

# 在等高线地形图上量算表面积各种方法 的分析、比较和改进

李长明

(贵州大学)

**[摘要]** 在等高线地形图上量算面积的方法已有五种之多，在文献[3]中曾着重在繁简方面对各种方法作了详细的比较，但未指出各种方法的内在联系，也没有比较各种方法所得结果在怎样的程度上逼近表面的真实面积。

本文首先由面积的基本公式和近似计算的原理，指出各种方法的来源和其间的相互关系，并导出了这些方法所算得数值之间的不等式，同时又在逼近真实面积的程度上比较了各种方法的优劣。接着用初等方法，研究了各种渐近值对怎样的表面才趋于真实面积，从而使其在实际应用时，能据此选出最合理的计算公式。

其次，利用证明上述问题的方法，提出了简化计算的图解法。使精确性最高但计算繁难的华罗庚、王元方法变得简易可行。

最后，根据同样的原理提出了一组新的公式，並与原公式相比，证明了新方法具有同等的精确性，而且省略了在地形图上量测面积的过程，因此在没有求积仪的情况下，就显示出了新方法的实用价值。

## 一、计算面积的两个基本公式

### 1、直圆台、直圆锥的侧面积

设直圆台上、下二底之周长和半径分别为 $l_1$ ,  $l_2$  和  $r_1$ ,  $r_2$ ，又斜高（即母线之长）为 $H$ ，则其侧面积为：

$$S = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \cdot H \quad (1)$$

设 $h$ 为圆台的高，则有

$$H = \sqrt{\delta^2 + h^2}$$

其中  $\delta = r_2 - r_1$

将上式代入(1)式得：  $S = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \sqrt{\delta^2 + h^2}$

令：

$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) \delta \\ C = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) h \end{array} \right\} \quad (1')$$

则得侧面积的另一表达式：

$$S = \sqrt{B^2 + C^2} \quad (2)$$

又设 $\varphi$ 为母线与底面之夹角，即侧面的坡度。其倾斜率则为：

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\delta} = \frac{C}{B} \quad (3)$$

以  $C = B \cdot \operatorname{tg} \varphi$  代入 (2) 中, 则有

$$S = B \cdot \sec \varphi \quad (4)$$

式中  $B$  为圆台二底面积之差, 亦即侧面在底上的投影面积, 而  $C$  的几何意义是一直圆柱的侧面积, 其底等于圆台的中截面, 而其高与圆台的高相同 (如图 1)。仿照文献 [1], 称此直圆柱为圆台的“中间直立隔板” (简称直立隔板)。

当上底为尖点时, 直圆台变为直圆锥, 所以公式(1)——(4)对直圆锥也完全适用。

## 2. 斜面图形之面积表达式

设一平面图形的倾斜角为  $\varphi$ , 且知其水平投影的面积为  $B$  (如图 2), 则  $B$  与原图形之面积  $S$  有下述关系

$$B = S \cdot \cos \varphi$$

即斜面图形的面积  $S$  仍可由 (4) 式计算。

又作一直立平面, 使其平行于斜面与水平面的交线, 若原图形在此直立面上的投影为  $C$ , 则有

$$C = S \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = S \cdot \sin \varphi$$

由此又得  $\sqrt{B^2 + C^2} = S$ , 即斜面图形的面积也可用 (2) 式计算。同样称  $C$  为斜面图形直立隔板的面积, 特别是当斜面图形为一梯形, 且上、下底平行于水平面时, 其水平投影和直立隔板皆为梯形, 其面积仍可用 (1') 式表示 (如图 2)。

综合上述, 斜面图形的面积和直圆台、直圆锥的侧面积都有两种算法: 1) 根据水平投影和坡度的大小按公式 (4) 计算, 2) 利用水平投影和直立隔板的面积按公式 (2) 计算。下面就利用此二法导出表面积的各种渐近公式。

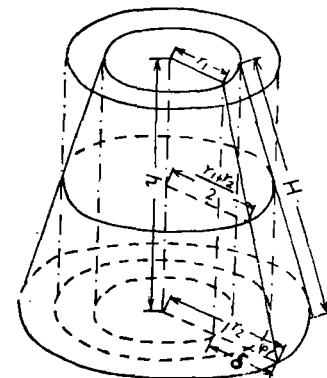


图 1

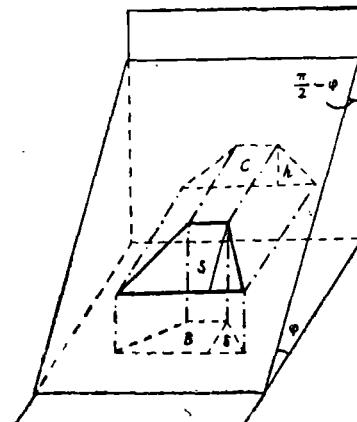


图 2

## 二、各种方法的来源和其间的关系

为了便于看出各种方法彼此之间的联系, 首先介绍精度最高的方法, 然后逐步简化而得出其他方法。

## 1、分块计算法——华罗庚、王元法之一

这种方法的想思是：先用等高线( $l_i$ ) ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 和辐射线( $\theta_j$ ) ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) 将地形图分成  $m \times n$  个小块  $d_{i,j}$  (如图 3)，并将这些小块表面积  $S_{i,j}$  (如图 4) 近似的看成斜面梯形，而以公式(2)计算，然后相加，即得整个表面积  $S$  的渐近值  $\bar{S}_I$ ：

$$S \approx \bar{S}_I = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_{i,j}^2 + e_{i,j}^2} \quad (5)$$

