀速运动情况下的动态平差, 还要研究非匀速运动情况下的动态平差。而物体的非匀速运动又包括匀加速运动和周期运动等等。本文仅考察复测水准网在设有匀加速参数  $\gamma$  数学模型下的动态平差。

### 1. 平差数学模型

$$E(L) = B_x X + B_\lambda \lambda + B_\gamma \gamma \quad , \quad (2.1)$$

参数  $X$ 、 $\lambda$ 、 $\gamma$  同时有解的充要条件是: 水准网复测次数  $m \geq 3$ 。

### 2. 误差方程式

令

$$X = X^0 + x \quad ,$$

则有

$$V = B_x x + B_\lambda \lambda + B_\gamma \gamma + l \quad , \quad (2.2)$$

式中

$$l = B_x X^0 - L \quad .$$

现以第  $k$  期中的第  $ij$  测段为例, 导出误差方程式的纯量形式。

设  $i$ 、 $j$  水准点在中心时刻  $T^0$  时的高程为  $X_i$ 、 $X_j$ , 速率和加速率参数分别为  $\lambda_i$ 、 $\lambda_j$  和  $\gamma_i$ 、 $\gamma_j$ , 第  $ij$  测段的观测时间为  $t_{ij}$ , 则对应于观测时刻  $t_{ij}$  时的两点高程为

$$\left. \begin{aligned} H_i &= X_i + \Delta t_i \lambda_i + \frac{1}{2} \Delta t_i^2 \gamma_i \\ H_j &= X_j + \Delta t_j \lambda_j + \frac{1}{2} \Delta t_j^2 \gamma_j \end{aligned} \right\} , \quad (2.3)$$

式中  $\Delta t_{ij} = t_{ij} - T^*$   
两式相减并略加整理后得

$$v_{ij} = -x_i + x_j - \Delta t_i \lambda_i + \Delta t_j \lambda_j - \frac{1}{2} \Delta t_i^2 \gamma_i + \frac{1}{2} \Delta t_j^2 \gamma_j + l_{ij} , \quad (2.4)$$

式中  $l_{ij} = -X_i^0 + X_j^0 - h_{ij}$  。

由上式即可组成第  $k$  期观测值向量  $L_k$  的误差方程式

$$V_k = B_{x_k} x + B_{\lambda_k} \lambda + B_{\gamma_k} \gamma + l_k , \quad (2.5)$$

令  $y^T = [x^T \quad \lambda^T \quad \gamma^T]$   
 $B_k = [B_{x_k} \quad B_{\lambda_k} \quad B_{\gamma_k}]$  。

则  $V_k = B_k y + l_k , \quad k = 1, 2, \dots, m$  。 (2.6)

有了  $V_k$ ，即可写出  $m$  期复测水准网平差时的总体误差方程式

$$V = B y + l , \quad (2.7)$$

式中  $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix}$ ，  $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$ ，  $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$  。

自由网平差时，系数矩阵  $B$  为列不满秩阵，且  $R(B) = 3t - 3$  。

### 3、解 算

本方案的解算大体与第一部分讨论的相同，这里不再叙述。当采用自由网平差时，有附加阵

$$G^T = \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \cdots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \cdots 1 \end{pmatrix} . \quad (2.8)$$

单位权方差  $\sigma^2$  的估值

$$\sigma^2 = V^T P_L V / (n - 3t + 3) ,$$

式中  $n$  为  $m$  期复测的观测值之总数。

当各期的网形不完全一致时，可采用[3]中介绍的方法处理。其原则是：如某一水准点只有一期观测成果，则该点无  $\lambda$ 、 $\gamma$  解；只有两期观测成果，则该点无  $\gamma$  解。

### 三、平差方案的选择及其差异

前文介绍的平差方案及其解算公式，一般是由亏秩自由网导出的。必须指出：这些公式只需稍加变动，就可用于有一个或多个起算点的水准网动态平差，此时，相应的附加阵  $G^T$  必须舍去。

## 1. 平差方案的选择及复测周期数m的选取

①、当在大地震发生后进行平差计算时，一般地总是将复测资料分为震前、震时、震后三个阶段处理。

②、震前资料的处理原则是：在震前的相当长一段时间内，当采用两期整体平差时，相邻两期的 $\lambda$ 值呈随机性波动时，可将它们一并用方案（一）平差计算；临震前的数年内，当采用两期整体平差时，相邻两期的 $\lambda$ 值呈异常变化时，可将它们一并用方案（二）平差计算；当相邻两期的 $\lambda$ 值呈同向加速时，更应采用方案（二）平差计算；

我们对唐山76年大震前的连续9期复测资料，就是采取了在两期整体平差的基础上，又分别取 $m=3$ 、 $m=5$ 用方案（一）进行了平差计算。由67~71年/5期、71~75年/5期的平差结果发现，临震前5年 $\lambda$ 的绝对值均比前5年 $\lambda$ 的绝对值大得多，因此又将67~75年/9期复测成果用方案（二）进行了平差计算，结果表明：网中各水准点的 $\lambda$ ， $\gamma$ 同号。由此得出结论：76年唐山大震前的9年间，唐山地区的地壳垂直形变模式是同向加速型。

