

在光束法区域网平差中正交附加参数组的建立及 各类系统误差对平差结果的影响*

李 德 仁

[摘要] 本文介绍在自检校光束法区域网平差中建立正交附加参数组的方法，并分析 Ebner 附加参数组所代表的各类系统误差对平差结果的影响。这对于认识系统误差的作用规律、了解自检校平差补偿系统误差的效果、分析附加参数与其它未知数可能产生的强相关、合理地选择附加参数以及如何合理布设地面控制点均有一定的参考价值。

在自检校区域网平差中，为了改正象片系统误差需要引用一个由若干附加参数组成的系统误差模型。到目前为止，选用什么样的附加参数为好，仍然是一个探讨中的问题。

从原则上讲，象片系统误差是象片坐标的函数。但由于这种函数关系在实际上很难得知，人们只好从纯数学的角度或从引起系统误差的物理因素出发，选用若干个合适的附加参数来拟合在平差中反映出来的系统误差。目前存在着各式各样的附加参数组。如一般的二元多项式、正交多项式、包含傅里叶系数的展开式及球函数展开式等等（详见文献[1]）。

选择附加参数所要考虑的因素很多。包括平差区域网的大小、旁向重叠度、象点和控制点的点数与分布、平差中的多余观测数、系统误差的先验特征、测区的地形起伏、区域中摄影测量参数的变化情况、附加参数自身及与其它未知数的相关以及所用计算机的存贮量等等。

正交的附加参数组由于它自身及与定向参数的正交性，具有统计学方面的优点，因此得到较为广泛的应用。本文主要介绍建立正交附加参数组的方法，并分析它所代表的各类系统误差对平差结果的影响，从中得到对自检校平差有益的认识。

（一）正交附加参数组的建立

象片系统误差是象片坐标的函数，因此可一般地得到下列二元多项式：

$$\begin{aligned} \Delta x = f(x, y) &= Y^T A X \\ \Delta y = \psi(x, y) &= Y^T B X \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

式中 A, B 表示附加参数矩阵；

向量 X、Y 包含象点 x、y 坐标的各次幂。

$$\begin{aligned} X^T &= (1, x, x^2, \dots, x^n) \\ Y^T &= (1, y, y^2, \dots, y^n) \end{aligned} \quad (2)$$

* 本文系研究生的论文的一部分，指导教师是王之卓教授，郑肇葆讲师。

当每片配置 3×3 标准点时, n 取 2; 当每片为 5×5 标准点时, n 可取为 4 (点位分布见图1) 象点分布为 3×3 的情况是常见的, 此时

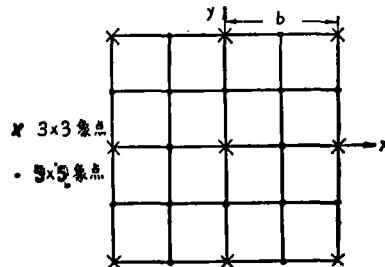


图 1

$$\left. \begin{aligned} \Delta x = f_3(x, y) &= (1, y, y^2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \\ \Delta y = \psi_3(x, y) &= (1, y, y^2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

亦即:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{13}x^2 + a_{22}xy + a_{31}y^2 + a_{23}x^2y \\ &\quad + a_{32}xy^2 + a_{33}x^2y^2 \\ \Delta y &= b_{11} + b_{12}x + b_{13}y + b_{13}x^2 + b_{22}xy + b_{31}y^2 + b_{23}x^2y + b_{32}xy^2 \\ &\quad + b_{33}x^2y^2 \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

当地面水平、近似垂直摄影时, 象片定向元素与象点坐标的微分关系式为[2]:

$$\left. \begin{aligned} dx &= -\frac{f}{H}\Delta X_s - \frac{x}{H}\Delta Z_s - f\left(1 + \frac{x^2}{f^2}\right)\Delta\varphi - \frac{xy}{f}\Delta\omega + y\Delta k \\ dy &= -\frac{f}{H}\Delta Y_s - \frac{y}{H}\Delta Z_s - \frac{xy}{f}\Delta\varphi - f\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right)\Delta\omega - x\Delta k \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

若令 (12) 式中

$$-\frac{f}{H}\Delta X_s - f\Delta\varphi = a_0$$

$$-\frac{f}{H}\Delta Y_s - f\Delta\omega = b_0$$

$$-\frac{1}{H}\Delta Z_s = \Delta\lambda$$

则 (4) 式可写成

$$\left. \begin{aligned} dx &= a_0 + \Delta\lambda \cdot x + \Delta k \cdot y - \frac{x^2}{f} \Delta\varphi - \frac{xy}{f} \Delta\omega \\ dy &= b_0 + \Delta\lambda \cdot y - \Delta k \cdot x - \frac{xy}{f} \Delta\varphi - \frac{y^2}{f} \Delta\omega \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

将(4')式与(3')式比较,参数 a_0 、 b_0 与 a_{11} 、 b_{11} 的作用完全相同,为避免产生完全相关,在一般情况下应将 a_{11} 和 b_{11} 从(3')式剔除掉。

(3')式中之一次改正项为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= a_{12}x + a_{21}y \\ \Delta y_1 &= b_{12}x + b_{21}y \end{aligned} \right\}$$

令其中

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= \Delta\lambda + b_1 \\ b_{21} &= \Delta\lambda - b_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{和} \quad \left. \begin{aligned} a_{21} &= \Delta k + b_2 \\ b_{12} &= -\Delta k + b_2 \end{aligned} \right\}$$

则

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta\lambda x + b_1 x + y \Delta k + b_2 y \\ \Delta y_1 &= \Delta\lambda y + b_2 x - \Delta k \cdot x - b_1 y \end{aligned} \right\}$$

