

# 隧道施工地面导线网的合理布设\*

张 正 禄

**【提要】** 本文根据间接平差理论推导出隧道施工导线网的边角测量误差所引起的横向贯通误差的严密计算公式，讨论了边角权的选取对横向贯通误差的影响，以横向贯通误差为依据，对导线网图形及其最优化设计进行了讨论和论证，指出了导线作为隧道地面施工控制的优点和值得注意的一些问题。

## 一 序 言

随着光电测距仪的普遍使用，用导线网作为铁路山岭隧道的地面控制越来越多。与三角网和边角网相比，导线网具有布网灵活，工作量较少的优点。但就我国目前的隧道施工地面导线网来看，存在着一些值得注意的问题。例如网形过于简单；导线网测量误差对隧道横向贯通误差的影响值（简称影响值）系用近似公式估算；对于整个实测网以及洞口插点、插网系用近似方法平差等。因此，在精度计算以及布网方面都带有一定盲目性，近似平差的计算误差可能大于测量误差，对贯通造成不利影响。本文针对上述问题，以间接平差原理为根据，从影响值的严密计算出发，以电算为手段，通过典型图形和实例计算，提出了有关导线网设计、布网原则以及优化设计的一些理论和方法，供广大隧道测量和地下工程测量工作者参考。

## 二 基 本 公 式

当导线网较复杂时，采用条件平差法用人工进行网的设计和平差无疑相当麻烦。在使用电子计算机的情况下，间接平差法要比条件平差法优越，它体现在程序编写规律性较强，适用于不同复杂图形和能给出各种所需数据的直接成果。

设导线网有  $m$  个测站， $n_L$  个方向观测值， $n_s$  个距离观测值。取任意一点作起始点，任意两个点的方向作为起始方向（网的影响值与起始点和起始方向的选取无关<sup>[3]</sup>），则有  $n_L$  个方向观测误差方程式， $n_s$  个边长观测误差方程式， $m$  个和误差方程式。按史赖伯法则消去  $m$  个定向角未知数，将起算方位角作为条件式，则共有  $t = 2(m - 1) + 1$  个法方程式。其具体形式如下：

1) 约化的方向观测误差方程式：

$$(V_{ij})_K^L = a_{ij}x_i + b_{ij}y_i - a_{ij}x_j - b_{ij}y_j + l'_K \quad (2-1)$$

其中  $K = 1, 2, \dots, n_L$ ， $i, j = 1, 2, \dots, m$ ， $K$  为方向编号， $i, j$  为方向两端点号， $a_{ij}$ 、 $b_{ij}$  为方向系数。

2) 约化的和误差方程式：

$$[V]_K = [pa]_K x_K + [pb]_K y_K - a_{Kj}x_j - b_{Kj}y_j - \dots + [pl']_K \quad (2-2)$$

\*本文系研究生毕业论文的一部份，指导教师为李青岳教授，刘大杰讲师。

其中  $K = 1, 2 \dots m$ 。

3) 边长误差方程式:

$$(V_{ij})_K^S = -\cos T_i^0 x_i - \sin T_i^0 y_i + \cos T_j^0 x_j + \sin T_j^0 y_j + S'_K \quad (2-3)$$

其中  $K = 1, 2 \dots n_s$ 。误差方程式总数  $n = n_L + n_S + m$ 。

4) 方位角条件式:

$$a_{ij}x_i + b_{ij}y_i - a_{ij}x_j - b_{ij}y_j + T_i^0 - T_j^0 = 0 \quad (2-4)$$

各观测方向和观测边长的权按下式计算:

$$P_K = \frac{\mu^2}{m_{i_K}^2}, \quad P'_K = -\frac{\mu^2}{m_{s_K}^2} \quad (2-5)$$

