

地面坐标作为带权观测值的空间后方交会与验后权估计

李 德 仁

[摘要] 本文讨论了验后方差估计在单象空间后方交会中的应用。此时所要估计的是地面坐标和象片坐标的权。

如果地面坐标有相同的方差，譬如人工标志点，则我们可将地面点视为固定点而不必作为带权观测值，且不需要进行验后方差估计。但是，若地面坐标的方差不等，譬如采用自然点（需要辨认和转刺）的情况，则必须将它们作为带权观测值逐点进行方差估计。采用这种方法可以提高平差结果的精度。

单象空间后方交会系根据若干地面点坐标及其象片坐标反求摄影光束的方位元素。这是解析摄影测量中的一个基本问题。它可视为光束法平差的一个特例，可单独用于航带法平差中精确解求外方位元素，而且也用于摄影机检定及其它方面。

进行单象空间后方交会时，一般均将地面点坐标看作固定点，即不包含有误差。然而实际上地面点坐标或是由大地测量方法，或是由解析摄影测量加密求得，它们并不是没有误差的。特别当人工辨认刺点时更是如此。因此将它们作为带权观测值参加平差计算应当更为合理。当然，近代测量平差中所用的验后方差估计方法也应当可以用在这里以确定它们的权。

为了试验验后权估计在航测中的应用可能性，特别为了将这种方法用于自检校光束法区域网平差，本文取单片后方交会这一特例作一些试验研究。现将试验研究的方法和所得到的结果整理如下。

一、数学模型和平差基本方程的求解

数学模型由共线方程给出[1]：

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\ y &= -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 x, y 为以象主点为原点的象坐标；

a_i, b_i, c_i 为旋转矩阵之元素，旋转矩阵取用罗德里格斯矩阵；

X, Y, Z 为相应物点在地面坐标系中的坐标；

X_s, Y_s, Z_s 为投影中心在地面坐标系中的坐标。

用台劳级数将(1)式线性化可得到误差方程式。当地面点坐标作为带权观测值时，误差方程式分为两类。

第一类为地面坐标观测值的误差方程式。

为便于验后权估计，将它归化到象比例尺。当地面坐标近似值取该点已知值时，对于第 i 点有：

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{权为 } p_{\Gamma i} \quad (2)$$

第二类为象点坐标观测值的误差方程式。当为竖直航空摄影时，对于第 i 点有：

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{x}{f} & -1 & 0 & -\frac{x}{f} & -\frac{xy}{f} & f\left(1+\frac{x^2}{f^2}\right) & y \\ 0 & 1 & \frac{y}{f} & 0 & -1 & -\frac{y}{f} & -f\left(1+\frac{y^2}{f^2}\right) & \frac{xy}{f} & -x \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \Delta X_s \\ \Delta Y_s \\ \Delta Z_s \\ \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_x \\ 1_y \end{bmatrix}_i \quad \text{权为 } p_{\phi i} \quad (3)$$

式中： ΔX_i ， ΔY_i ， ΔZ_i 为第 i 点地面坐标改正数（归化到象比例尺）；

ΔX_s ， ΔY_s ， ΔZ_s 为摄站坐标改正数（归化到象比例尺）；

Δa ， Δb ， Δc 为罗德里格斯矩阵三个参数的改正数；

$$\begin{bmatrix} 1_x \\ 1_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\ y + f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \end{bmatrix}$$

用各待求值之近似值代入求出。

当一片有 n 个点时，总的误差方程式可以分块矩阵形式表示为：

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{2n \times 3n} \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ L_\phi \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_\Gamma \\ P_\phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 $\Delta X_1 = [\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1, \dots, \Delta X_n, \Delta Y_n, \Delta Z_n]^T$ ；

$\Delta X_2 = [\Delta X_s, \Delta Y_s, \Delta Z_s, \Delta a, \Delta b, \Delta c]^T$ ；

$$A_{21} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \\ u_2 & \dots & \\ 0 & & u_n \end{pmatrix} \quad \text{其中 } u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x_i}{f} \\ 0 & 1 & \frac{y_i}{f} \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_i \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{x_i}{f} & -\frac{x_i y_i}{f} & f\left(1+\frac{x_i^2}{f^2}\right) & y_i \\ 0 & -1 & -\frac{y_i}{f} & -f\left(1+\frac{y_i^2}{f^2}\right) & \frac{x_i y_i}{f} & -x_i \end{pmatrix},$$

$$L_{\phi} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \quad L_i = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix}_i.$$