将它与(4')式比较,上式中包含 $\Delta\lambda$ 和 Δk 的部分显然应去掉,因而得到附加参数组的一次项部分为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= b_1 x + b_2 y \\ \Delta y_1 &= -b_1 y + b_2 x \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(3')式中的二次项部分为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= a_{13}x^2 + a_{22}xy + a_{31}y^2 \\ \Delta y_2 &= b_{13}x^2 + b_{22}xy + b_{31}y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad a_{13} &= -2b_3 - \frac{\Delta\varphi}{f} & \text{和} \quad b_{31} &= -2b_4 - \frac{\Delta\omega}{f} \\ b_{22} &= b_3 - \frac{\Delta\varphi}{f} & a_{22} &= b_4 - \frac{\Delta\omega}{f} \end{aligned} \right\}$$

并以 b_5 、 b_6 替换上式中 a_{31} 和 b_{13} ,则得

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= -2b_3x^2 - \frac{x^2}{f} \Delta\varphi + b_5y^2 + b_4xy - \frac{xy}{f} \Delta\omega \\ \Delta y_2 &= b_6x^2 - 2b_4y^2 - \frac{y^2}{f} \Delta\omega + b_3xy - \frac{xy}{f} \Delta\varphi \end{aligned} \right\}$$

仍与(4')式比较,上式中含 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\omega$ 的部分应剔去,于是得到附加参数组的二次项部分:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= -b_3 \cdot 2x^2 + b_4xy + b_5y^2 \\ \Delta y_2 &= b_3xy - b_4 \cdot 2y^2 + b_6x^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这样,原来的(3')式中一共去掉与象片定向元素相关的六个参数。

(3')式中的三次项和四次项全部保留,但以 b_7 、 b_8 、 b_9 、 b_{10} 、 b_{11} 和 b_{12} 替换 a_{32} 、 a_{23} 、 b_{23} 、 b_{32} 、 a_{33} 和 b_{33} 则得到

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x_{3-4} = b_7 xy^2 + b_8 x^2 y + b_{11} x^2 y^2 \\ \Delta y_{3-4} = b_8 x^2 y + b_{10} xy^2 + b_{12} x^2 y^2 \end{array} \right\} \quad (7)$$

将(5)、(6)和(7)式合并起来，并以($x^2 - 2b^2/3$)和($y^2 - 2b^2/3$)代替其中所有的 x^2 和 y^2 ，则得到：

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = b_1 x + b_2 y - b_3 (2x^2 - 4b^2/3) + b_4 xy + b_5 (y^2 - 2b^2/3) + \\ + b_7 x (y^2 - 2b^2/3) + b_8 (x^2 - 2b^2/3)y + b_{11} (x^2 - 2b^2/3)(y^2 - 2b^2/3) \\ \Delta y = -b_1 y + b_2 x + b_3 xy - b_4 (2y^2 - 4b^2/3) + b_6 (x^2 - 2b^2/3) + \\ + b_8 (x^2 - 2b^2/3)y + b_{10} x (y^2 - 2b^2/3) + b_{12} (x^2 - 2b^2/3)(y^2 - 2b^2/3) \end{array} \right\} \quad (8)$$

(8)式便是Ebner首先提出的十二个参数的正交附加参数组[3]。实际使用中，将系数均匀化得到实用的附加参数公式：

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = \bar{b}_1 \bar{x} + \bar{b}_2 \bar{y} - \bar{b}_3 \left(2\bar{x}^2 - \frac{4}{3} \right) + \bar{b}_4 \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{b}_5 \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3} \right) + \\ + \bar{b}_7 \bar{x} \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3} \right) + \bar{b}_8 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3} \right) \bar{y} + \bar{b}_{11} \cdot 2 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3} \right) \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3} \right) \\ \Delta y = -\bar{b}_1 \bar{y} + \bar{b}_2 \bar{x} + \bar{b}_3 \bar{x} \bar{y} - \bar{b}_4 \left(2\bar{y}^2 - \frac{4}{3} \right) + \bar{b}_6 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3} \right) + \\ + \bar{b}_8 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3} \right) \bar{y} + \bar{b}_{10} \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3} \right) + \bar{b}_{12} \cdot 2 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3} \right) \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3} \right) \end{array} \right\} \quad (8')$$

式中

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}$$

如果象片上九个点位于标准位置，即间距等于象片基线 b ，而且地面水平，近似垂直摄影，则经计算求出，附加参数之间以及附加参数与定向未知数之间完全严格正交。

对于 5×5 象点分布(见图1)，正交参数的建立由下式出发，

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = f_5(x, y) = (1, y, y^2, y^3, y^4) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \\ \Delta y = \psi_5(x, y) = (1, y, y^2, y^3, y^4) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{15} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{51} & b_{52} & \cdots & b_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad (9)$$

除去与定向元素相关的6个参数，得到包含44个参数的附加参数组，其法如下。

首先(9)式可写成：

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= a_{11} + a_{12}x + a_{21}y + a_{13}x^2 + a_{22}xy + a_{31}y^2 + a_{14}x^3 + a_{23}x^2y + \\ &\quad + a_{32}xy^2 + a_{41}y^3 + a_{15}x^4 + a_{24}x^3y + a_{33}x^2y^2 + a_{42}xy^3 + \\ &\quad + a_{51}y^4 + a_{25}x^4y + a_{34}x^3y^2 + a_{43}x^2y^3 + a_{52}xy^4 + a_{35}x^4y^2 + \\ &\quad + a_{44}x^3y^3 + a_{54}x^2y^4 + a_{45}x^4y^3 + a_{54}x^3y^4 + a_{55}x^4y^4 \\ \Delta y &= b_{11} + b_{12}x + b_{21}y + b_{13}x^2 + b_{22}xy + b_{31}y^2 + b_{14}x^3 + \\ &\quad + b_{23}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{41}y^3 + b_{15}x^4 + b_{24}x^3y + b_{33}x^2y^2 + \\ &\quad + b_{42}xy^3 + b_{51}y^4 + b_{25}x^4y + b_{34}x^3y^2 + b_{43}x^2y^3 + b_{52}xy^4 + \\ &\quad + b_{35}x^4y^2 + b_{44}x^3y^3 + b_{53}x^2y^4 + b_{45}x^4y^3 + b_{54}x^3y^4 + b_{55}x^4y^4 \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

