

自检校光束法区域网 平差中的验后权估计*

李德仁

【摘要】严格的自检校光束法平差的数学模型中包含三类观测值，即象片坐标、地面控制点坐标（虚拟的）和附加参数测观值。正确地选择它们的权才能保证自检校平差有稳定、可靠的结果，从而有效地补偿系统误差的影响。

本文探讨用最小二乘法平差中的验后方差估计方法来估求这三类观测值的权，并对试验结果进行了分析。主要结论是：

- (i) 自检校光束法平差中的验后方差估计有唯一收敛解。
- (ii) 在任何情况附加参数观测值方差的估值比较准确。但在确定它的最佳权时应适当的考虑到偶然误差的系统累积作用。
- (iii) 稀疏控制下由于地面控制观测值的多余观测分量很小，其权不可能估准，但这不会影响平差结果只有在密集控制下才有必要和可能精确地估计它的权。

自检校光束法平差是在平差中引入一组改正系统误差的附加参数，在解求其它未知数的同时求出这些附加参数，以消除象片系统误差对平差结果的影响。根据作者在《论自检校区域网平差中的信噪比》一文中的试验研究[1]，将附加参数处理成自由未知数一般是不适宜的，如果能按照信号（系统误差）与噪音（偶然误差）的大小合理地选择附加参数的权，就可以有效地消除系统误差的影响而获得稳定可靠的精度改善。

对于解析空中三角测量而言，观测值的偶然误差和系统误差的量值，在实际平差之前往往不可能精确得知，这就为选择附加参数的权带来一定困难。为了解决这个问题可以在平差中利用验后方差估计方法来确定各类观测值的权。

一般平差问题的验后方差估计方法已在文献[2]中作了介绍，用于独立模型法平差的结果见文献[3]，用于单象空间后方交会的结果见文献[4]，对于它在自检校光束法平差中的应用，除在[5]中曾提及过，尚未见到实际计算的结果。为此本文利用已知信号和噪音大小的模拟象片数据，进行自检校光束法平差中验后权估计的试验研究。现将试验研究的结果介绍于下。

(一) 自检校光束法平差的数学模型

将地面控制点和改正系统误差的附加参数处理成带权观测值时，自检校光束法平差之误差方程式为（详见[1]）：

$$\begin{aligned}
 V_1 &= A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 - L_1 & P_1 & \\
 V_2 &= I_2 X_2 - L_2 & P_2 & \\
 V_3 &= I_3 X_3 - L_3 & P_3 &
 \end{aligned} \tag{1}$$

* 本文得到王之卓教授的指导。

式中 X_1 为外方位元素和地面坐标未知数的改正数向量;

A_{11} 为相应的误差方程式系数矩阵;

L_1 为象点坐标的观测值向量;

P_1 为象点坐标观测值的权矩阵;

X_2 为地面控制点坐标的改正数向量;

A_{12} 为相应的系数矩阵;

L_2 为地面控制点坐标改正数的观测值向量, 取控制点已知坐标作近似值时 L_2 为零向量;

P_2 为控制点坐标观测值的权矩阵;

X_3 为附加参数向量;

A_{13} 为相应的系数矩阵;

L_3 为附加参数的观测值向量, 一般为零向量, 只有当某个参数已预先测出时它才不为零;

P_3 为附加参数的权矩阵;

I_2 和 I_3 为相应阶的单位矩阵。

其简写形式为:

$$V = AX - L \quad P \quad (2)$$

相应的法方程式为

$$\begin{pmatrix} A_1^T P_1 A_{11} & A_1^T P_1 A_{12} & A_1^T P_1 A_{13} \\ A_2^T P_1 A_{11} & A_2^T P_1 A_{12} + P_2 & A_2^T P_1 A_{13} \\ A_3^T P_1 A_{11} & A_3^T P_1 A_{12} & A_3^T P_1 A_{13} + P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T P_1 L_1 \\ A_2^T P_1 L_1 + P_2 L_2 \\ A_3^T P_1 L_1 + P_3 L_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