$\mu$  为单位权中误差, 可使其等于一个或几个测回均值的方向观测中误差;  $m_{i_K}$  为方向观测中误差,  $m_{s_K}$  为边长观测中误差, 一般

$$m_{s_K} = \pm (b_1 + b_2 S_K) \quad (2-6)$$

$b_1$ 、 $b_2$  分别表示测距仪的加常数和乘常数。 $m_{s_K}$  可用毫米、厘米或分米为单位, 但应与  $(V_{ij})_K^S$  的单位一致,  $P'_K$  的单位与  $\mu$  和  $m_{s_K}$  的单位选取有关。和误差方程式  $[V]_K$  的权:

$$[P]_K = -\left( \sum_{i=1}^{H_K} P_{ti} \right)^{-1} \quad (2-7)$$

$H_K$  为第  $K$  测站上方向观测数。

由于点选择了一个起始点, 按一般方法组成法方程式时将出现奇异主子矩阵, 将方位角条件式作为权等于 1 的误差方程式, 一起组成法方程式, 可以改变主子矩阵的奇异性并得到同解。法方程式为:

$$\begin{aligned} & (A^T P A + B^T B)x + B^T K + (A^T P U + B^T W_b) = 0 \\ & Bx + \quad \quad \quad W_b = 0 \end{aligned} \quad \} \quad (2-8)$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & t_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n_L} b_{n_L} & \dots & t_{n_L} \\ [pa]_1 [pb]_1 & \dots & [pt]_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ [pa]_m [pb]_m & \dots & [pt]_m \\ a'_1 b'_1 & \dots & t'_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n_S} b'_{n_S} & \dots & t'_{n_S} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & P_{n_L} & \\ & & & [P]_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [P]_m \\ & & & & & & P'_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & p'_{n_S} \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

$$B = (a_a, a_b, \dots, a_t)$$

$$U = (l'_1, \dots, l'_{n_L}, [pl']_1, \dots, [pl']_m, s'_1, \dots, s'_{n_S})^T$$

$$x = (x_2, y_2, \dots, x_m, y_m)^T$$

(2-8) 式可写成:

$$\begin{pmatrix} N & B^T \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_t \\ W_b \end{pmatrix} = 0 \quad (2-10)$$

则:

$$\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} N & B^T \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} W_t \\ W_b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \\ W_b \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

由间接平差理论得:

$$Q_{ff} = P^{-1}, \quad Q_{xx} = Q_{11} A^T P A Q_{11} = Q_{11} \quad (2-12)$$

设有未知数函数  $F = F(\bar{X})$ , 其权函数式为:

$$dF = f^T dx \quad (2-13)$$

则  $F$  的权倒数:

$$Q_{ff} = f^T Q_{xx} f = f^T q_x = (q_x^T A^T P) P^{-1} (q_x^T A^T P)^T \quad (2-14)$$

其中

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & B^T \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

此外还可将  $F$  化为方向和边长观测值的权函数:

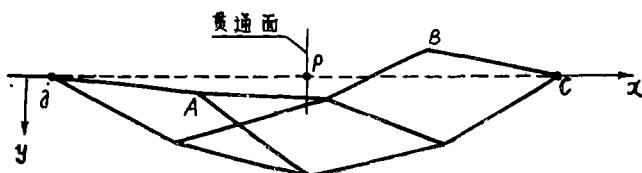
$$dF = D_L^T L + D_S^T S \quad (2-16)$$

则

$$Q_{ff} = D_L^T P_L^{-1} D_L + D_S^T P_S^{-1} D_S \quad (2-17)$$

其中  $D_L$  和  $D_S$  分别为方向和边长观测值的影响系数列阵<sup>[3]</sup>, 反映了观测值对于  $F$  的权倒数的影响。

设有如图一所示的导线网,  $P$  点为贯通点,  $j, C$  为进出口点, 选  $j, C$  连线的方向为  $x$  轴, 进口到出口为正向。影响值为分别由进出口点坐标及相应定向点  $A, B$  通过洞内导线推算得  $P$  点横坐标差值  $(y_{P_C} - y_{P_j})$  的中误差(洞内导线的测量误差未考虑), 由此可求得影响值的权函数式:



图一

$$\begin{aligned} d(\Delta Y_p) = d(Y_{P_C} - Y_{P_j}) &= -a_{jA}\Delta X_{jp} dX_j - (1 + b_{jA}\Delta X_{jp}) dY_j \\ &+ a_{jA}\Delta X_{jp} dX_A + b_{jA}\Delta X_{jp} dY_A - a_{CB}\Delta X_{CP} dX_B - b_{CB}\Delta X_{CP} dY_B + a_{CB}\Delta X_{CP} dX_C \\ &+ (1 + b_{CB}\Delta X_{CP}) dY_C \end{aligned} \quad (2-18)$$

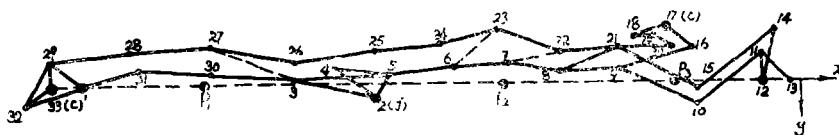
将  $j$  编为第 1 点,  $A$  编为第 2 点,  $B$  编为最末第 2 点,  $C$  编为最末一点, 则影响值权函数式的一般形式为:

$$\begin{aligned} d(\Delta Y_p) = f_p^T dx &= (f_{x_j}, f_{y_j}, f_{x_A}, f_{y_A}, \dots, 0, \dots, 0, f_{x_B}, f_{y_B}, f_{x_C}, f_{y_C}), \\ (x_j, y_j, x_A, y_A, \dots, x_j, y_j, \dots, x_B, y_B, x_C, y_C)^T \end{aligned} \quad (2-19)$$

$f_p^T$  可根据所设计的图形按 (2-18) 式计算。

由 (2-14)、(2-17) 式算得  $Q_{ff}$ , 则影响值

$$M_{P_j} = \mu \sqrt{Q_{ff}} \quad (2-20)$$



图二

取方向观测精度为 $1''$ , (2—6) 式的  $b_1$  与  $b_2 S_K$  取 $5^{\text{mm}}$  到 $15^{\text{mm}}$ , 按本文的公式和所编程序对图二所示的 × × 隧道实测导线网进行影响值计算, 其  $P_1$ 、 $P_2$  点的影响值分别为 $23 \sim 30^{\text{mm}}$  和 $30 \sim 34^{\text{mm}}$ , 而按现用的近似估算公式计算的分别为 $44^{\text{mm}}$  和 $44.5^{\text{mm}}$ , 相差较大。可见对于大型隧道工程, 用近似公式计算影响值是不适宜的。

### 三 边角权的选取

在作网的设计时, 其边角精度一般系根据所使用的仪器、观测方法、测回数等因素确定。比如用 J<sub>2</sub> 型经纬仪采用全圆方向观测法施测短边网 6—12 个测回, 方向观测均值的精度一般在 $0.7 \sim 1.2$  秒范围变动; 而短程光电测距仪的加常数多为 $5 \sim 15^{\text{mm}}$ ,  $b_2 S_K$  大致为 $0 \sim 15^{\text{mm}}$ 。由 (2—14) 式知, 影响值权倒数  $Q_{ff}$  不仅与图形有关, 且与 P 有关。即在同时具有边角观测值时, 与边角权的选取有关。为了研究  $Q_{ff}$  与 P 的关系, 对图二的网在贯通点  $P_1$  的  $\sqrt{Q_{ff}}$  值进行了十种统计计算, 结果列于表 1。