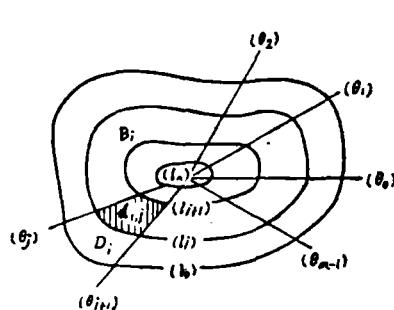


图 3

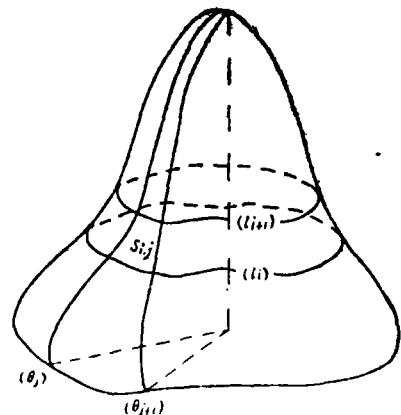


图 4

式中  $\bar{e}_{i,j} = \frac{1}{2} (l_{i,j} + l_{i+1,j}) \cdot \Delta h$  为小块  $d_{i,j}$  上直立隔板的面积。而  $l_{i,j}$ ,  $l_{i+1,j}$  分别表示等高线( $l_i$ ), ( $l_{i+1}$ )被二辐射线( $\theta_i$ ), ( $\theta_{i+1}$ )所截的线段长度，又  $\Delta h$  表示相邻等高线的高程差。

其次以梯形的倾斜角作为  $d_{i,j}$  上的近似坡度，则由 (3) 式得：

$$\tan \varphi_{i,j} = \frac{\bar{e}_{i,j}}{d_{i,j}} \quad (6)$$

再接公式 (4)，又得：

$$S \approx \bar{S}_I = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} d_{i,j} \cdot \sec \varphi_{i,j} \quad (7)$$

因  $l_{i,j}$  与  $l_{i+1,j}$  相差甚小，故为简便计，取  $e_{i,j} = l_{i,j} \cdot \Delta h$  为直立隔板的面积，则相应有：

$$S \approx \bar{S}_I = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_{i,j}^2 + e_{i,j}^2} \quad (5')$$

及

$$S \approx \bar{S}_I = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} d_{i,j} \cdot \sec \varphi_{i,j} \quad (7')$$

式中倾斜角  $\varphi_{i,j}$  的确定式为：

$$\tan \varphi_{i,j} = \frac{e_{i,j}}{d_{i,j}} \quad (6')$$

上述公式(5')即华罗庚、王元在文献[1]中提出的方法。

## 2. 分区计算法 —— 华罗庚、王元法之二

将( $\theta_i$ )与( $\theta_{i+1}$ )之间的各小块合并为一区 $D_i = \sum_{j=0}^{n-1} d_{i,j}$  (见图3)，以 $\bar{E} = \sum_{j=0}^{n-1} e_{i,j}$  和 $E_i = \sum_{j=0}^{n-1} e_{i,j}$  为其直立隔板的面积，并按式(2)计算此区上的表面积，然后相加即得一组新的渐近公式：

$$S \approx \bar{\sigma}_I = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{D_i^2 + \bar{E}_i^2} \quad (8)$$

和

$$S \approx \sigma_I = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{D_i^2 + E_i^2} \quad (8')$$

式(8')即华罗庚、王元在文献[1]中新提出的另一方法。

又若在 $D_i$ 中，按各小块 $d_{0,i}, d_{1,i}, \dots, d_{n-1,i}$ 的大小求出其倾斜率的加权平均值，并作为 $D_i$ 近似的倾斜率，即有：

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi}_i = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{d_{i,j}}{D_i} \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi_{i,j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e_{i,j}}{D_i} = \frac{\bar{E}_i}{D_i} \quad (9)$$

和

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{d_{i,j}}{D_i} \right) \operatorname{tg} \varphi_{i,j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e_{i,j}}{D_i} = \frac{E_i}{D_i} \quad (9')$$

因此(8)与(8')式又可写为：

$$S \approx \bar{\sigma}_I = \sum_{j=0}^{n-1} D_i \cdot \sec \bar{\varphi}_i \quad (10)$$

和

$$S \approx \sigma_I = \sum_{j=0}^{n-1} D_i \cdot \sec \varphi_i \quad (10')$$

## 3. 分层计算法——鮑曼 (Бауман) 法

同上节的想法一样，将( $l_i$ )与( $l_{i+1}$ )之间的各小块合并为一层 $B_i = \sum_{j=0}^{n-1} d_{i,j}$  (如图3,4)，

并对各层近似的看成圆台，而用(2)式算其侧面积，最后相加，即得渐近公式：

$$S \approx \bar{\sigma}_I = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + \bar{C}_i^2} \quad (11)$$

式中 $\bar{C}_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1}) \cdot \Delta h$ ，即鮑曼提出的计算公式。华罗庚、王元在文献[1]中建议用 $C_i = l_i \cdot \Delta h$ 代替 $\bar{C}_i$ ，则又得：

$$S \approx \sigma_I = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2} \quad (11')$$

由于 $l_i = \sum_{j=0}^{n-1} l_{i,j}$

故有:

$$\bar{C}_i = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{e}_{i,j}, \quad C_i = \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j}$$

在各层中按各小块的大小用加权平均值, 求出各层近似的倾斜率:

$$\operatorname{tg} \bar{\psi}_i = \sum_{j=0}^{m-1} \left( \frac{d_{i,j}}{B_i} \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi_{i,j} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\bar{e}_{i,j}}{B_i} = \frac{\bar{C}_i}{B_i} \quad (12)$$

和

$$\operatorname{tg} \psi_i = \sum_{j=0}^{m-1} \left( \frac{d_{i,j}}{B_i} \right) \operatorname{tg} \varphi_{i,j} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e_{i,j}}{B_i} = \frac{C_i}{B_i} \quad (12')$$

由此可将(11)与(11')式变为:

$$S \approx \bar{\sigma}_{\bar{I}} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \cdot \sec \bar{\psi}_i \quad (13)$$