根据前面的分析，(9')式中零次项部分应剔去，一次项部分应变为(5)式，若用 a_{12} 和 a_{21} 代替(5)式中 b_1 和 b_2 ，则附加参数的一次项部分为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= a_{12}x + a_{21}y \\ \Delta y_1 &= -a_{12}y + a_{21}x \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(9')式中的二次项部分为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= a_{13}x^2 + a_{22}xy + a_{31}y^2 \\ \Delta y_2 &= b_{13}x^2 + b_{22}xy + b_{31}y^2 \end{aligned} \right\}$$

令

$$\left. \begin{aligned} a_{13} &= -\frac{10}{7}b_3 - \frac{\Delta\varphi}{f} \\ b_{22} &= b_3 - \frac{\Delta\varphi}{f} \end{aligned} \right\} \quad \text{和} \quad \left. \begin{aligned} b_{31} &= -\frac{10}{7}b_4 - \frac{\Delta\omega}{f} \\ a_{22} &= b_4 - \frac{\Delta\omega}{f} \end{aligned} \right\}$$

代入上式得到：

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= -\frac{10}{7}b_3x^2 - \frac{\Delta\varphi}{f}x^2 + b_4xy - \frac{\Delta\omega}{f}xy + a_{31}y^2 \\ \Delta y_2 &= b_{13}x^2 + b_3xy - \frac{\Delta\varphi}{f}xy - \frac{10}{7}b_4y^2 - \frac{\Delta\omega}{f}y^2 \end{aligned} \right.$$

与(4')式比较，其中含 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\omega$ 的部分应剔去，并再用 b_{22} 和 a_{22} 取代 b_3 和 b_4 且以 k ， l 取代 x^2 和 y^2 ，则附加参数的二次项部分为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= a_{22}xy + a_{31}l - b_{22}\frac{10}{7}k \\ \Delta y_2 &= -a_{22}\frac{10}{7}l + b_{13}k + b_{22}xy \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中

$$k = x^2 - \frac{b^2}{2}, \quad l = y^2 - \frac{b^2}{2}$$

于是，与定向元素相关的六个参数被除去，高次项全部保留。剩下的问题是适当地确定这些参数的多项式系数（即将 x^2 ， y^2 ， x^4 和 y^4 作适当变换），以保证理想条件下的严格正交。对此，Grün导出了以下结果[4]。

$$\text{令 } k = x^2 - \frac{b^2}{2}, \quad l = y^2 - \frac{b^2}{2}, \quad p = x^2 - \frac{17}{20} b^2, \quad q = y^2 - \frac{17}{20} b^2,$$

$$r = x^2 \left(x^2 - \frac{31}{28} b^2 \right) + \frac{9}{70} b^4, \quad s = y^2 \left(y^2 - \frac{31}{28} b^2 \right) + \frac{9}{70} b^4,$$

有：

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_{12}x + a_{21}y + a_{22}xy + a_{31}l + 0 - b_{22} \frac{10}{7}k + \\ &\quad + a_{14}xp + a_{23}yk + a_{32}xl + a_{41}yq + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ &\quad + a_{15}r + a_{24}xyp + a_{33}kl + a_{42}xyq + a_{51}s + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ &\quad + a_{25}yr + a_{34}x/p + a_{43}ykp + a_{52}xs + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ &\quad + a_{35}lr + a_{44}xypq + a_{53}ks + 0 + 0 + 0 + \\ &\quad + a_{45}yqr + a_{54}xps + 0 + 0 + a_{55}rs + 0 \quad | \\ \Delta y &= -a_{12}y + a_{21}x - a_{22} \frac{10}{7}l + 0 + b_{13}k + b_{22}xy + \\ &\quad + 0 + 0 + 0 + 0 + b_{14}xp + b_{23}yk + b_{32}xl + b_{41}yq + \\ &\quad + 0 + 0 + 0 + 0 + b_{15}r + b_{24}xyp + b_{33}kl + b_{42}xyq + b_{51}s + \\ &\quad + 0 + 0 + 0 + 0 + b_{25}yr + b_{34}x/p + b_{43}ykp + b_{52}xs + \\ &\quad + 0 + 0 + 0 + b_{35}lr + b_{44}xypq + b_{53}ks + \\ &\quad + 0 + 0 + b_{45}ypr + b_{54}xps + 0 + b_{55}rs \quad | \end{aligned} \quad (12)$$

对于每片有 3×3 象点，旁向重叠为 20% 左右的单区域，通常用 Ebner 正交附加参数组；而当每片有 5×5 象点且旁向重叠为 60% 时，可用 Grün 多项式。

(二) 各类系统误差对平差结果的影响

研究各种不同类型的象片系统误差对区域网平差结果的影响，对于了解系统误差的作用规律、它能否在平差中被发现和得到补偿以及分析附加参数与坐标未知数的相关等均有重要的意义。Kubik 等人曾就四种基本系统误差图形，用标准格网数据进行过试验研究[5]。本节中对 Ebner 附加参数组中十二个附加参数所表示的各类系统误差进行类似的试验研究，但取用有较大高差起伏的模拟象片数据，研究的范围除了对平差坐标的影响作用之外，还包括对外方位元素和象点坐标残差的影响。

(1) 单项系统误差对平差结果的影响

试验研究采用图 2 所示的区域，采用的方法是在不带偶然误差的模拟象片数据中加入某一项系统误差，即 b_i 为 20 微米，其余 b 值均为零代入(8')式求得的各象点系统误差。通过