由(4)式可得到相应的法方程式为:

$$\begin{bmatrix} P_r + A_{21}^T P_{\phi} A_{21} & A_{21}^T P_{\phi} A_{22} \\ A_{22}^T P_{\phi} A_{21} & A_{22}^T P_{\phi} A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21}^T P_{\phi} L_{\phi} \\ A_{22}^T P_{\phi} L_{\phi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

简写成 $NX = W$ (5a)

误差方程式与法方程式之结构如图1所示。计算中为进行验后权估计, 存贮 A_{22} 。而法方程式系数只存下三角阵之非零元素, 处理成一维数组, 其元素共有 $24n + 21$ 个。

求解法方程式用分解为 LDL^T 的改进平方根法, 并同时求逆矩阵(即协因数阵)。

程序用 ALGOL 语言对 TQ-16 机编写。可接受各类立体坐标量测仪数据, 可按航线逐片计算。为节省计算时间, 先将地面点作为固定点求解外方位元素, 然后再将地面点作为带权观测值进行平差计算与验后权估计。

此外, 程序中还将误差方程式系数归化为同一数量级, 使法方程式系数矩阵有好的状态数。

二、验后权估计

解析摄影测量平差中, 各类观测值的权要比大地测量平差更难以确定。所以一些摄影测量工作者较早地就着手进行验后权估计的试验研究。本文选用了下列三种估计公式进行了一些试验。公式来源见参考文献[2]。

(i) Förstner 算法

$$q_i = \frac{V_i^T V_i}{r_i} \quad (6)$$

其中

$$r_i = n_i - p_i \operatorname{tr}(A_i Q A_i^T)$$

(ii) Ebner 算法

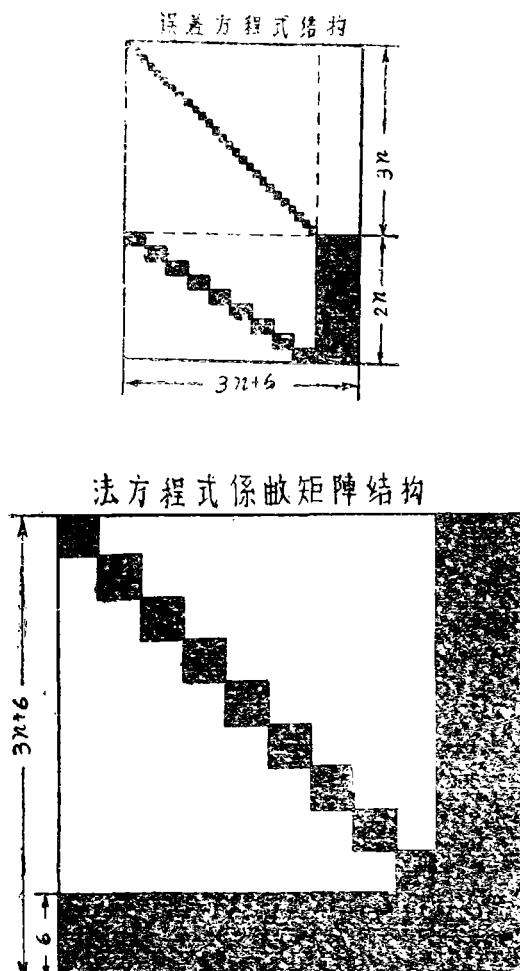


图 1

$$q_i = (V_i^T V_i + s_0^2 \operatorname{tr} \{ A_i Q A_i^T \}) / n_i \quad (7)$$

(iii) Helmert 严格公式

$$V_i^T P_{ii} V_i = S_{0i}^2 (n_i - 2 \operatorname{tr} \{ P_{ii} A_i Q A_i^T \}) + \sum_{j=1}^k S_{0j}^2 \operatorname{tr} \{ p_{ij} A_j Q A_i^T p_{ii} A_i Q A_j^T \} \quad (8)$$

(A) 分两组进行验后权估计:

若令 $p_{ri} = p_r$, $p_{\phi i} = p_\phi$, 即地面各点坐标为等精度观测值, 象片坐标亦为等精度观测值, 则此时只需估计 q_r 和 q_ϕ 或 s_{0r}^2 和 $s_{0\phi}^2$ 求出 p_r 和 p_ϕ 。不妨令 $p_\phi = 1$, 并将 Q 阵分块表示成