简写成

$$(A^T P A)X = A^T P L \quad (4)$$

改正象片系统误差的附加参数取用 Ebner 提出的一组正交附加参数, 系数均匀化后的形式为¹:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \bar{y} - \left(2\bar{x}^2 - \frac{4}{3}\right) \bar{x} \cdot \bar{y} \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3}\right) 0 \bar{x} \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3}\right) 0 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\right) \bar{y} 0 \\ -\bar{y} \bar{x} \bar{x} \cdot \bar{y} - \left(2\bar{y}^2 - \frac{4}{3}\right) 0 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\right) 0 \left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\right) \bar{y} 0 \bar{x} \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3}\right) \\ 2\left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\right) \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3}\right) 0 \\ 0 \sim, 2\left(\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\right) \left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_2} \\ \vdots \\ \frac{\bar{b}_{12}}{\bar{b}_{12}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

(二) 验后权估计

从(1)式看出, 自检校光束法平差中进行验后权估计, 所要估求的乃是象片坐标值、地面控制点坐标观测值和虚拟的附加参数观测值的权阵, 即 P_1 、 P_2 和 P_3 。

在每一类观测值为等权互不相关的情况下 $P_i = p_i I_i$, 此时实际上只要估求 p_1 、 p_2 、 p_3 的值。

根据文献[4]的分析宜取 Förstner 算法。其迭代公式为(推导见附录):

$$\left. \begin{aligned} q_{i,v+1} &= \left(\frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i}{r_i} \right)_v \quad (i=1, 2, 3) \\ r_i &= n_i - p_i \text{tr}(A_i Q A_i^T) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 q_i 为第 i 组观测值的方差估值；

\mathbf{v}_i 为第 i 组观测值的改正数向量；

r_i 为第 i 组观测值的多余观测分量；

v 为迭代次数；

A_i 为第 i 组观测值在误差方程式系数阵中之相应子矩阵，即

$$A_1 = (A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13}),$$

$$A_2 = (0 \quad I_2 \quad 0),$$

$$A_3 = (0 \quad 0 \quad I_3)$$

n_i 为第 i 组观测值个数；

$Q = (A^T P A)^{-1}$ ，为未知数的协因数阵。

对于光束法平差之基本模型（1）式，有：

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= n_2 - p_2 \text{tr}(Q_2) = n_2 - p_2 \sum q_{GG} \\ r_3 &= n_3 - p_3 \text{tr}(Q_3) = n_3 - p_3 \sum q_{PP} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 Q_2 和 Q_3 分别为 Q 阵中与控制点坐标改正数和附加参数相对应的子块矩阵；

q_{GG} 和 q_{PP} 分别为 Q_2 和 Q_3 之主对角线元素。

可以看出，计算 r_2 和 r_3 只需求出 Q 阵之相对角元素，共 $n_2 + n_3$ 个，计算量一般不大。而计算 $\text{tr}(A_i Q A_i^T)$ 再求 r_1 的工作量却是十分庞大的，但由文献[4]中之分析结果，可用下式间接求出 r_1 。

$$r_1 = r - r_2 - r_3 = n - u - r_2 - r_3 \quad (7')$$

通常均假设 $p_1 = 1$ ，则

$$p_i = \frac{q_{11}}{q_i} \quad (i=2, 3) \quad (8)$$

由于计算是迭代的，故给出以下的收敛标准来判定是否终止迭代计算。

$$|q_{i,v+1} - q_{i,v}| \leq \epsilon_1 \quad (9)$$

或

$$\frac{|q_{i,v+1} - q_{i,v}|}{q_{i,v}} \leq \epsilon_2 \quad (9')$$

当各类观测值的精度相近时可用（9）式，而各类观测值的精度差异较大时用（9'）式。

在 $p_1 = 1$ 的假设下，终止迭代时 q_1 应与单位权方差估值 s_0^2 相等，这可用作检核。

（三）试验结果与分析

考虑到节省计算工作量，取一个典型的 3×4 大小的区域网，用模拟象片资料进行试验。该模拟象片的 $f = 150$ 毫米， $1 : m = 1 : 31600$ ，象幅为 23×23 厘米 2 ，地面最大起伏为 500 米。在无误差的模拟数据象片观测值中加入了偶然误差 (σ ，分别为 1.5 和 7.5 微米)，在地面控制点坐标模拟值上加入了偶然误差 ($\sigma_2 = 5$ 微米)。同时又在象片坐标上加入了系统误差 ($\sigma_3 = 4.2$ 微米)。