不带附加参数的光束法平差便求出单项系统误差作用下的平差结果。将它与模拟数据理论值比较便得到单项系统误差的影响作用，列成表 1。

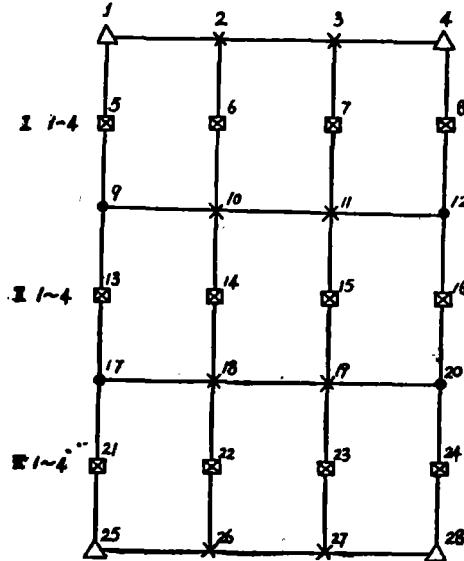


图 2 试验用区域网

△ 平高控制点； $f = 150\text{mm}$ • 高程控制点； $q = 20\%$
 × 加密点； $1 : m = 1 : 31600$ □ 象主点。 最大地面高差 500 m

表 1 中的 TS 值为系统误差显著性检验之统计量[9]。它是由象片上九个子块内象点坐标残差求得的：

$$TS = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{|A_i| \sqrt{n_i}}{s_i} \right)}{K} \quad (13)$$

式中 K 为子块数；

n_i 为落在第 i 个子块内的象点数；

A_i 为第 i 个子块内各点象坐标残差之均值；

s_i 为相应的统计均方差。

当 TS 值大于 1 时，可认为区域内系统误差是显著的（详见文献[6]）。

从表 1 中可得到以下几点有意义的结论：

(i) Ebner 系统误差模型的各个参数所代表的单项系统对平差结果的影响是各不相同的。在图 2 所示的几何条件下：

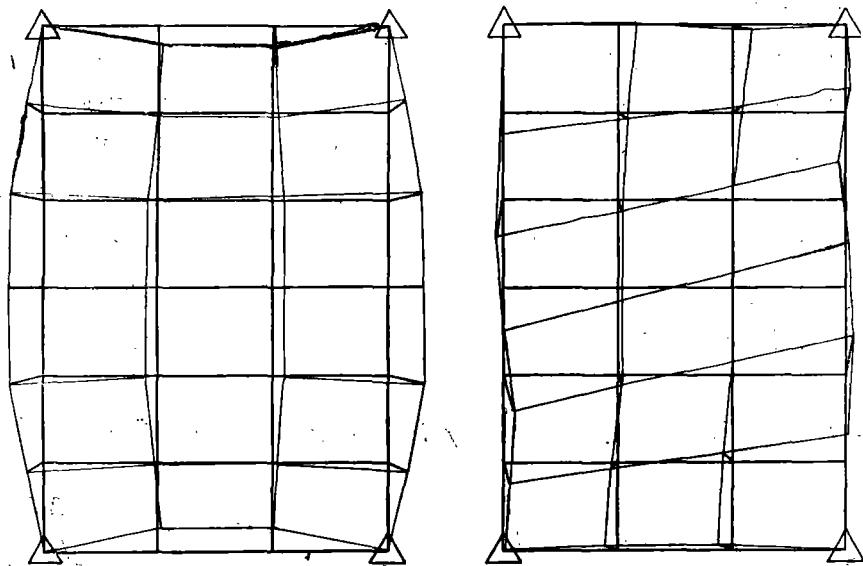
— \bar{b}_1 、 \bar{b}_2 、 \bar{b}_4 和 \bar{b}_5 主要作用于平面。其中 \bar{b}_1 和 \bar{b}_5 主要沿航线方向作用于 X 坐标，但 \bar{b}_5 的作用较小；而 \bar{b}_2 和 \bar{b}_4 主要作用于 Y 坐标。在象坐标残差分析中，TS 检验不能明显地发现这四类系统误差。 \bar{b}_1 和 \bar{b}_2 对单位权中误差有一定影响， \bar{b}_4 和 \bar{b}_5 则影响甚小。这四类系统误差对地面点平面坐标的具体影响见图 3。

单项系统误差在光束法平差中的影响作用

表 1

系 统 误 差 类 型	作用于象点 坐标上的最 大值上(Δx) 下(Δy)	单位权 中误差	坐 标 中 误 差				外 方 位 元 素 中 误 差				残 差 分 析			
			μ_x	μ_y	μ_{xy}	μ_z	μ_{sx}	μ_{sy}	μ_{sz}	μ_p	μ_a	μ_s	A_1 最 大 值	TS 值
b ₁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
b ₁	20	7.5	31.9	16.2	25.3	8.1	0.61	1.76	0.94	0.32	1.01	0.68	1.9	0.82
b ₂	20	7.2	13.8	36.4	27.5	6.1	1.65	1.76	1.22	1.04	0.39	0.61	2.9	1.07
b ₃	26.7	30.4	10.8	4.0	8.1	25.9	0.82	0.54	0.20	0.39	0.29	0.08	20.9	11.82
b ₄	20	2.4	2.2	28.2	20.0	3.2	0.24	2.10	0.13	0.16	1.15	0.05	0.6	0.71
b ₅	13.3	0	1.0	9.7	0.9	6.8	1.6	0.09	0.12	0.03	0.05	0.07	0.3	0.55
b ₆	0	12.7	2.2	6.0	4.5	10.7	0.36	0.40	0.14	0.27	0.17	0.30	9.3	5.94
b ₇	13.3	0	0.9	1.0	0.8	0.9	14.5	0.04	0.14	0.03	0.02	0.09	0.02	0.2
b ₈	13.3	0	1.6	4.1	3.5	3.8	45.7	3.53	0.29	1.00	2.48	0.16	0.10	0.5
b ₉	13.3	*	8.5	1.7	4.1	3.2	5.2	0.19	1.03	0.07	0.12	0.55	0.18	7.1
b ₁₀	0	13.3	5.6	2.8	7.3	5.5	3.9	0.28	0.93	0.13	0.16	0.46	0.08	4.8
b ₁₁	17.8	0	8.0	9.1	1.7	6.6	21.9	*	0.15	0.07	0.17	0.09	0.04	7.4
b ₁₂	0	17.8	10.7	2.2	3.7	3.1	3.5	0.23	0.39	0.08	0.16	0.22	0.13	4.93