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

考虑误差方程式 (4) 之系数阵特点, 上列估计公式可作适当化简, 成为便于解算的形式。

(i) Försner 算法:

地面坐标观测值方差之估值 q_r 为:

$$\left. \begin{aligned} q_r &= \frac{V_1^T V_1}{r_1} \\ r_1 &= 3n - p_r \sum_{i=1}^{3n} q_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

象片坐标观测值方差之估值 q_ϕ 为:

$$\left. \begin{aligned} q_\phi &= \frac{V_2^T V_2}{r_2} \\ r_2 &= 2n - \operatorname{tr} \{ A_\phi Q A_\phi^T \} \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

而 $A_\phi Q A_\phi^T = A_{21} Q_{11} A_{21}^T + A_{22} Q_{21} A_{21}^T + A_{21} Q_{21}^T A_{22}^T + A_{22} Q_{22} A_{22}^T$

$$\therefore \operatorname{tr} \{ A_\phi Q A_\phi^T \} = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \{ u_i \bar{Q}_{ii} u_i^T \} + 2 \operatorname{tr} \{ A_{22} Q_{21} A_{21}^T \} + \operatorname{tr} \{ A_{22} Q_{22} A_{22}^T \} \quad (11)$$

式中 \bar{Q}_{ii} 为协因素阵中第 i 点地面坐标相应的 3×3 子矩阵。

$$\text{而且 } r_1 + r_2 = r = 2n - 6, \quad (10c)$$

可作检核。

(ii) Ebner 算法:

类似有:

$$q_r = \left(V_1^T V_1 + s_0^2 \sum_{i=1}^{3n} q_{ii} \right) / 3n \quad (12a)$$

$$q_\phi = (V_2^T V_2 + s_0^2 \operatorname{tr} \{ A_\phi Q A_\phi^T \}) / 2n \quad (12b)$$

$\operatorname{tr} \{ A_\phi Q A_\phi^T \}$ 同样由 (11) 式求出

(iii) Helmert 严格公式:

根据 (8) 式对两类观测值得到:

$$V_1^T p_r V_1 = s_{0r}^2 (3n - 2p_r \operatorname{tr} \{ Q_{11} \} + p_r^2 \operatorname{tr} \{ Q_{11} Q_{11} \}) +$$

$$+ s_{\theta}^2 \text{tr} \left\{ (A_{21} A_{22}) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} p_r(E, o) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{21}^T \\ A_{22}^T \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V_2^T V_2 = & s_{\theta}^2 r \text{tr} \left\{ p_r(E, o) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{21}^T \\ A_{22}^T \end{pmatrix} (A_{21} A_{22}) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \\ & + s_{\theta}^2 (2n - 2 \text{tr} \{ A_{\phi} Q A_{\phi}^T \} + \text{tr} \{ (A_{\phi} Q A_{\phi}^T A_{\phi} Q A_{\phi}^T) \}) \end{aligned} \quad (14)$$

注意到(13)式中 s_{θ}^2 的系数与(14)式 $s_{\theta}^2 r$ 之系数相等, 所以可以令:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 3n - 2p_r \text{tr} \{ Q_{11} \} + p_r^2 \text{tr} \{ Q_{11}^2 \} = 3n - 2p_r \sum_{i=1}^{3n} q_{ii} + p_r^2 \sum_{i=1}^{3n} q_{ii}^2, \\ a_{22} &= 2n - 2 \text{tr} \{ A_{\phi} Q A_{\phi}^T \} + \sum_{i=1}^{2n} w_i^2, \quad (W = A_{\phi} Q A_{\phi}^T), \\ a_{12} = a_{21} &= \text{tr} \left\{ (A_{21}, A_{22}) Q \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} p_r(E, o) Q \begin{pmatrix} A_{21}^T \\ A_{22}^T \end{pmatrix} \right\} \\ b_1 &= V_1^T p_r V_1 \\ b_2 &= V_2^T V_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

下面只需对求 a_{21} 作进一步化简:

$$a_{21} = p_r \text{tr} \{ R R^T \} = p_r \sum_{i,j} r_i^2; \quad (16)$$

其中 $R = (A_{21} A_{22}) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = (A_{21} Q_{11} + A_{22} Q_{21})$