和

$$S \approx \sigma_{\bar{I}} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \cdot \sec \psi_i \quad (13')$$

#### 4、整体计算法——伏尔科夫 (Волков) 法

最简便的计算方法是将整个表面当成直圆锥, 并按(2), (4)式求其近似值, 这时以  $B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$  作为底面积, 而以  $\bar{C} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{C}_i$  或  $C = \sum_{i=0}^{n-1} C_i$  为直立隔板的面积, 故有:

$$S \approx \bar{\sigma}_{\bar{N}} = \sqrt{B^2 + \bar{C}^2} \quad (14)$$

$$S \approx \sigma_{\bar{N}} = \sqrt{B^2 + C^2} \quad (14')$$

由(3)式定出整体的平均倾斜率

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{\bar{C}}{B} \text{ 和 } \operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{B}$$

则可将(14), (14')式变为:

和

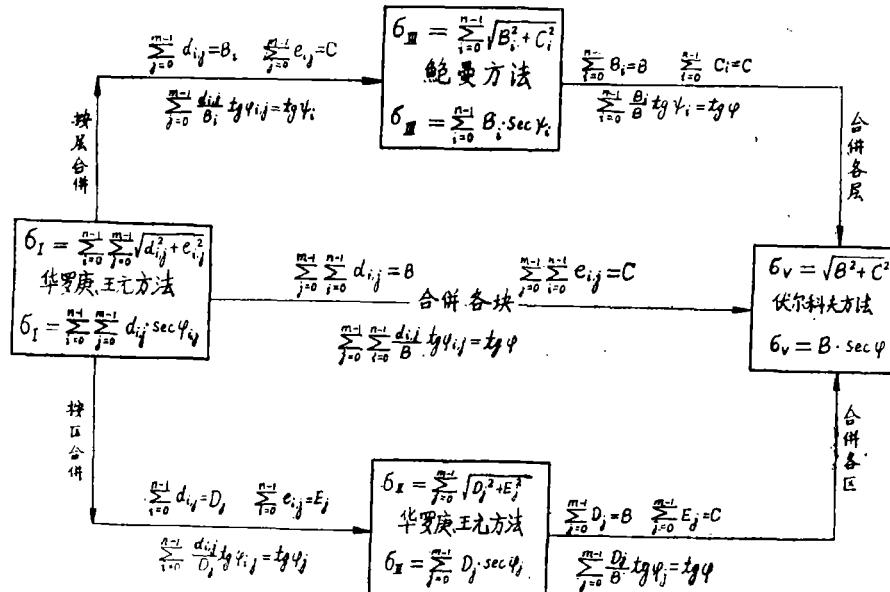
$$S \approx \bar{\sigma}_{\bar{N}} = B \cdot \sec \bar{\varphi} \quad (15)$$

$$S \approx \sigma_{\bar{N}} = B \cdot \sec \varphi \quad (15')$$

因  $C = \sum_{i=0}^{n-1} C_i = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \cdot \Delta h$ , 故(15')式即伏尔科夫提出的计算公式。

除上述四种方法外, 还有按坡度分区的计算法 (参阅文献[2]), 由于此种分区法与上述各法原则上的不同, 故不再论及。

综合上述四种方法, 可知其间相互关系如下图表:



### 三、各种渐近值在数值大小上的比较

#### 1、已有结果的简述

在地形图上以制高点为极(原点)引进极坐标, 设高为z的等高线方程为

$$\rho = \rho'(z, \theta)$$

式中

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

利用在极坐标中的面积公式和中值定理, 则有:

$$d_{i,j} = -\rho(z'_i, \theta'_i) \frac{\partial \rho(z'_i, \theta'_i)}{\partial z'_i} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z \quad (16)$$

式中  $\Delta \theta = \frac{2\pi}{m}$ ,  $\Delta z = \frac{h}{n} = \Delta h$ ;  $\theta_i \leq \theta'_i \leq \theta_{i+1}$ ,  $z_i \leq z'_i \leq z_{i+1}$

又由弧长公式和中值定理得:

$$e_{i,j} \approx e_{i,j} = \sqrt{\rho^2(z_i, \theta''_i) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta''_i)}{\partial \theta}\right)^2} \Delta \theta \cdot \Delta z \quad (17)$$

式中  $\theta_i \leq \theta''_i \leq \theta_{i+1}$ 。

再根据积分理论, 以(5)、(8)、(11)和(14)式分别得出(参阅文献[1]):

$$\lim_{\substack{\Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \overline{\sigma}_I = \lim_{\substack{\Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sigma_I = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta dz \quad (18)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \overline{\sigma}_I = \lim_{\substack{\Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sigma_I = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\right)^2 + \left(\int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} dz\right)^2} d\theta \quad (19)$$

$$S_{II} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sigma_{II}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sigma_{II}}{\Delta z} = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} dz \quad (20)$$

$$S_{IV} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sigma_{IV}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sigma_{IV}}{\Delta z} = \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} \quad (21)$$

由曲面的面积公式可知  $S_I = S$ 。

在文献[1]中, 华罗庚和王元曾引入一个复变函数, 并利用积分理论证明了两组不等式:

$$S_{IV} \leq S_{II} \leq S_I = S \quad S_{IV} \leq S_{I_1} \leq S \quad (22)$$

但由此不能得出各渐近公式之间相应的不等式。为此, 本文先用初等方法对各渐近公式作一比较, 然后利用简单的极限观念得出包含上述结果的一些结论, 兹先证以下引理。

## 2. 一个引理

设  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  是任意两组正实数, 则恒有:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i\right)^2} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{p_i^2 + q_i^2} \quad (23)$$

其等号成立的充要条件是:

$$\frac{q_0}{p_0} = \frac{q_1}{p_1} = \dots = \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = K$$