③、震后的数年内，地壳垂直运动一般地呈加速衰减，因此，用方案（二）平差计算比用方案（一）平差计算更为合理。唐山网76—78—79年的3期资料，采用方案（二）计算，不仅 $\gamma$ 的数值较大，且有87%的水准点的 $\gamma$ 与 $\lambda$ 反向，这表明，平差方案（二）的计算结果能明显地反映出地壳垂直运动的加速衰减过程。

④、在大地震尚未发生之前，或在其它研究地壳垂直形变的计算中，如何选择不同的平差方案和不同的复测周期呢？一般可采用②中叙述的原则；而判断 $\lambda$ 参数的显著性和 $\lambda$ 间的差异性问题，要靠平差参数的统计假设检验来完成。

⑤、有了大型电子计算机，又配备有计算能力较强的通用程序，我们也可采用试算法，通过比较计算结果，从中选择适合本网的最佳平差方案。

## 2. 平差方案间的试算差异

为了具体说明和比较各种平差方案间的差异，我们编写了《自由水准网动态平差的通用程序》，并用此程序对A、B两网的历年复测成果进行了各种方案的试算。试算结果如下：

对于A、B两水准网，分别取复测周期 $m=3$ 、 $5$ 、 $9$ ，用方案（一）、（二）平差时，引起平差参数 $\lambda$ 的差异是：各水准点 $\lambda$ 差数绝对值的平均数在 $0.25\text{mm} \sim 1.77\text{mm}$ 之间， $\lambda$ 差的最小值在 $0.01\text{mm} \sim 0.08\text{mm}$ 之间， $\lambda$ 差的最大值在 $0.085\text{mm} \sim 11.87\text{mm}$ 之间。

对于B水准网，取复测周期 $m=2$ 、 $3$ 、 $5$ 、 $9$ ，用方案（一）平差时，引起平差参数 $\lambda$ 的差异是：各水准点 $\lambda$ 差数绝对值的平均数在 $0.89\text{mm} \sim 2.15\text{mm}$ 之间， $\lambda$ 的相对差在 $6.3\% \sim 15.5\%$ 之间， $\lambda$ 差的最小值在 $0.00\text{mm} \sim 0.32\text{mm}$ 之间， $\lambda$ 差的最大值在 $2.39\text{mm} \sim 5.20\text{mm}$ 之间。

对于A、B两水准网，由于选择的平差方案的不同，以及参加平差的复测周期数的不同，而引起平差参数精度的差异如下：单位权均方差（均以 $10\text{km}$ 的I等水准观测高差为单位权观测）的估值 $\hat{\sigma}_0$ 在 $\pm 2.65\text{mm} \sim \pm 6.67\text{mm}$ 之间波动，极个别情况下可达 $\pm 8\text{mm}$ 左右。中心时刻 $T^\circ$ 时水准高程 $H$ 的中误差在 $\pm 2.13\text{mm} \sim \pm 10.73\text{mm}$ 之间，水准点速率 $\lambda$ 的中误差在 $0.94\text{mm} \sim 14.25\text{mm}$ 之间，水准点加速度 $\gamma$ 的中误差在 $\pm 0.78\text{mm} \sim \pm 11.10\text{mm}$ 之间变动。

试算结果进一步表明：动态平差法是处理多期复测成果的一种有效方法之一，它不仅把

多期的重复观测资料置于同一数学模型之下整体解算，而且也有效地提高了平差参数的精度，即参数的可信度。现将A、B网在采用方案（一）（ $m = 2$ ）平差时，参数 $\lambda$ 协因数阵 $Q_\lambda$ 迹的平均值 $\bar{t}_r(Q_\lambda)$ 与两期复测时间间隔 $\Delta t$ 之关系列于表2；又将B网在采用方案（一）平差时，参数 $\lambda$ 协因数阵 $Q_\lambda$ 迹的平均值 $\bar{t}_r(Q_\lambda)$ 与复测周期数 $m$ 之关系列于表3，并分别用图1、图2表示之。