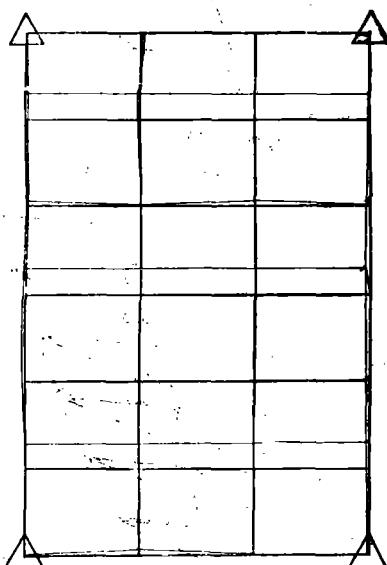
[注] 1—6、13栏单位为微米, 7—9栏单位为米, 10—12栏单位为分。



$m_x = 31.9$
 $m_y = 16.2$
 $S_s = 7.5$
 $e_{x\max} = 63.6$
 $e_{y\max} = 40.3$

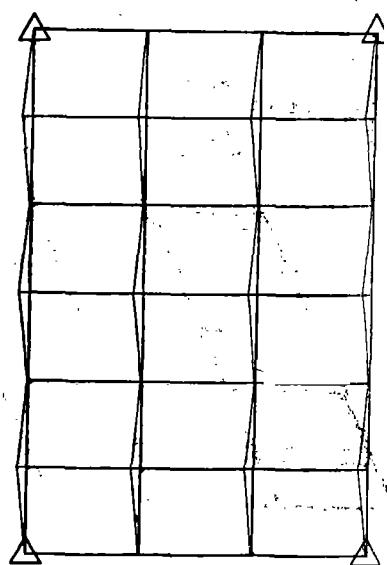


$m_x = 13.8$
 $m_y = 36.4$
 $S_s = 7.2$
 $e_{x\max} = 31.6$
 $e_{y\max} = 71.3$



b_4 型系统误差
 $m_x = 2.2$
 $m_y = 28.2$
 $S_s = 2.4$
 $e_{x\max} = 5.0$
 $e_{y\max} = 44.7$

0 50 100 cm



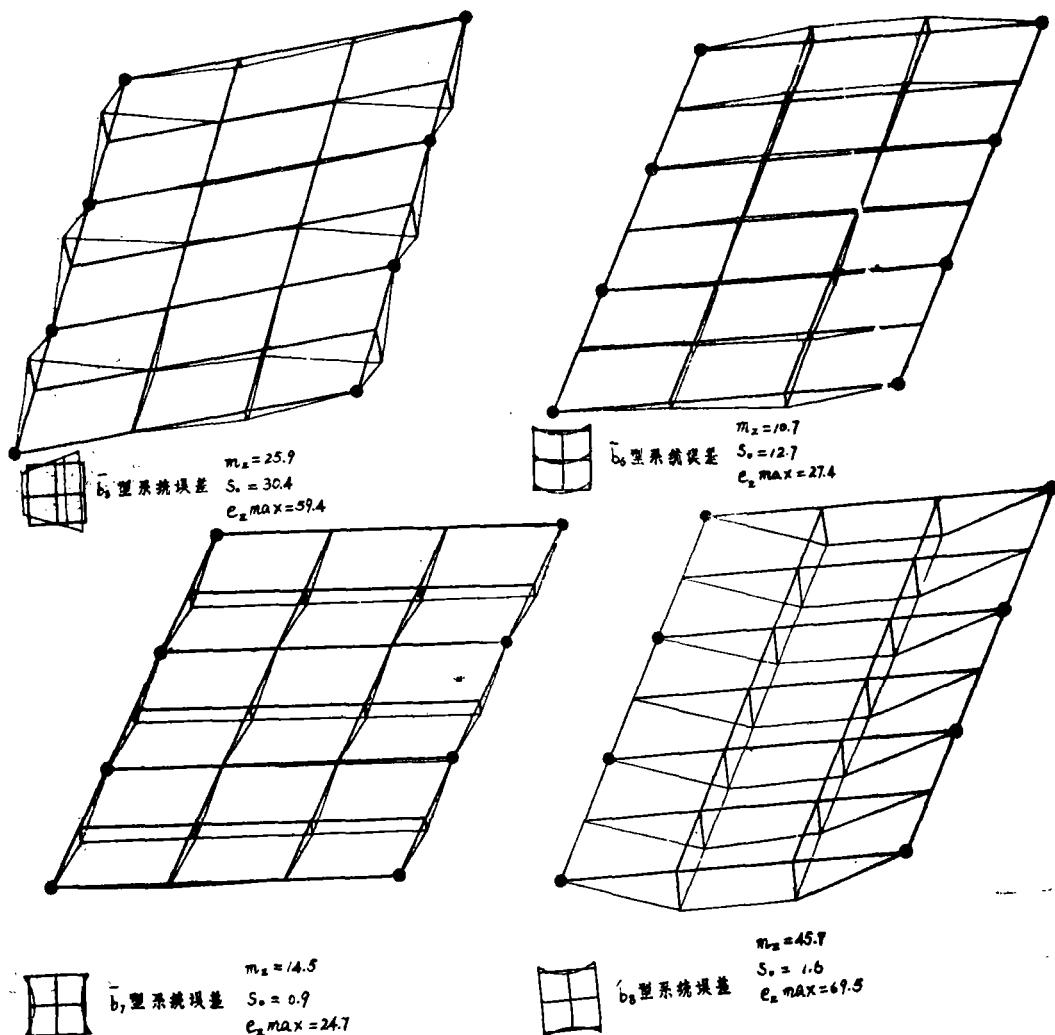
b_5 型系统误差
 $m_x = 9.7$
 $m_y = 0.9$
 $S_s = 1.0$
 $e_{x\max} = -15.5$
 $e_{y\max} = 2.0$