证 作直角三角形  $OPQ$ , 使二直角边  $OP = \sum_{i=0}^{n-1} p_i$ ,  $PQ = \sum_{i=0}^{n-1} q_i$ , 则斜边

$$OQ = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i\right)^2} \quad (\text{如图 5})。$$

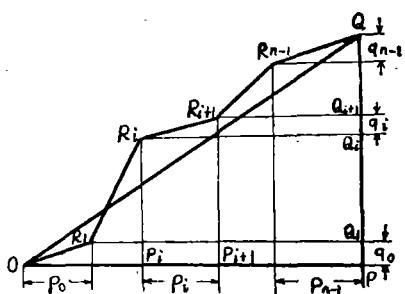


图 5

今在  $OP$  上截取  $OP_1 = p_0$ ,  $P_1P_2 = p_1$ , ...,  $P_{n-2}P_{n-1} = p_{n-1}$ , 则  $P_{n-1}P = p_{n-1}$ 。  
令  $P_0 \equiv O$ ,  $P_n \equiv P$ , 则在  $P_iP_{i+1} = p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ )。

又在  $PQ$  上, 截取  $PQ_1 = q_0$ ,  $Q_1Q_2 = q_1$ , ...,  $Q_{n-2}Q_{n-1} = q_{n-2}$ , 则  $Q_{n-1}Q = q_{n-1}$ 。

令  $Q_0 \equiv P$ ,  $Q_n \equiv Q$ , 则有  $Q_iQ_{i+1} = q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ )。

再过  $P_i$ ,  $Q_i$  分别作平行于另一直角边的直线, 设此二直线的交点为  $R_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ ), 但  $R_0 \equiv O$ ,  $R_n \equiv Q$ 。

顺次连接各点  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n$ , 则有  $R_iR_{i+1} = \sqrt{p_i^2 + q_i^2}$ , 故折线  $OR_1R_2 \dots R_{n-1}Q$  的长应为  $\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{p_i^2 + q_i^2}$  这显然不比连接两端点的线段之长。

$OQ = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i\right)^2}$  还小, 故不等式(23)确实成立。

当折线  $OR_1R_2 \dots R_{n-1}Q$  各段的方向完全相同时, 其长才等于连结两端线段的长。然而折线的各段  $R_iR_{i+1}$  倾斜角的正切恰为  $q_i/p_i$ , 故不等式(23)中等号成立的充要条件是:

$$\frac{q_0}{p_0} = \frac{q_1}{p_1} = \dots = \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}$$

### 3. 各种计算公式的比较

利用上述引理, 即得:

$$\sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i\right)^2} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$$

和

$$\sqrt{B_i^2 + C_i^2} = \sqrt{\left(\sum_{j=0}^{m-1} d_{i,j}\right)^2 + \left(\sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j}\right)^2} \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_{i,j}^2 + e_{i,j}^2}$$

故有不等式:

$$\bar{\sigma}_W \leq \bar{\sigma}_I \leq \bar{\sigma}_I \quad (24)$$

同理有:

$$\sigma_W \leq \sigma_I \leq \sigma_I \quad (24')$$

和

$$\bar{\sigma}_W \leq \bar{\sigma}_I \leq \sigma_I, \quad \sigma_W \leq \sigma_I \leq \sigma_I \quad (25)$$

在上述不等式中, 当等高线分布趋于密集且辐射线无限加密时, 则分别变为(22)式中的两个不等式。

应该指出, 仅从不等式(22)无法断定渐近值  $\sigma_W$  比  $\bar{\sigma}_I$ ,  $\bar{\sigma}_I$  和  $\bar{\sigma}_I$  都小, 然而  $\sigma_W$  的极限却小于  $\bar{\sigma}_I$ ,  $\bar{\sigma}_I$  和  $\bar{\sigma}_I$  的极限。这只要对直圆锥计算其值即知:

$$\sigma_W > \bar{\sigma}_W = \bar{\sigma}_I = \bar{\sigma}_I = \bar{\sigma}_I = S$$

因此, 不能毫无限制的认为, 由鲍曼公式(11)所算出的值一定比按伏尔科夫公式(14')所算出的值要大。

### 四、应用公式的选择依据

计算表面积的方法既然不止一种, 公式的合理选择就应由算值的精确性和算法的简易性来加以判断和决定。为此有必要先研究各种方法的精确度。

#### 1. 渐近公式趋于真实面积的条件

从引理的证明方法, 先将不等式  $\sigma_W \leq \bar{\sigma}_I \leq \bar{\sigma}_I$  用图形表示出来(如图6), 即以线段  $OR$  表示  $\sigma_W$ , 而以折线  $R_0R_1 \dots R_{n-1}R_n$  表示  $\bar{\sigma}_I$  (其中  $R_0 \equiv O$ ;  $R_n \equiv R$ ), 又以折线

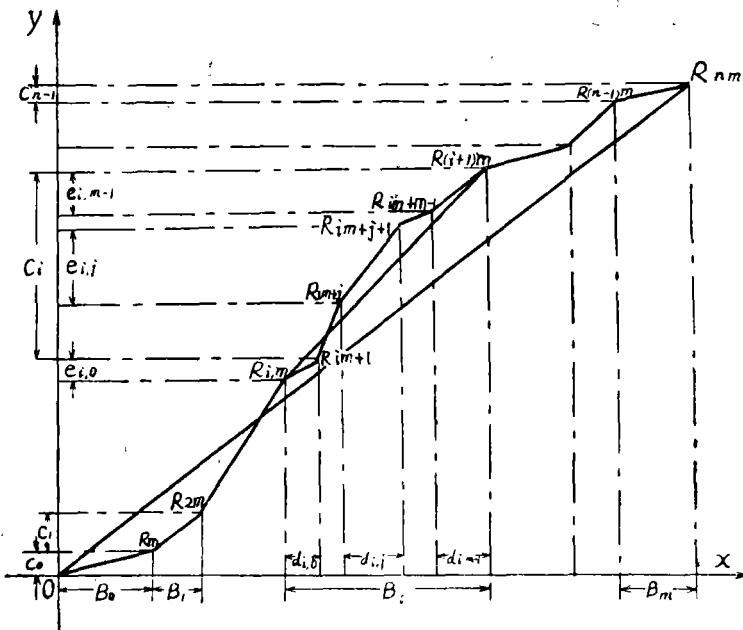


图 6

$R_0, R_{0,1}, \dots, R_{0,m-1}R_1, \dots, R_{1,0}, \dots, R_{1,m-1}R_{1+1,0}, \dots, R_{n-1,0}, \dots, R_{n-1,m-1}R_n, 0$  表示  $\sigma_I$  (其中  $R_{1,0} \equiv R_1$ )，利用这样的表示，可以证明以下五个定理。