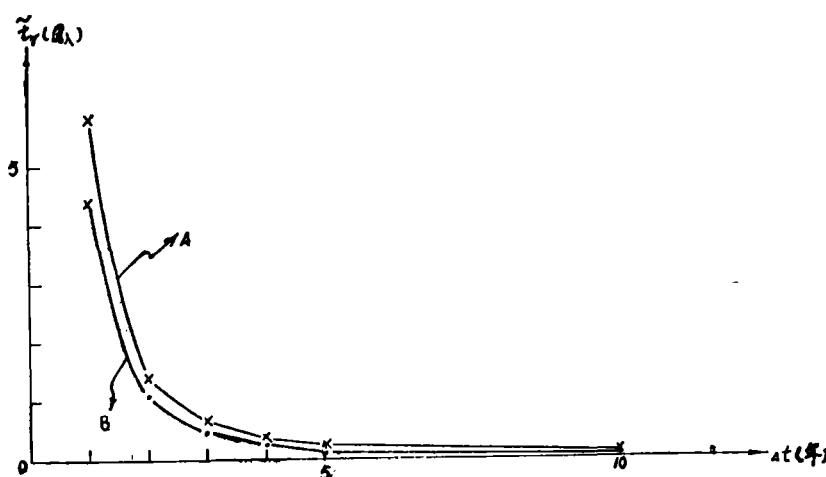
表2

两期平差中 $\bar{t}_r(Q_\lambda)$ 与 $\Delta t$ 之关系表

$\bar{t}_r(Q_\lambda)$ 网名	$\Delta t$ (年)	1	2	3	4	5	10	30	50
		A	5.8	1.4	0.66	0.37	0.24	$66 \times 10^{-4}$	$24 \times 10^{-4}$
B		4.4	1.1	0.49	0.28	0.15	0.044	$50 \times 10^{-4}$	$18 \times 10^{-4}$

表3 唐山网中 $\bar{t}_r(Q_\lambda)$ 与 $m$ 之系关系表

$m$	2	3	4	5	9
$\bar{t}_r(Q_\lambda)$	4.4	1.1	0.50	0.25	0.054

图1 A、B网 $\bar{t}_r(Q_\lambda)$ 随 $\Delta t$ 变化图

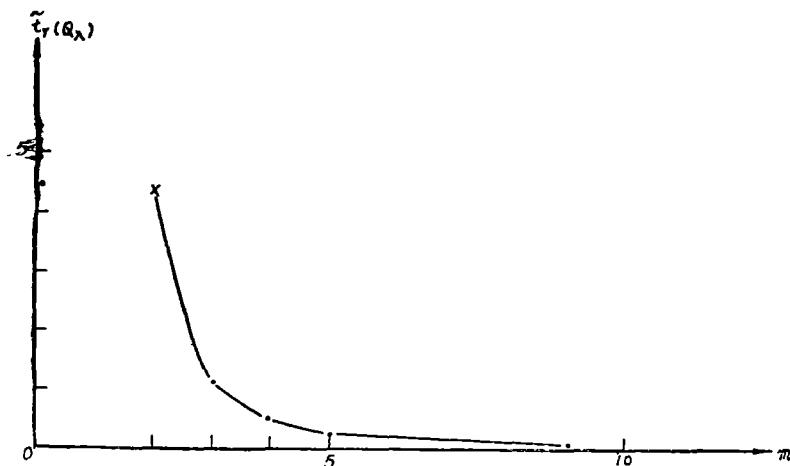


图2 B网  $\tilde{t}_y(Q_\lambda)$  随期数m变化图

#### 四、小结

水准网动态平差较之经典的静态平差法有以下几个显著的特性：

- 1、水准点高程参数  $x$  的解及其协因数阵  $Q_x$  与中心时刻  $T^\circ$  的选择有关，当  $T^\circ$  为各期观测时刻的平均值时， $t_y(Q_x)$  有极小值；
  - 2、水准点高程速率参数  $\lambda$  及加速率参数  $\gamma$  的解及其协因数阵  $Q_\lambda$ ， $Q_\gamma$  与中心时刻  $T^\circ$  的选择无关；
  - 3、 $t_x(Q_\lambda)$ 、 $t_y(Q_\gamma)$  随两期的观测时间差  $\Delta t$  的增大而迅速减小；
  - 4、 $t_x(Q_\lambda)$ 、 $t_y(Q_\gamma)$  随参与平差的复测周期  $m$  的增多而迅速减小；
- 在自由水准网的动态平差中，还有
- 5、水准点的最或是高程  $X_*$  与高程近似值  $X^\circ$  的选择有关；
  - 6、高程参数  $x$  之和等于0，即平差前后水准网的重心点高程保持不变；
  - 7、水准点高程速率  $\lambda$  及加速率参数  $\gamma$  的解与高程近似值  $X^\circ$  的选择无关，且  $\Sigma \lambda$  及  $\Sigma \gamma$  均等于0。

#### 参考文献

- [1] 崔希璋等：广义测量平差 武汉测绘学院 1978
- [2] 於宗俦等：全国复测水准网的动态平差 武汉测绘学院学报 1980年第一期
- [3] 于正林：自由水准网的动态平差 武汉测绘学院学报 1981年第一期
- [4] [芬] J.korhonen著国家地震局天津地震测量大队译：垂直运动缓慢地区的水准网平差（译文未正式发表）

# On the Dynamic Adjustment of Levelling Networks for Repeated Observations in Different Epochs

Yu Zhenglin

## Abstract

On the basis of [ 2 ] and [ 3 ], this paper put forward two dynamic adjustment schemes of repeated observations in different epochs: ( 1 ) a dynamic adjustment of linear kinematic model with a velocity parameter  $\lambda$  ; ( 2 ) a dynamic adjustment of nonlinear kinematic model with an acceleration parameter  $\gamma$  . This paper deals with the principle for the choice between these two adjustment schemes and the difference of the results from these two kinds of adjustments. Finally, some important characteristics of a dynamic adjustment of levelling networks are presented.