图3 光束法平差后单项系统误差对平面的影响

显然, \bar{b}_1 的影响为受控比例尺不均匀变形, 它的最大影响位于周边控制点连线中央。密集的周边布点对消除这种影响有利。 \bar{b}_2 为受控剪形变形, 最大影响在边沿左右控制点连线中央, 密集的周边布点同样可利于消除其影响。 \bar{b}_4 为各航线 Y 坐标的旁向弯曲, \bar{b}_5 为各航线 X 坐标的旁向弯曲。除非沿象片基线上布有控制点, 否则是不能消除这两项系统误差的。

\bar{b}_3 、 \bar{b}_6 、 \bar{b}_7 、 \bar{b}_8 和 \bar{b}_{11} 这五类系统误差主要作用于高程, 以 \bar{b}_8 对高程的影响最大 ($\mu_z = 45.7$ 微米)。 \bar{b}_3 和 \bar{b}_{11} 对 X 坐标还有些影响。 \bar{b}_3 、 \bar{b}_6 和 \bar{b}_{11} 这三类系统误差可由 TS 检验明显地反映出来, 而且对单位中误差有明显的影响, 可是 \bar{b}_7 和 \bar{b}_8 这两种系统误差却不能为 TS 检验所发现, 也不对单位权中误差产生影响。这五种系统误差各自对高程的影响示于图 4。

从图 4 看出, \bar{b}_3 和 \bar{b}_{11} 引起高程的航向扭曲, \bar{b}_6 引起高程的旁向扭曲, \bar{b}_7 引起各航线高



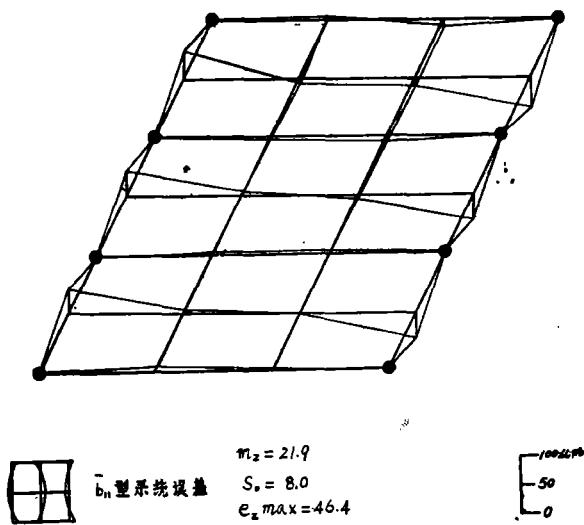


图 4 光束法平差后单项系统误差对高程的影响

程的旁向弯曲， \bar{b}_8 引起区域内高程的航向弯曲。按适当跨距的锁形布设高程控制点，利于消除 \bar{b}_8 和 \bar{b}_{12} 型系统误差的影响，其它三类系统误差只有沿象片基线布设高程控制点才能消除其影响。

—— \bar{b}_9 、 \bar{b}_{10} 和 \bar{b}_{12} 这三类系统误差对加密点之平面坐标和高程均无明显影响，但它们对残差的影响甚大，因而可由TS检验值中明显地反映出来，而且影响单位权中误差。

——对外方位元素产生影响的系统误差参数为 \bar{b}_1 、 \bar{b}_2 、 \bar{b}_4 、 \bar{b}_8 和 \bar{b}_9 。其中 X_s 、 Z_s 和 φ 主要受 \bar{b}_2 和 \bar{b}_8 影响； Y_s 主要受 \bar{b}_1 、 \bar{b}_2 、 \bar{b}_4 和 \bar{b}_9 的影响； ω 主要受 \bar{b}_1 和 \bar{b}_4 的影响；而各类系统误差对旋角 k 的影响均不大。

(ii) 由于各类型系统误差对平差结果的影响各不相同，所以对于同样的区域几何条件，如果实际象片所包含的系统误差类型不同，则附加参数自检校平差得到的效果也就不同。详细地说，如果象片坐标中主要包含影响平面坐标的系统误差，则自检校平差将主要改善平面坐标的精度，高程精度的提高必然不大。反过来，如果象片坐标中主要包含影响高程的系统误差，则自检校平差将主要改善高程的精度。最后，如果包含的系统误差为 \bar{b}_9 、 \bar{b}_{10} 和 \bar{b}_{12} 型的，则自检校平差不会明显改变平差结果精度，只能使单位权中误差降低。这也许是国外各种试验中平面和高程精度提高幅度各不相同的主要内因之一。

(iii) 由于各类系统误差在象点坐标残差中的反映各不相同，TS值也各不相同，所以对于以分析象点坐标残差为基础的验后补偿法（详见[6]之附录）；其补偿效果必然受得限制。从表1可看出，验后补偿法（在图2几何条件下）只能察觉出 b_3 、 b_6 、 b_{12} 、 b_9 、 b_{10} 、

b_{11} 及 b_1 、 b_2 型系统误差，而且只能补偿其中 b_3 、 b_6 、 b_{11} 及 b_1 、 b_2 对加密结果的部分影响，因此其效果不及自检校平差。

(2) 各类系统误差的联合作用

表 1 得到的是单项系统误差产生的影响作用。如果存在某几种类型系统误差，在其联合作用下，表 1 所得出的结论会发生变化吗？就是说联合作用能否由表 1 中单项作用的结果进行叠加呢？为此，将几种系统误差同时加于象片坐标上进行平差计算，试验结果列于表 2 中。表中共有四组：第一组为主要影响平面坐标的两项系统误差 (\bar{b}_1 和 \bar{b}_2)，第二组为影响高程的两项系统误差 (\bar{b}_3 和 \bar{b}_{11})，第三组的 \bar{b}_1 和 \bar{b}_3 分别影响平面和高程，而最后一组包括对平差结果无甚影响的 \bar{b}_0 、 \bar{b}_{10} 和 \bar{b}_{12} 。表 2 中还按误差传播定律由表 1 的数据求得相应的计算值以资比较。