**定理 1.**  $S_{\bar{Y}} = S_{\bar{I}}$  的充要条件是，曲面在各等高线上的平均坡度恒等于整个表面的平均坡度。

**证** 因  $S_{\bar{Y}}$  为线段  $R_0R_n$  所趋极限， $S_{\bar{I}}$  为折线  $R_0R_1, \dots, R_{n-1}R_n$  所趋极限。但线段  $R_0R_n$  与折线  $R_0R_1, \dots, R_{n-1}R_n$  趋于相同的极限，因此，必需折线中各段  $R_iR_{i+1}$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) 的方向与线段  $R_0R_n$  的方向趋于相同的极限。

又因  $R_iR_{i+1}$  之方向表示第  $i$  层上近似的平均倾斜率，而  $R_0R_n$  之方向表示整个表面之平均倾斜率的近似值。因此，它们有相同的极限，这就是各等高线上之平均倾斜率与整个表面之平均倾斜率相同，故定理得证。

**推论** 当曲面在每一辐射线上的各点有相同的坡度（即锥形曲面）时，必有

$$S_{\bar{Y}} = S_{\bar{I}}$$

**定理 2.**  $S_{\bar{I}} = S_I$  的充要条件是，曲面在每一等高线上的各点处有相同的坡度。

**证** 因  $S_I$  是折线  $R_0, R_{0,1}, \dots, R_{i,0}, \dots, R_{i,m-1}R_{i+1,0}, \dots, R_{n-1,m-1}R_n, 0$  所趋的极限，故  $S_I = S_{\bar{I}}$  就是该折线与前一折线  $R_0, R_1 \dots, R_n$  趋于相同的极限。

显然，此二折线有相同极限的充要条件是，每一部分折线  $R_{i,0}R_{i,1}, \dots, R_{i,m-1}R_{i+1,0}$  与线段  $R_iR_{i+1}$  皆有相同的极限 ( $i=0, 1, \dots, n-1$ )。

同定理 1 的证明一样，可以断定其充要条件是，每一线段  $R_{i,j}R_{i,j+1}$  的方向与  $R_iR_{i+1}$  的方向趋于相同的极限 ( $j=0, \dots, m-1$ )。但  $R_iR_{i+1}$  的方向所趋的极限是某一等高线

$(l'_i)$  上的平均倾斜率，而  $R_{i,j}, R_{i,j+1}$  的方向是代表  $d_{i,j}$  上的近似平均倾斜率，故其极限必为  $(l'_i)$  上某一点的倾斜率。

由此可知，每一线段  $R_{i,j}R_{i,j+1}$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) 与  $R_iR_{i+1}$  的方向趋于相同的极限，即等高线  $(l'_i)$  上各点的倾斜率恒等于此等高线上之平均倾斜率。故定理得证。

定理 3.  $S_{\text{II}} = S_{\text{I}}$  的充要条件是，曲面在各点处的坡度恒为相等。

证 因  $S_{\text{II}} = S_{\text{I}}$  等价于  $S_{\text{II}} = S_{\text{I}} = S_{\text{I}}$ 。

根据定理 2 可知， $S_{\text{II}} = S_{\text{I}}$  的充要条件是，每一等高线上各点的坡度恒为相同，因而其平均坡度即为各点处的坡度。

又由定理 1 得知， $S_{\text{II}} = S_{\text{I}}$  的充要条件是，各等高线上的平均坡度彼此相等。

联合此二结论，定理即得证明。

以完全同样方法可以证明以下二定理。

定理 4.  $S_{\text{I}} = S_{\text{I}}$  的充要条件是，曲面在每一辐射线上的各点处有相同的坡度。

即华罗庚、王元的两种方法趋于相同极限的充要条件是表面为锥形曲面。

定理 5.  $S_{\text{II}} = S_{\text{I}}$  的充要条件是，曲面在各辐射线上的平均坡度恒为常数。

因  $S_{\text{I}} = S$ ，故定理 2 —— 4 分别给出了各种方法趋于真实面积的条件。而定理 1, 5 又给出了伏尔科夫法在某种条件下有较好的结果。因此可按上述办法选择合理的计算公式。

## 2、选择公式的依据

1) 当曲面在各点处的坡度均大致相同时（如坡度较小的丘陵地带，或呈圆锥形和等角棱锥形的高山），使用伏尔科夫方法即可。这既能趋于真实面积，又可计算最为简便。其他较繁方法此处没有采取的必要。

2) 仅当二相邻等高线间的坡度变化不大时，即高程相等之处坡度大致相同（如球状或旋转体形的高山）地区，则采用鲍曼方法最好。这与方法 1. 均趋于真实面积，但比方法 1. 更简便。如果在精度要求不高的情况下，也可用伏尔科夫方法，它虽不如鲍曼方法精确，但与方法 2. 趋于相同的极限，且计算亦最简便。