偶然误差是利用了一组经过统计检验的正态伪随机数，象片系统误差则是按图1假设的系统误差附加参数值，由各象点坐标通过（5）式求出后加到象片坐标上去。假设虚拟的附加参数观测值为是期望零的等权观测值，则

$$\bar{\sigma}_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} (\bar{b}_i^2) / 12} = 4.2 \text{ 微米.}$$

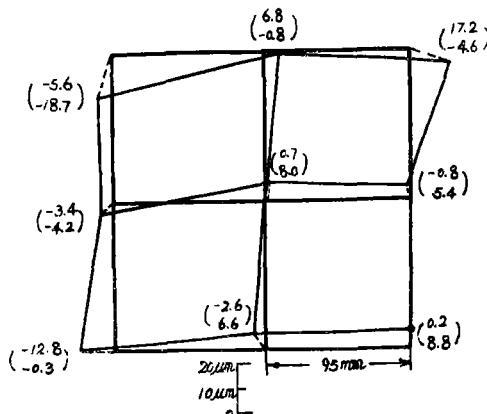


图1. 假设的系统误差及相应的附加参数值。
(单位: 微米)

\bar{b}_1	6.5
\bar{b}_2	5.5
\bar{b}_3	1.2
\bar{b}_4	2.3
\bar{b}_5	1.8
\bar{b}_6	-6.9
\bar{b}_7	7.8
\bar{b}_8	-4.2
\bar{b}_9	1.2
\bar{b}_{10}	1.0
\bar{b}_{11}	0.3
\bar{b}_{12}	-0.4

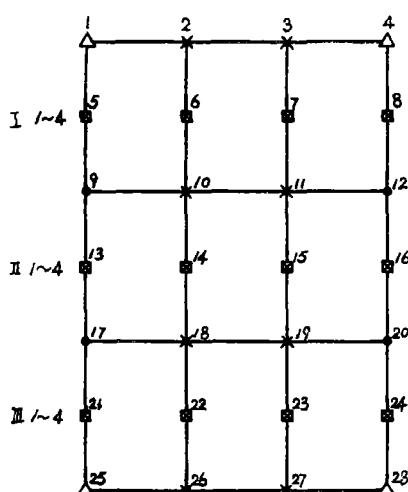


图2. 试验用区域网

- △ 平高控制点
- 高程控制点
- × 加密点
- 象主点

当区域内为稀疏控制时(见图2)，对于 σ_1 为7.5和1.5微米得到验后方差估计结果，分别列于表1和表2中，迭代计算均从权初值为1出发。在此情况下地面控制点坐标观测值为16个，附加参数为12个，采用上文(二)中介绍的方法，每步迭代只要计算未知数协因数阵之相应的28个对角元素。如果不利用(7')式间接求 r_1 ，则必须计算168阶的 Q_{xx} 阵。显而易见，这种计算量是太庞大了。而利用(7')式将大大节省计算量。

从表1和表2中可得出结论：

- 1) 自检校光束法平差中从权初值均为1出发进行验后权估计，有收敛解。
- 2) 从表1、表2中看出，对附加参数方差估计的结果比较准确，但对地面控

表 1

验后方差估计结果(带附加参数光束法平差)

迭代次数	估求之各组观测值的均方差				单位权中误差 s_0 (μm)	估求之各组观测值权			各组多余分量			平差结果			
	s_1 (μm)	s_2 (μm)	s_3 (μm)	p_1		p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	μ_{xy}	μ_z	μ_{xy}	μ_z	TS 检 验 值
0	$\hat{s}_1 = 7.5$	$\hat{s}_2 = 5.0$	$\hat{s}_3 = 4.2$	8.8	初值 = 1	初值 = 1	初值 = 1				4.0	5.2	10.3	14.3	0.23
1	9.5	5.0	5.4	8.8	1	3.6	3.1	32.20	0.31	7.49	4.15	3.9.3	15.1	0.40	
2	9.5	4.4	4.4	9.3	1	4.8	4.7	34.08	0.12	5.80	4.15	3.9.7	15.5	0.48	
3	9.6	4.4	4.0	9.5	1	4.7	5.7	34.81	0.10	5.09	4.15	3.10.0	15.6	0.53	