而

$$A_{21} Q_{11} = \begin{pmatrix} u_1 \bar{Q}_{11} & u_1 \bar{Q}_{12} \cdots u_1 \bar{Q}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ u_n \bar{Q}_{n1} & u_n \bar{Q}_{n2} \cdots u_n \bar{Q}_{nn} \end{pmatrix}$$

\bar{Q}_{ij} 为 i 点和 j 点在 Q_{11} 中相应的子块矩阵, 使计算尽可能按小块进行。

于是 $s_{\theta}^2 r$ 和 $s_{\theta}^2 \phi$ 可由下列联立方程组求出

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{\theta}^2 r \\ s_{\theta}^2 \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

进而

$$\begin{bmatrix} q_r = s_{\theta}^2 r / p_r \\ q_{\phi} = s_{\theta}^2 \phi \end{bmatrix} \quad (18)$$

最后所要估计之权 p_r 统一由下式给出

$$p_r = q_{\phi} / q_r \quad (19)$$

解算均用迭代法。中止迭代的标准是

$$\left. \begin{aligned} |q_{r+1} - p_r| &< \varepsilon_1 \quad \text{或} \\ s_{\theta}^2 r / s_{\theta}^2 \phi &= 1 \pm \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

而且由于 $p_4 = 1$ ，所以收敛时应有 $q_4 = s_0^2$ 。

此外不难得出以下两个关系式

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = a_{11} + a_{12} \\ r_2 = a_{21} + a_{22} \end{array} \right\} \quad (21)$$

这也可作为计算正确与否的校核。

(B)、对地面坐标进行逐点验后权估计

考虑到利用全野外控制点进行空间后交，此时各点地物明显程度不一，辨认刺点的精度往往不等，有时甚至差别较大。若把刺点误差纳入到地面点坐标误差中去，则可视各地面点属于不同方差的正态母体 $N(\mathbf{o}, \sigma_i^2)$ 。逐点进行验后方差估计就是要求出 σ_i 的估值 s_i 来。而经过相对定向和模型连接消除了粗差的象坐标，此时可认为属于同一正态母体 $N(\mathbf{o}, \sigma_4^2)$ ，求出之估值为 s_4 。显然当某片有 n 个点时，则分组数为 $n+1$ 。

考虑到用 Helmert 严格公式计算量太大，这里仅考虑用 Förstner 算法。

对各地面点观测值，

$$q_i = \frac{\mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_i}{r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10d)$$

其中

$$r_i = 3 - p_i \sum_{j=2}^{\infty} Q_{3(i-j), 3(i-j)}.$$

对象片坐标观测值仍可接 (10b) 式计算，但为了节省计算时间，可采用下式：

$$r_4 = r - \sum_{i=1}^n r_i \quad (10e)$$

这在光束法区域网平差中尤为可取。

关于验后方差估计时迭代计算的收敛标准，由于刺点精度可能差别较大，故采用下式：

$$|g_{v+1} - q_v| < \epsilon_1 \text{ 或 } \frac{|q_{v+1} - q_v|}{q_v} < \epsilon_3 \quad (20-a)$$

本文试验中取 $\epsilon_1 = 0.001$, $\epsilon_3 = 0.10$

三、试验结果的分析

按上述数学模型和各种验后方差估计方法编写了 TQ-16 计算机上的 ALGOL 源程序。

用来计算的模拟象片，按航线加入了均值为零，象坐标均方差为 $10\mu\text{m}$ ，地面坐标均方差为 $5\mu\text{m}$ 的正态伪随机误差。模拟象片之 $f_k = 150\text{mm}$, $m = 32000$, 象幅为 $23 \times 23\text{cm}^2$ 。每片有 9 个标准点。

在所有的计算中，令象坐标量测值的权恒为 1，由各种验后方差估计结果求地面点坐标量测值的权。

(A) 分两组进行验后权估计的结果

表 1 列出了用 Ebner 和 Förstner 两种算法对某一片模拟象片计算的结果（其余各片及实

际象片结果均雷同)。从表1看出:

表1 按象坐标和地面坐标分两组进行验后方差估计的结果

象坐标与地面坐标 观测值初始权之比		1 : 0.3	1 : 1	1 : 5	1 : 100	1 : 10000	模拟象片 理论值
外 方 位 元 素	X _s (米)	140005.07	140005.04	140004.99	140004.96	140004.96	140005.00
	Y _s (米)	106002.31	106002.34	106002.37	106002.40	106002.40	106002.00
	Z _s (米)	4797.19	4797.19	4797.20	4797.20	4797.20	4797.00
	φ(分)	99.73	99.72	99.70	99.69	99.68	99.88
	ω(分)	-11.20	-11.18	-11.15	-11.14	-11.13	-11.16
	κ(分)	-0.25	-0.25	-0.26	-0.26	-0.26	-0.26
外 方 位 元 素 的 均 方 差	m _{x_s} (米)	±0.77	±0.75	±0.73	±0.72	±0.72	
	m _{y_s} (米)	±0.71	±0.70	±0.69	±0.69	±0.69	
	m _{z_s} (米)	±0.26	±0.25	±0.24	±0.23	±0.23	
	m _φ (分)	±0.47	±0.46	±0.44	±0.43	±0.43	
	m _ω (分)	±0.41	±0.40	±0.39	±0.38	±0.38	
	m _κ (分)	±0.16	±0.16	±0.16	±0.17	±0.17	
验 后 方 差 估 计 结 果	象坐标 量测中 误差*	E	±6.7	±10.0	±13.1	±14.5	±14.5
		F	±6.7	±10.1	±13.8	±14.7	±14.5
	地面坐 标量测 中误差*	E	±12.1	±9.9	±5.8	±1.4	±0.1
		F	±12.1	±9.8	±5.8	±1.4	±0.1
	验后 权之比	E	1 : 0.3	1 : 1.0	1 : 5.0	1 : 100.0	1 : 10000.0
		F	1 : 0.3	1 : 1.1	1 : 5.2	1 : 103.8	1 : 10374.2
迭 代 次 数	E	2	2	2	2	2	
	F	2	2	2	2	2	

*量测中误差均以象片上的微米为单位;

** E 表示 Ebner 算法, F 表示 Förstner 算法。

(i) 近似垂直摄影的单象空间后方交会, 若分两组进行验后方差估计, 求出的权收敛于所给定的初值, 两次迭代即收敛。这意味着不同的初值估求的验后权也不同。因此不可能用它来正确估计实际的象坐标和地面坐标的量测精度。

(ii) 不论观测值的权为何变化, 所求解的外方位元素及其测定精度几乎均无变化。观测值权的变化只不过是改正数 v 的分配的变化(见图 2)。

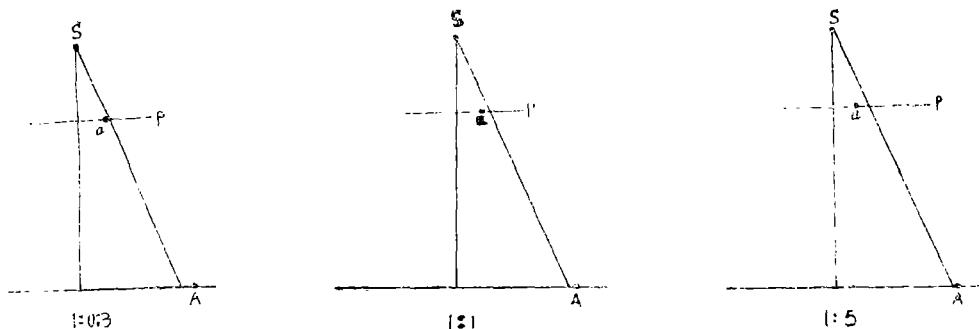


图 2 象坐标与地面坐标观测值不同的权之比时改正数的分配

可见, 在近似垂直摄影时, 单象空间后方交会中, 按二组观测值用验后方差估计得不到验后权的唯一解, 这意味着在该命题下:

(i) 地面坐标与象片坐标并测值的精度比的变化不影响外方位元素的解求精度。因此诸如象片刺点误差, 将它算到象坐标测定误差或算为地面坐标测定误差, 是无所谓的。

(ii) 将地面坐标视为一组等精度观测值带权参加平差并不会导致后方交会精度的改善。在这种情况下倒不如将它们作为固定点进行后方交会, 从而使计算简捷。当采用全部地面标志点, 点的测定精度又相同时, 就属于这种情况。