3) 仅当二相邻辐射线间的坡度变化不大时，即辐射线上各点的坡度大致相同（如棱锥形的山区）地区，最好采用方法 2. 它与方法 1. 皆趋于真实面积，但却比方法 1. 简便很多。如果在精度要求不高的情况下，亦可用伏尔科夫方法，它虽不如方法 2 的精确，但却与鲍曼方法趋于相同的极限，且计算也是最为简便。

4) 当曲面在各等高线和各辐射线上的坡度均变化很大时，即山坡各地的起伏皆不匀称之处，这时应不怕麻烦，而采用方法 1 来计算，否则误差将会很大。

## 五、图解法的简化计算

由以上分析可知：当各处的坡度变化无常时，只能采用很繁的方法 1，才能使其误差较小，然而这类地形却最为普遍。因此简化方法 1 的计算过程就有较大的实际意义，为此，本文针对方法 1 的困难所在进行分析，以便改进。

在文献[3]中，曾对各种方法的繁简程度作了详细的比较，从多方面说明了方法4最为简便。但是在方法1和3中，除了在地形图上量算各小块（或各层、各区）的面积和其上直立隔板的面积比在方法4中量算地区总面积和其平均坡度要复杂、繁琐以外，前者还有一个主要困难，即多次施行“平方和的平方根”的繁难运算。为了简化起见，可以利用上节证明定理的图解方法，将这些繁难运算简单地归结为，用曲线计或有刻度的直尺去度量一条折线的长度。其具体步骤如下：

1) 取直角坐标系（用方格坐标纸最为方便），并按下表计算各顶点的坐标。

顶点坐标计算表

顺序 算法		水平分区 的面积	直立隔板 的面积	对应顶点 $R_k(x_k, y_k)$ 的坐标值	
第 一 层	第一块	$d_{0,0}$	$B_0$	$x_1 = d_{0,0}; \quad y_1 = e_{0,0}$	
	第二块	$d_{0,1}$		$x_2 = d_{0,0} + d_{0,1}; \quad y_2 = e_{0,0} + e_{0,1}$	
	⋮	⋮		⋮	⋮
	第m块	$d_{0,m-1}$		$x_m = \sum_{s=0}^{m-1} d_{0,s} = B_0; \quad y_m = \sum_{s=0}^{m-1} e_{0,s} = C_0$	
	⋮	⋮		⋮	⋮
第 $i+1$ 层	第一块	$d_{i,0}$	$B_i$	$x_{i+m+1} = \sum_{r=0}^{i-1} B_r + d_{i,0}; \quad y_{i+m+1} = \sum_{r=0}^{i-1} C_r + e_{i,0}$	
	⋮	⋮		⋮	⋮
	第j块	$d_{i,j-1}$		$x_{i+m+j} = \sum_{r=0}^{i-1} B_r + \sum_{s=0}^{j-1} d_{i,s}; \quad y_{i+m+j} = \sum_{r=0}^{i-1} C_r + \sum_{s=0}^{j-1} e_{i,s}$	
	⋮	⋮		⋮	⋮
	第m块	$d_{i,m-1}$		$x_{(i+1)m} = \sum_{r=0}^i B_r; \quad y_{(i+1)m} = \sum_{r=0}^i C_r$	
第 $n$ 层	第一块	$d_{n-1,0}$	$B_{n-1}$	$x_{(n-1)m+1} = \sum_{r=0}^{n-2} B_r + d_{n-1,0};$	
	⋮	⋮		$y_{(n-1)m+1} = \sum_{r=0}^{n-2} C_r + e_{n-1,0}$	
	第m块	$d_{n-1,m-1}$		$x_{n,m} = \sum_{r=0}^{n-1} B_r; \quad y_{n,m} = \sum_{r=0}^{n-1} C_r$	

注：表中的  $B$ 、 $C$  分别代表各层的水平、直立面积，即  $B_i = \sum_{r=0}^{i-1} d_{i,r}$ ， $C_i = \sum_{s=0}^{i-1} e_{i,s}$ 。

2) 从原点开始, 顺次连结各点  $R_1, R_2, \dots, R_m$ 。

3) 量出折线  $OR_1R_2\dots R_m$  的长, 即得所求之渐近值

亦即

$$\sigma_I = \text{折线 } OR_1R_2\dots R_m \text{ 之长 (参阅图 7)}$$

同理

$$\sigma_{\bar{I}} = \text{折线 } OR_mR_{2m}\dots R_{1m}\dots R_m \text{ 之长, 类似地可以表示渐近值 } \sigma_{\bar{I}}$$

的折线。

伏尔科夫方法由于计算简便, 故无必要利用这种图解法。顺便指出, 在实际应用图解法时, 可不必计算出所有顶点  $M_k$  的坐标  $x_k, y_k$ 。因为只要在  $x$  轴上依次截取长度等于  $d_0, d_0, 1, \dots, d_{0, m-1}, d_1, 0, \dots, d_{1, m-1}, d_2, 0, \dots, d_{n-1, m-1}$  的线段, 则其端点就分别与各顶点  $R_1, R_2, \dots, R_m$  有相同的横坐标, 同理在  $y$  轴上依次截取长度等于  $e_0, 0, e_{0, 1}, \dots, e_{0, m-1}, e_{1, 0}, \dots, e_{1, m-1}, e_{2, 0}, \dots, e_{n-1, m-1}$  的线段, 则其端点

就分别与各顶点  $R_1, R_2, \dots, R_m$  有相同的纵坐标。因此就以量算的数据  $d_{i,j}, e_{i,j}$  直接作出所求的折线  $OR_1R_2\dots R_m$ 。