注: 1. 收敛标准 $\epsilon_1 = 0.5\mu\text{m}$ 。

2. 控制点精度和检查点精度系平差值与模拟数据真值比较而得, 单位为象片上的 μm 。

$$\text{且 } \mu_{xy} = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2}{2}}.$$

表 2

验后方差估计结果(带附加参数光束法平差)

迭代次数	估求之各组观测值的均方差				单位权中误差 s_0 (μm)	估求之各组观测值权			各组多余分量			平差结果			
	s_1 (μm)	s_2 (μm)	s_3 (μm)	p_1		p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	μ_{xy}	μ_z	μ_{xy}	μ_z	TS 检 验 值
0	$\hat{s}_1 = 1.5$	$\hat{s}_2 = 5.0$	$\hat{s}_3 = 4.2$	2.6	初值 = 1	初值 = 1	初值 = 1				4.0	5.3	2.7	7.1	0.50
1	2.2	3.4	4.1	2.6	1	0.4	0.3	32.20	0.31	7.49	3.9	5.3	2.2	6.9	0.24
2	2.1	2.6	4.3	2.1	1	0.6	0.2	30.46	0.53	9.01	4.2	5.3	2.5	6.4	0.21
3	2.0	1.7	4.5	2.0	1	1.4	0.2	30.40	0.33	9.27	4.3	5.3	2.7	6.3	0.24
4	2.1	1.2	4.5	2.1	1	3.4	0.2	30.41	0.18	9.41	4.3	5.3	2.7	6.3	0.27

注: 同表 1

制点坐标的方差估计得不准。

3) 在稀疏控制下, 控制点观测值的多余观测分量均在 0.53 以下, 且控制点观测值权的变化对平差结果影响甚微。

4) 最佳平差结果并不一定落在所估的最后结果上。

下面对 2)、4) 两点作进一步分析说明。

(1) 各组方差估值的精度与各组多余观测分量 r_i 有关。

由(6)式出发, 若忽略计算 r_i 的误差, 则

$$dq_i = \frac{2}{r_i} V_i^T dV_i \quad (10)$$

由方差协方差传播定律, 则有

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{q_i}^2 &= \frac{4\hat{\sigma}_0^2}{r_i^2} V_i^T Q_{v_i v_i} V_i \\ &= \frac{4\hat{\sigma}_0^2}{r_i^2} V_i^T (P_i^{-1} - A_i Q A_i^T) V_i \end{aligned} \quad (11)$$

或

$$\hat{\sigma}_{q_i}^2 = \frac{4s_0^2}{r_i^2} V_i^T (P_i^{-1} - A_i Q A_i^T) V_i \quad (11')$$

可见, 方差估值的方差随 r_i 之变小而增大。当 r_i 太小时, 估值 q_i 的精度是不高的。在表 1 和表 2 中, 地面坐标观测值共 16 个, 其多余观测分量 $r_2 < 0.6$, 而在单片 9 点后交时, 地面坐标观测值共 27 个, 其多余观测分量为 8.5 左右。在这两种情况下, 平均多余观测分量(r_i/n_i) 分别为 < 0.04 和 0.31。所以表 1、表 2 中的 q_2 估计不准而单象空间后交中能够逐点地估求地面控制点方差[4]。同样还可与表 1、表 2 中的 q_3 相比较。由表知 $r_3/n_3 = 0.42 \sim 0.78$, 所以 q_3 的精度就较好。

由此可知, 图 2 中的控制基本上为必要观测。所以设想在极限条件下, 即 $r_2 = 0$ 时, 由于没有多余观测, 所以地面控制点上的残差向量将为零, 此时就无法利用残差来估计该类观测值的精度了。因此, 当地面控制稀疏到多余观测很少时, 实际上就不必要将它处理成带权观测值, 或者说将它处理成带不同权的观测值对平差结果不会有什么明显的影响。