用 Helmert 严格标法对两组方差进行求解时, 检核用的(21)式得到满足, 但求解中出现了负方差。为了分析其原因, 对(17)式方程组解的精度进行估计。

(17) 式中系数矩阵 A 之状态数为(以权初值比为 1 : 5 之模拟象片为例):

$$\text{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} = 938.25$$

A 行列式的值为

$$|A| = 0.018901708$$

若设 $\|\delta A\| = 0$, 由计算数学可知

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}_2(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (22)$$

而 $b_1 = V_1^T p_r V_1$, $b_2 = V_2^T p_r V_2$, 可求出

$$\|b\| = 0.0003524$$

该例下 $\|x\|$ 可由 Förstner(或 Ebner) 法估计结果求得:

$$\|x\| = 0.000098994$$

$\|\delta b\|$ 为计算 $V^T P V$ 的误差, 当象片量测中误差为 $\pm 10 \mu m$ 时, 可取

$$\|\delta b\| = (0.002)^2 = 0.000004$$

以上数值代入(22)式得到

$$\|\delta x\|_{\text{估}} \leq 0.001054$$

而用 Helmert 法求出之方差为：

$$\begin{cases} s_{\theta r}^2 = -0.000250058 \\ s_{\theta \phi}^2 = +0.000366475 \end{cases}$$

由 Förster 法求出之相应值为：

$$\begin{cases} s_{\theta r}^2 = 0.00006845 \\ s_{\theta \phi}^2 = 0.00007056 \end{cases}$$

于是 $\|\delta x\|_{\text{实际值}} = 0.000436 < \|\delta x\|_{\text{估}}$

因此，用 Helmert 解求中出现的负方差，是否可以解释为，由于该命题下，方程组(17)系数矩阵的状态不好引起的。这是从另一种表现形式说明上述分两组进行验后权估计是不定的。这里附带指出，用 Kubik 解法时也会出现负方差（见参考文献[3]）。

(B) 逐点进行验后权估计的试验结果

取全野外布点之实际航线进行试验。该资料 18×18 厘米² 象幅， $f = 114$ 毫米， $m = 10500$ ，每片象点不少于 9 个。

由于事先不可能知道各点之刺点精度，所以在计算中取各地面控制点权 p_{ri} 为相同的某一数值。现将 p_{ri} 初值取为 5, 1, 和 0.3 进行计算的结果列于表 2。为作比较，同时列入地面点为固定点时的计算结果。由于各片结果基本相似，表 2 仅列其中两片结果。

从试验结果看出：

(i) 在单象空间后交中逐点进行验后方差估计， p_{ri} 之初值取 0.3~5 时，估求之方差基本相同，求出之外方位元素也基本相同，即有一致收敛的解。

(ii) 逐点进行验后方差估计后，使后方交会解的理论精度提高了，而且能够顾及各地面点的不同刺点误差（其前提是象点按同一精度测得且不存在粗差）。

(iii) 与地面点为固定点相比较，此时象片量测中误差明显地减小了，由原来的 49~84 微米，减小到 15~38 微米。显然后者是与 1818 立体坐标仪上的量测精度相适应的。

由于用实际航线，并不知道实际的刺点误差和外方位元素值，所以又用上述模拟象片资料进行带刺点误差的模拟试验。此时取图 3 之相邻两片，其中的点 6 的 Y 坐标加 1 米（相当于象片上刺点误差 33 微米），点 7 的 X 坐标减去 2 米（相当于刺点误差 66 微米）。然后进行逐点验后方差估计，计算结果列于表 3。