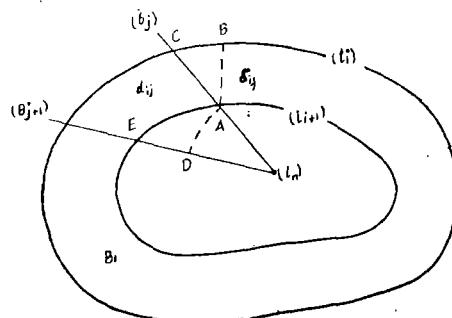


图 7

## 六、另一组渐近公式

在各种计算表面积的方法中, 除了要量出等高线之长外, 还需量出地形图上各块的面积。为了统一起见, 即只用长度表示出所欲计算的表面积, 从而使得在无求积仪的条件下, 同样可以算出表面积, 则可利用下述公式:

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{(l_{i,j} \cdot \delta_{i,j})^2 + (l_{i,j} \cdot \Delta h)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} l_{i,j} \sqrt{\delta_{i,j}^2 + \Delta h^2} \approx \sigma_I \quad (26)$$

式中  $\delta_{i,j}$  是由  $(l_{i+1})$  与  $(l_i)$  之交点 A 到  $(l_i)$  的最短距离 (如图 7)。显然, 这个新的公式是在  $\sigma_I$  中, 以  $d_{i,j} \approx l_{i,j} \cdot \delta_{i,j}$  代换后而得出的, 同理在  $\sigma_{\bar{I}}$  中以  $d_{i,j} \approx \frac{1}{2}(l_{i,j} + l_{i+1,j}) \cdot \delta_{i,j}$  代换后则得:

$$\sigma_{\bar{I}}^* = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2}(l_{i,j} + l_{i+1,j}) \sqrt{\delta_{i,j}^2 + \Delta h^2} \approx \sigma_{\bar{I}} \quad (26')$$

又若在第  $i$  层  $B_i$  中, 按等高线各段之长求出各  $\delta_{i,j}$  的加权平均值  $\delta_i$ , 即

$$\delta_i = \frac{l_{i,0}}{l_i} \cdot \delta_{i,0} + \frac{l_{i,1}}{l_i} \delta_{i,1} + \dots + \frac{l_{i,m-1}}{l_i} \cdot \delta_{i,m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{l_{i,j}}{l_i} \cdot \delta_{i,j}$$

在  $\sigma_{\bar{I}}$  中以  $B_i \approx l_i \cdot \delta_i$  代换后, 即得

$$\sigma_{\bar{I}}^* = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \sqrt{\delta_i^2 + \Delta h^2} \approx \sigma_{\bar{I}} \quad (27)$$

$\sigma_{\bar{I}}^*$  与  $\sigma_I^*$  的关系由下式可以看出:

$$\sigma_{\text{I}}^* = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} l_{i,j} \cdot \delta_{i,j} \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^{m-1} l_{i,i} \cdot \Delta h \right)^2}$$

同理，在  $\bar{\sigma}_{\text{I}}$  中以  $B_i \approx \frac{1}{2} (l_i + l_{i+1}) \cdot \delta_i$  代换后，则得：

$$\bar{\sigma}_{\text{I}}^* = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (l_i + l_{i+1}) \sqrt{\delta_i^2 + \Delta h^2}} \approx \bar{\sigma}_{\text{I}} \quad (27')$$

$$\text{类似的还可得出: } \sigma_{\text{IV}}^* = \sqrt{\left( \sum_{i=0}^{n-1} l_{i,i} \delta_i \right)^2 + \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} l_{i,i} \right) \cdot \Delta h \right]^2} \approx \sigma_{\text{IV}} \quad (28)$$

这组公式与原来相应的公式具有相同的精确性，即均趋于同一极限，证明如下：

设 AB 是由 A 到  $(l_i)$  的最短距离，则线段 AB 垂直于  $(l_i)$ ，现以制高点  $(l_n)$  为圆心，以  $(l_n)$  到 A 的距离为半径画圆，若此圆交  $(\theta_{i+1})$  于 D 点（如图 7），则有

$$\frac{AB}{AC} \approx \frac{\widehat{AD}}{\widehat{AE}}$$

$$\text{但 } AB = \delta_{i,i}, AC = \rho(z_i, \theta_i) - \rho(z_{i+1}, \theta_i) = -\frac{\partial \rho(z'_i, \theta_i)}{\partial z'_i} \Delta z$$

$$\widehat{AD} = \rho(z_{i+1}, \theta_i) \cdot \Delta \theta$$

$$\begin{aligned} \widehat{AE} &= \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{\rho^2(z_{i+1}, \theta) + \left[ \frac{\partial \rho(z_{i+1}, \theta)}{\partial \theta} \right]^2} \cdot d\theta \\ &= \sqrt{\rho^2(z_{i+1}, \theta'_i) + \left[ \frac{\partial \rho(z_{i+1}, \theta'_i)}{\partial \theta'_i} \right]^2} \cdot \Delta \theta \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Delta z = \Delta h = \frac{h}{n}, \Delta \theta = \frac{2\pi}{m}, z_i \leq z'_i \leq z_{i+1}, \theta_i \leq \theta'_i \leq \theta_{i+1}$$

故得

$$\delta_{i,i} \approx \frac{-\rho(z_{i+1}, \theta_i) \cdot \frac{\partial \rho(z'_i, \theta_i)}{\partial z'_i} \cdot \Delta z}{\sqrt{\rho^2(z_{i+1}, \theta'_i) + \left[ \frac{\partial \rho(z_{i+1}, \theta'_i)}{\partial \theta'_i} \right]^2}}$$

将此式代入 (26)~(28) 式中，并求极限，则得：

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \bar{\sigma}_{\text{I}}^* = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \sigma_{\text{I}}^* = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left( \rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2} d\theta \cdot dz = S$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \bar{\sigma}_{\text{I}}^* = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \sigma_{\text{I}}^* = \int_0^h \sqrt{\left( \int_0^{2\pi} \rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta \right)^2 + \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2} d\theta \right)^2} \cdot dz = S_{\text{I}}$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \sigma_{\text{IV}}^* = \sqrt{\left( \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} dz d\theta \right)^2 + \left( \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2} dz d\theta \right)^2} = S_{\text{IV}}$$