从表 2 看出，系统误差的联合作用，除开 TS 值外，均可通过单项作用的叠加而求得。因此，表 1 的结果可用来研究系统误差的任意组合对平差结果的影响。

(3) 系统误差对平差结果影响作用的解析表达式

系统误差对平差结果的影响可以用解析式表示。由间接观测平差知，对于有

$$\left. \begin{aligned} V &= A \hat{X} - L \\ \hat{X} &= (A^T P A)^{-1} A^T P L \\ V &= (A(A^T P A)^{-1} A^T P - I)L = -(I - K)L \\ K &= A(A^T P A)^{-1} A^T P \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中

当用不带偶然误差的模拟数据时，若加入的真系统误差向量为 e_s ，则它对 X 和 V 的影响 \hat{X}_s 和 V_s 可由下式求出：

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_s &= (A^T P A)^{-1} A^T P e_s \\ V_s &= -(1 - K)e_s \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

在我们表 1 进行的试验中， e_s 向量是在假定的某个附加参数 (\bar{b}_4) 为 20 微米，其余参数均为零后代入 (8') 式求得的，即

表 2 各项系统在误差光束法平差中的联合作用

系统误差类型和大小		单位权中误差						外方位元素测定中误差						残差分析	
		μ_x	μ_y	μ_{xy}	μ_z	μ_{sx}	μ_{sy}	μ_{sz}	μ_s	μ_o	μ_k	$ A_i _{\max}$	TS 值		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
$\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = 20$	10.2	34.0	40.0	37.1	12.2	1.77	2.39	1.55	1.08	1.02	0.91	3.9	0.64		
由表算值	10.4	34.8	39.8	37.4	10.1	1.76	2.49	1.54	1.09	1.08	0.91	3.5			
$\bar{b}_3 = \bar{b}_{11} = 20$	33.7	18.4	4.8	13.4	47.4	1.04	0.60	0.23	0.50	0.32	0.10	22.6	11.76		
由表算值	31.4	14.1	4.3	10.1	33.9	0.87	0.56	0.21	0.43	0.30	0.09	22.2			
$\bar{b}_1 = \bar{b}_3 = 20$	31.3	36.1	16.2	28.0	26.3	1.01	2.19	0.99	0.47	1.23	0.73	22.2	7.82		
由表算值	31.3	33.7	16.7	26.6	27.1	1.02	1.84	0.96	0.50	1.05	0.68	21.0			
$\bar{b}_3 = \bar{b}_{10} = \bar{b}_{12} = 20$	13.3	4.9	10.9	8.4	8.2	0.50	1.98	0.22	0.31	1.03	0.28	14.0	3.23		
由表算值	14.8	3.9	9.2	7.1	7.4	0.41	1.44	0.17	0.26	0.75	0.24	16.4			

[注] 1—6, 13 栏单位为微米, 7—9 栏单位为米, 10—12 单位为分。

$$\hat{e}_{s_i} = A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{b}_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_3 B_i \quad (16)$$

从这里可以证明系统误差作用的叠加性。设 \overline{b}_i 和 \overline{b}_j 为两类不同系统误差，于是有

$$\hat{X}_{s_{ij}} = (A^T P A)^{-1} A^T P e_s$$

$$\hat{X}_{s_i} = (A^T P A)^{-1} A^T P e_s$$

而在 \overline{b}_i 和 \overline{b}_j 联合作用时，

$$e_{s_{ij}} = A_3 (B_i + B_j) = + e_{s_{ij}}$$

$$\hat{X}_{s_{ij}} = (A^T P A)^{-1} A^T P e_{s_{ij}}$$

$$= (A^T P A)^{-1} A^T P (e_{s_i} + e_{s_j})$$

$$= \hat{X}_{s_i} + \hat{X}_{s_j}$$

证毕

对于残差 V 也同此证明。

(15) 式表明，系统误差向量 e_s 对平差结果的影响取决于设计矩阵 A 和权矩阵 P ，而设计矩阵 A 则由区域网的几何条件所决定。这些条件包括重叠度，航线飞行方向、象点数及其分布、控制点数及其分布、区域网的大小和形状以及地形起伏等等。

(15) 的解析式不能为我们提供 \hat{X}_s 和 V_s 的具体大小和特点，所以只能用本文这样的模拟计算法来描述系统误差对平差结果的影响作用。此时所取的区域几何条件应与实际作业中采用的相一致。

由线性代数得知，对于 (15) 式之第二式，如果 e_s 向量恰为幂等矩阵 K 的 $\lambda = 1$ 之特征向量，则 $V_s = 0$ ，就是说，此种系统误差对残差向量 V 不产生任何影响，因而对单位权中误差和 TS 值也不产生影响。根据 Grün 的证明 [7]，此时用自由附加参数来改正这种系统误差时，附加参数得不到唯一非零解。

在我们表 1 的试验结果中，虽然未出现某类系统误差使 V_s 为零的情况，但也可找出， \overline{b}_4 、 \overline{b}_5 、 \overline{b}_7 和 \overline{b}_8 对残差 V 的影响很小。因此至少可以说，这四类系统误差在所研究的区域网中是不易测准的（这与相关分析的结果完全一致）。

为了解系统误差的作用随设计矩阵 A 而变化，我们将图 2 中的控制改为 1, 2, 4, 9, 12, 17, 20, 25, 27, 28 点全为平高控制点后进行同表 1 一样的平差计算，得到结果列于表 3。

表3 单项系统误差在光束法平差中的影响作用(密集控制)