从表 3 可以看出：

（表 3 见 61 至 62 页之间插表）

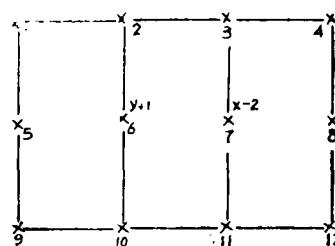


图 3

表 2 实测象片逐点进行验后方差估计的结果

平差 结果 △ 象 片 号	项 目	A				B			
		p _{r_i} 初始值	5	1	0.3	地 面 点 为 固 定 点	5	1	0.3
求出之验后方差估计值(微米)	S ₁	±41	±42	±42		±73	±72	±73	
	S ₂	0	0	0		0	±1	±1	
	S ₃	0	0	1		±14	±14	±2	
	S ₄	±12	±15	±16		0	0	0	
	S ₅	±53	±52	±52		±91	±89	±85	
	S ₆	±20	±21	±22		±149	±148	±147	
	S ₇	±8	±8	±8		±28	±28	±20	
	S ₈	±80	±81	±81		±30	±27	±44	
	S ₉	±110	±110	±110		±1	±5	0	
	S ₁₀	±29	±28	±28		±19	±19	±17	
单位权中误差	S ₀	±29	±28	±28	±52	±20	±20	±17	±72
求出之外方位元素及其理论精度	X _s ↑	4527.65	4527.67	4527.67	4526.98	4730.88	4730.96	4731.25	4731.50
	Y _s (米)↓	2775.26	2775.26	2775.26	2773.51	3289.57	3289.70	3289.99	3289.88
	Z _s ↓	1952.16	1952.16	1952.17	1952.57	1954.98	1954.98	1954.82	1955.15
	φ↑	58.0	58.0	58.0	63.5	57.4	57.0	55.9	56.8
	ω(分)	-6.1	-6.1	-6.1	-6.8	33.0	32.9	32.3	31.1
	κ↓	-4.9	-4.9	-4.9	-5.6	-0.1	-0.2	-0.3	-0.1
	m _{Xs} ↑	±0.73	±0.72	±0.72	±0.85	±0.48	±0.49	±0.41	±1.25
	m _{Ys} (米)↓	±0.67	±0.67	±0.67	±0.81	±0.39	±0.40	±0.37	±1.06
	m _{Zs} ↓	±0.23	±0.22	±0.22	±0.25	±0.15	±0.15	±0.14	±0.36
	m _φ ↑	±2.04	±2.01	±2.00	±2.27	±1.13	±1.15	±0.96	±3.05
	m _ω (分)↓	±1.88	±1.86	±1.86	±2.22	±1.24	±1.29	±1.16	±3.21
	m _κ ↓	±0.66	±0.65	±0.65	±0.82	±0.42	±0.41	±0.37	±1.11

(i) 与实际象片一样, 当考虑地面点不等精度时, 逐点进行验后方差估计能得到基本一致收敛的解。

(ii) 逐点进行验后权估计来顾及刺点误差, 能够提高精度。其中外方位元素测定的真误差中, 点位差由 $1.04\sim1.66$ 降为 $0.84\sim1.07$ (米), $\Delta\alpha$ 由 $0.48\sim0.58$ 降为 $0.33\sim0.35$ (分)。平差后地面控制点的中误差由 ±0.46 降为 $\pm0.19\sim\pm0.28$ 米。效果是明显的。

(iii) 实际方差估值与理论方差估值并不完全一致。估计是由于每组观测值仅有三个子样, 而且, 单象空间后交会中诸未知数之间存在一定的相关。

四、初步结论

通过本文的试验, 可得出以下初步结论。

(1) 本文中列举的验后方差估计方法, 可以在解析摄影测量中得到应用。

(2) 单象空间后方交会时, 如果地面点坐标为等精度观测值(譬如人工标志点), 则不需要将它处理成带权观测值求解, 而可作为固定点解标。

(3) 如果地面点坐标为非等精度观测值(譬如人工刺点), 则应逐点进行验后权估计, 以改善平差结果的精度。此时可从权初值均为 1 开始进行迭代计算。

(4) 通过对全野外布点资料进行空间后方交会, 表明人工刺点的误差是很大的。因此用这样的数据来检验解析空中三角测量的精度, 显然是不合适的。

参 考 文 献

[1] 王之卓编著: 《摄影测量原理》 测绘出版社 1979 年 10 月

[2] 李德仁: 验后方差估计的几种方法 《武测资料》 1981 年

[3] E.Link, G.Waldbauer: Erfahrungen mit der a posteriori Schätzung von Varianzen und Kovarianzen photogrammetrischer Modellkoordination
《ZFV》 97(1972) H 5

On the Space Resection With Ground Coordinates as Weighted

Observations and a Posteriori Weight Estimation

Li Deren

Abstract

This paper deals with the application of a posteriori variance estimation in space resection of a single photograph. In this case the weights to be estimated are those of the ground coordinates and of the image coordinates.

If the ground coordinates have equal variances such as the signalized points, we may consider them as fixed points rather than weighted observations and needn't perform a posteriori variances estimation. But if their variances are not equal, such as in the case of using natural objects (the images of which have to be identified and transferred), they should be regarded as weighted observations and their variances should be estimated point by point. In this way the accuracy of adjusted results can be improved.