为了进一步证实以上的讨论, 将图 2 中的控制点增加到点 1, 2, 4, 9, 12, 17, 20, 25, 27, 28 均为平高控制点, 此时共有 30 个地面控制点坐标观测值。在此条件下进行验后方差估计, 得到表 3 的结果。此时总多余观测为 54。

将表 3 与表 2 对比可知

(i) 随着控制点增加, 其相应的多余观测分量也增加(由小于 1 增加到 5.81~10.88), 因而对控制点坐标观测值估计的方差也就比较准确。这完全证实了以上的分析。这表明在密集控制下对控制点坐标的方差能够用验后方差估计法进行较准确的估计。

(ii) 当控制点数增加后, 不但对其方差估计得较准确, 而且随着方差估计的结果, 控制点坐标平差值的精度也得以提高。也就是说, 平差结果与控制点观测值的权有关。所以可以说, 控制点坐标观测值的权, 在密集控制下必要而且可能估计准确, 而在稀疏控制下不可能而且也不必要估准。

(2) 确定附加参数的权时应适当考虑偶然误差的系统累积。

为何最佳平差结果并不一定落在验后方差所得之最后结果上呢? 特别如表 1 中偶然误差大的情况。作者认为, 这主要是由于空中三角测量中存在有偶然误差累积的系统现象(见文

表3 密集控制下验后方差估计结果(带附加参数光束法平差)

迭代次数	估求之各组观测值的均方差			单位权中误差 s_0 (μm)	估求之各组观测值权			各组多余分量			平差结果				
	s_1 (μm)	s_2 (μm)	s_3 (μm)		p_1	p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	μ_{xy}	μ_z	μ_{xz}	μ_{yz}	
	$\delta_1 = 1.5$	$\delta_2 = 5.0$	$\delta_3 = 4.2$	3.0	初值 = 1	初值 = 1	初值 = 1				4.0	5.1	3.6	6.9	0.35
1	2.5	4.7	3.5	3.0	1	0.3	0.5	39.73	5.81	8.47	3.4	4.9	3.3	6.1	0.27
2	2.2	5.4	3.6	2.4	1	0.2	0.4	35.71	9.21	9.08	3.3	4.5	3.3	5.8	0.24
3	2.1	5.7	3.6	2.1	1	0.1	0.3	33.83	10.88	9.29	3.3	4.4	3.2	5.7	0.22

注：同表1

献⁶第五章第五节），即偶然误差通过“双重总和”的规律得到的似系统性。因此进行自检校平差时，应按系统中偶然误差的大小，适当地减小附加参数的权。利用这种办法可同时补偿由于偶然误差的系统累积产生的似系统影响。如表1中， P_3 由5.7减到3.1或更小一点，平差结果会更好些。

(四) 结论意见

根据以上扼要的试验研究，我们可以归纳以下几点。

(i) 在航测自检校光束法平差中，进行验后方差估计有唯一收敛解，因而是切实可行的。

(ii) 在任何情况下，对（虚拟的）附加参数观测值方差的估计比较准确。但是在确定它的最佳权时，应按偶然误差大小适当地减小其值以顾及偶然误差的系统累积作用。

(iii) 在稀疏控制下，由于地面控制点观测值的多余观测分量很小，所以它的权不易估准，而且也不会对结果产生多大影响。在此情况下将地面控制点视为固定点或给它一个固定的权就可以了，而不必用验后法去估求它的方差，只有在密集控制下才必要也才可能较精确地估求这一类观测值的权。

最后要指出的是，在一个大的自检校光束法区域中进行验后方差估计，其计算量是很庞大的。所以本文介绍的方法并不期望用于生产中的每一个区域网平差。但是，对于有代表性的区域网平差，采用这种方法，可以给我们提供较准确的各类观测值之方差估计值。对于解析空中三角测量而言这仍然是具有理论和实际意义的。