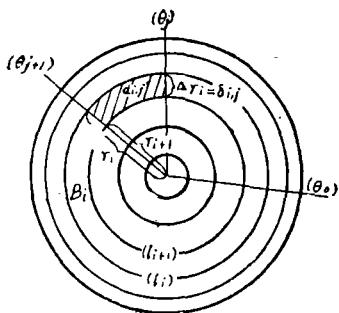


图 8

这就证明新的公式与原来相应的公式趋于相同的极限，而且对一些特殊类型曲面的渐近值也可能是相同的。现举出如下二例：

例 1 利用新、旧两组公式计算半球或圆锥之表面积。

因半球与圆锥之等高线皆为同心圆（如图 8），故有

$$\delta_{i,j} = \Delta \gamma_i = \gamma_i - \gamma_{i+1}$$

$$\delta_i = \delta_{i,j} = \Delta \gamma_i$$

$$\text{但 } d_{i,j} = \frac{1}{2}(l_{i,j} + l_{i+1,j}) \cdot \Delta \gamma_i \quad B_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1}) \cdot \delta_i$$

代入 (26) 式中得：

$$\overline{\sigma}_I^* = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2}(l_{i,j} + l_{i+1,j}) \cdot \sqrt{\Delta \gamma_i^2 + \Delta h^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_{i,j}^2 + e_{i,j}^2} = \overline{\sigma}_I$$

同理代入 (27) 式中有：

$$\overline{\sigma}_I = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1}) \cdot \sqrt{\Delta \gamma_i^2 + \Delta h^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + c_i^2} = \overline{\sigma}_I, \dots, \text{等等。}$$

例 2 利用新、旧相应的公式计算任意角锥之表面积。

因角锥的等高线都是相似的多角形（如图 9），若以各棱的投影为辐射线 ( $\theta_j$ )， $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ，则亦有：

$$d_{i,j} = \frac{1}{2}(l_{i,j} + l_{i+1,j}) \cdot \delta_{i,j}$$

代入 (5) 式中，即得

$$\overline{\sigma}_I = \overline{\sigma}_I^*.$$

$$\text{又因 } B_i = \sum_{j=0}^{m-1} d_{i,j} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2}(l_{i,j} +$$

$$+ l_{i+1,j}) \cdot \delta_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{m-1} \frac{l_{i,j} + l_{i+1,j}}{l_i} \delta_{i,j} \cdot l_i + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{l_{i+1,j}}{l_{i+1}} \delta_{i,j} \cdot l_{i+1} \right).$$

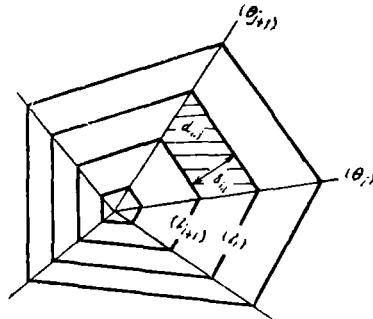


图 9

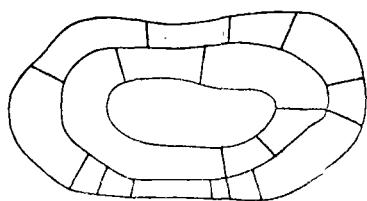
再由相似多角形对应边成比例，即有

$$\frac{l_{i,j}}{l_i} = \frac{l_{i+1,j}}{l_{i+1}}.$$

$$\text{故 } B_i = \frac{1}{2}(\delta_{i,j} \cdot l_i + \delta_{i+1,j} \cdot l_{i+1}) = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1}) \cdot \delta_i.$$

将上式代入 (11) 式，即得  $\overline{\sigma}_I = \overline{\sigma}_I^*$ , ..., 等

此二例表明，对于球面、锥面和角锥的表面积，运用新、旧公式可得相同的结果。



附带说明，求加权平均值  $\delta_i = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} l_{i,j} \cdot \delta_{i,j}}{l_i}$

$\frac{l_{i,j}}{l_i} \cdot \delta_{i,j}$  时，可以不必机械的引用辐射线，而按等高线间之距离来分段求算（如图10）。因此当相邻等高线间之距离大致相等时，则运用公式(27)或(27')既简便又可靠。

图10

### 参 考 文 献

- [1] 华罗庚、王元：《积分的近似计算》科学出版社 1961 年（1963 年第二版改名为：数值积分及其应用）。
- [2] 陆漱芬：《在等高线地形图上量算地表面积的问题》测量制图学报 1960 年第四卷，第一期。
- [3] 胡毓鉅：《在等高线地形图上量算表面积方法的分析》测绘学报 1963 年第六卷，第四期。

## Analysis, Comparision and Improvement of the Method of Measuring Land Surface Area on Topographical Maps

*Li Changming*

### Abstract

There are five methods of measuring land surface area on topographical maps. A paper<sup>[3]</sup> has made a detailed comparision between the complicateness of the various methods; it has, however, not indicated their internal relationships nor made a comparision between the results obtained by the various methods, as to what extent they approach the actual surface area.

The author of the present paper attempts to prove by the fundamental formula of

area and the principles of approximate calculation the mutual relationships between the various methods; accordingly, derives the non-equality between the values obtained by them and at the same time, compares their merits and defects according to their approximation to the actual area. Furthermore, the author makes a study by elementary method of the closeness of different asymptotic numeral values to the actual area for different shapes of surface, which enables us to choose the most reasonable formulae of calculation in practice.

Then, the author suggests a graphical method, based on the same principle of the above analysis, which simplifies the calculation work of the most accurate but more complicated Hua Lokeng and Wang Yuan's method.

Lastly, based on the same principle, the author derives a set of new formulae, which are as accurate as the existed formulae, but do not require the process of measuring the area on topographical maps. Hence they are especially useful in case of having no planimeter.