系 统 类 型 误 差 类 型	作用于象点 坐标上的最 大值上(Δx) 下(Δy)	单 位 权	坐 标 测 定 精 度						外 方 位 元 素 的 测 定 精 度						残 差 分 析		
			μ_x	μ_y	μ_{xy}	μ_z	μ_{sz}	μ_{sy}	μ_{sz}	μ_{sy}	μ_s	μ_e	μ_{se}	$ A_i $ 最 大 值	TS 值		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14				
b_1	20	18.8	5.8	18.6	13.7	24.2	1.33	1.47	0.72	1.10	0.81	0.17	13.9	2.91			
b_2	20	21.8	9.5	9.1	9.3	10.7	0.68	0.63	0.26	0.43	0.38	0.14	14.5	4.36			
b_3	26.7	26.2	9.5	1.6	6.8	25.3	0.70	0.20	0.11	0.35	0.12	0.04	20.9	13.44			
b_4	26.7	2.4	1.2	27.2	19.2	3.5	0.22	2.06	0.08	0.15	1.15	0.01	0.7	0.87			
b_5	13.3	0	0.9	9.0	0.7	6.4	1.0	0.04	0.10	0.01	0.03	0.06	0.03	0.3	0.70		
b_6	0	11.1	0.7	2.1	1.5	3.3	0.18	0.68	0.05	0.13	0.30	0.26	9.5	6.01			
b_7	13.3	0	0.9	0.6	0.5	0.6	14.3	0.03	0.12	0.01	0.02	0.07	0.01	0.5	1.17		
b_8	13.3	0	5.7	1.2	1.5	1.3	15.5	1.76	0.39	0.55	1.25	0.25	0.03	4.0	1.76		
b_9	13.3	0	7.5	0.9	2.8	2.1	5.4	0.25	0.91	0.06	0.18	0.50	0.16	7.9	4.57		
b_{10}	13.3	0	5.3	1.7	5.9	4.4	4.0	0.21	0.79	0.04	0.14	0.41	0.06	5.9	2.33		
b_{11}	17.8	0	6.9	9.1	1.6	6.6	21.8	0.24	0.09	0.04	0.15	0.06	0.03	7.4	2.63		
b_{12}	17.8	9.2	0.6	2.1	1.5	1.6	0.15	0.42	0.05	0.10	0.22	0.11	14.1	5.07			

[注] 1—6、13栏单位为微米, 7—9栏单位为米, 10—12栏单位为分。

将表3与表1相比较，可以看出：

(i) 随着控制点数的增加使设计矩阵A发生变化后，各单项系统误差对平差结果的作用有些发生变化，而有些则基本不变。发生变化的系统误差参数为 \bar{b}_1 、 \bar{b}_2 、 \bar{b}_6 和 \bar{b}_8 。

(ii) 这四种系统误差所发生的变化在上文中已经基本上被预计出来。平面周边布点将使 \bar{b}_1 和 \bar{b}_2 对平面坐标的影响显著减小(μ_{XY} 分别由 $25.3\mu m$ 和 $27.5\mu m$ 降为 $13.7\mu m$ 和 $9.3\mu m$)。但必须指出，表3显示出在此时它们对高程的影响增大了(μ_z 分别由 8.1 和 $6.1\mu m$ 增加到 24.2 和 $10.7\mu m$)缩小高程控制点间距减小了 \bar{b}_6 和 \bar{b}_8 对高程的影响(μ_z 分别由 10.7 和 $45.7\mu m$ 减小到 3.3 和 $15.5\mu m$)，而且对平面无甚影响。

通过表3及表1，我们可以得出这样的结论：在20%旁向重叠的单区域网中，平面控制周边布点和高程控制按一定间距布成锁形对于顾及系统误差的影响是有利的。而这种布点正是目前采用得最广泛的布点方案。

(iii) 还必须指出的是在密集控制下， \bar{b}_4 、 \bar{b}_5 、 \bar{b}_7 这三类系统误差在残差中的反映仍很小，但 \bar{b}_8 在残差中反映得较明显了。所以在按一定间距布设高程点时， \bar{b}_8 的可测定性改善了，而其它三个测不准参数仍测不准。所以在许多人的试验中 \bar{b}_4 、 \bar{b}_5 和 \bar{b}_7 这三个参数往往被剔去。

(三) 小 结

对以上的试验研究作如下的小结：

(i) 在自检校平差中建立正交参数组的方法是从0次项、一次项、二次项中除去与定向未知数完全相关的部分，然后再对 x^2 、 y^2 和 x^4 、 y^4 作适当的变化，从而得到理想情况下的完全正交附加参数组。

(ii) 表1以及图3、图4所揭示的单项系统误差对平差结果的影响对于认识系统误差的用作规律、估计自检校平差补偿系统误差效果、分析附加参数与其它未知数的相关问题(见[8])和附加参数的合理选择有一定普遍意义。

(iii) 从有效地补偿系统误差出发，区域网加密时采用平面周边布点、高程按一定间距布成锁形是合适的。

参 考 文 献

- [1] 李德仁：航测区域网平差中系统误差的补偿《武测资料》1981年第3—4期
- [2] 王之卓：《摄影测量原理》测绘出版社1979
- [3] H.Ebner : Self Calibrating Block adjustment《B u L》44 1976
- [4] A.Grun : Experiences with Self-Calibrating Bundle adjustment
Presented paper to ACSM-ASP Convention washington, D.C.
February/March 1978
- [5] K.Kubik等：Systematic Image Errors in Aerial Triangulation《Photogrammetria》 29 1973 No.4
- [6] 李德仁：论自检校区域网平差中的信噪比《测绘学报》1982年第2期(待发表)

- [7] A. Grün: Progress in Photogrammetric Point Determination by Compensation of Systematic Errors and Detection of Gross Errors Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen Reihe II Heft Nr. 36
- [8] 李德仁: 自检校光束法平差的相关分析和附加参数显著性检验《武汉测绘学院学报》1981年第2期
- [9] K. Jacobsen: Detection and Consideration of Systematic image errors using the Hannover Bundle Block Adjustment ISP Working Group III/3 A°lborg 1979

The Forming of Orthogonal Additional Parameters in the Bundle Block - Adjustment and the Effect of Each Kind of Systematic Errors on the Adjusted Results

Li Deren

Abstract

In this paper a method for the forming of orthogonal additional parameters in a self-calibrating bundle block adjustment is described and the effect of each kind of systematic errors represented by Ebner's additional parameters on the adjusted results is analyzed. All these are deemed necessary for the understanding of the functional rule of systematic image errors as well as of the efficiency of the compensation of systematic errors by using the self-calibrating adjustment. These will help us also to analyze the possible strong correlations between the additional parameters and some other unknowns, to choose the additional parameters correctly and to know how to locate the ground control points more profitably.