附录

验后方差估计的 Förstner 算法

对于间接观测平差，有线性模型

$$V = A \hat{X} - L \quad (A-1)$$

假设观测值向量 L 的方差协方差阵具有下列结构形式

$$K = \begin{pmatrix} q_1 l_1 \\ q_2 l_2 \\ \vdots \\ q_i l_i \\ \vdots \\ q_n l_n \end{pmatrix} \quad (A-2)$$

即观测值向量由若干组等精度互不相关的观测值构成。

由最小二乘原理可得到：

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1} L \\ V &= (A(A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1} - I)L \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (A-3)$$

$$K_{vv} = K - A(A^T K^{-1} A)^{-1} A^T \quad (A-4)$$

考虑到 (A-2) 式的结构，对于第 i 组观测值可得到：

$$tr(k_{vv})_i = \sum_{j=1}^{n_i} q_{v_{i,j}} = n_i q_i - tr(A_i (A^T K^{-1} A)^{-1} A_i^T) \quad (A-5)$$

观测值残差的方差 $q_{v_{i,j}}$ 可由下式经验地获得：

$$q_{v_{i,j}} = E \left[(V_{i,j} - E(V_{i,j}))^2 \right]$$

如果观测值中无粗差且系统误差在平差中得以改正时，

$$E(V_{i,j}) = 0$$

于是

$$q_{v_{i,j}} = V_{i,j}^2$$

代入到 (A-5) 式中，我们得到：

$$\sum_{j=1}^{n_i} V_{i,j}^2 = V_i^T V_i = n_i q_i - tr(A_i (A^T K^{-1} A)^{-1} A_i^T) \quad (A-6)$$

令

$$K = 6 \frac{2}{3} P^{-1} \quad \text{和} \quad Q = (A^T P A)^{-1}$$

则 (A-6) 式可写成

$$V_i^T V_i = (n_i - p_i tr(A_i Q A_i^T)) q_i$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{V_i^T V_i}{r_i} \\ r_i &= n_i - p_i tr(A_i Q A_i^T) \end{aligned} \right\} \quad (A-7)$$

这便是 Förstner 提出的方差估计式。即上文中的 (6) 式。其中 r_i 代表第 i 组观测值之多余观测分量，除了这里用到它外，在可靠性研究中它也是一个很重要的量，

参 考 文 献

- [1] 李德仁：论自检校区域网平差中的信噪比《测绘学报》第 3 期 1982。
- [2] 李德仁：验后方差估计的几种方法《武测资料》第 1 期 1981。
- [3] H. Ebner: A posteriori Varianzschätzungen für die Koordinaten unabhängiger Modelle. 《ZfV》1972, Heft 4, 97, Jahrgang

- [4] 李德仁：地面坐标作为带权观测值的空间后方交会与验后权估计《武测学报》第1期
1981。
- [5] Jan Heikkilä, Keijo Inkilä; Self-Calibration in Bundle Adjustment «The photogrammetric Journal of Finland» Vol 7. No 2. 1978.
- [6] 王之卓：《摄影测量原理》，测绘出版社 1979。

A Posteriori Weight Estimation in Self-Calibrating Bundle Block Adjustment

Li Deren

Abstract

A rigorous mathematical model of self-calibrating bundle adjustment consists of three kinds of observations, i.e. observations of image coordinates, of ground coordinates of control points, and of additional parameters. It is only when their weights are correctly chosen that a stable and reliable result of the self-calibrating adjustment can be ensured and hence, the image systematic errors can be compensated efficiently.

In this paper the weight estimation of these three kinds of observations is discussed by using a posteriori variances estimation in least square adjustment, and an analysis of the experimental results is carried out. The main conclusions are

(1) A posteriori variance estimation in self-calibrating bundle adjustment can always have a unique, convergent solution.

(2) In any case the estimator of the additional parameters' variance is comparatively exact. But when choosing the optimum weight of additional parameters we should properly consider the effect of systematic accumulation of accidental errors.

(3) For the case of a sparse ground control, the weight of ground control point observations can not be estimated exactly, because the redundancy of ground point observations is very small. But it will not affect the adjusted results practically. Only for the case of dense ground control, it is necessary and possible to estimate the weight of ground point observations more exactly.