表 1

$m_a (")$	$b (mm)$	$b_2 S_K (mm)$	0.7			1.0			1.2			
			10			10			15	5	10	
			0	10	15	0	10	15	15	5	0	10
j-A	C-B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2-3	33-32	26	26	27	26	25	27	26	25	26	26	
	33-29	24	24	25	24	23	25	25	24	23	24	
2-4	33-32	29	28	30	29	28	30	30	28	29	29	
	33-29	27	29	28	27	28	28	27	27	27	28	
2-5	33-32	28	29	30	28	28	28	30	28	27	28	
	33-29	26	27	29	26	27	27	28	27	26	26	

表中  $j-A, C-B$  分别表示进出口点上的定向方向。取方向观测精度  $m_a$  为单位权中误差。 $b_1, b_2$  分别为测距仪的加常数和乘常数，测边精度取毫米。 $\sqrt{Q_{ff}}$  的单位为毫米/秒。由表中可看出，无论是  $m_a$  取  $0.7''$ 、 $1.0''$  和  $1.2''$ ，当边角权在一定范围内变化时， $\sqrt{Q_{ff}}$  值的变化甚微。由 (2—20) 式可知，影响值随单位权中误差变化。由此可见，对图二所示的直线隧道，在边角精度在一定范围内变化时，对影响值  $M_p$ ，作用较大的仍是方向观测精度。例如，若将  $m_a$  从 1.2 秒提高到 0.7 秒，其影响值可以减小约 40%。

然而在作网的平差计算时，倘若边角测量精度与实际精度相差较大时，则可能造成对平差成果的歪曲，由于洞内导线的进洞放样数据是由平差值推算的，因此，会对贯通带来不利影响。而测角量边精度是无法精确知道的，我们只能期望所选取的值尽量靠近实际值。一般用以下方法确定：一是对所使用的仪器进行检验、鉴定，确定  $m_a$  和  $b_1, b_2$  的值；一是布设边角多余观测较多的试验边角网，用最小二乘方差分量验后估计的方法确定边角测量精度，对于多余观测较多的导线网也可采用此法；此外还可以根据三角形闭合差、多边形闭合差按有关公式计算测角精度，根据厂标精度结合实测经验等确定测边精度等。从本文对图二的实测网的十种平差计算表明，当边角精度在表 1 中第 7、8 两种情况下，坐标变化值最大达  $14^m$ ，而在其它各种情况下，坐标变化值较小，多在  $4''$  以下，小于其坐标中误差。但无论那一种的计算结果与近似方法计算出的坐标值相比较，都有较大的差异，最大差值达 17 毫米，其坐标变化值大于其中误差的导线点占三分之一左右。由此说明采用近似平差方法所得到的结果是不可靠的。而采用严密平差，也同样存在着一个如何正确选取边角权的问题。

#### 四 导线网的图形

影响值的权函数式还可化为：

$$dF = d(\Delta Y_p) = f_f^T d \hat{S} + f_a^T d \hat{\alpha} \quad (4-1)$$

$\hat{S}$ 、 $\hat{\alpha}$  为导线网靠近隧道进出口连线  $j-c$  的环边（称近轴环边）上的边长和方向观测值的平差值，由协因数阵传播律得：

$$\begin{aligned} Q_{ff} &= (f_s^T f_a^T) \begin{pmatrix} Q_{\hat{s}\hat{s}} & Q_{\hat{s}\hat{\alpha}} \\ Q_{\hat{\alpha}\hat{s}} & Q_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_s \\ f_a \end{pmatrix} \\ &= f_s^T Q_{\hat{s}\hat{s}} f_s + f_a^T Q_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} f_a + f_s^T Q_{\hat{s}\hat{\alpha}} f_a + f_a^T Q_{\hat{\alpha}\hat{s}} f_s \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中

$$\begin{aligned} f_s^T &= (\sin T_1, \sin T_2, \dots, \sin T_K) \\ f_a^T &= (d_1, -d_1, d_2, -d_2, \dots, d_i, -d_i, \dots, d_{K-1}, -d_{K-1}) \end{aligned} \quad (4-3)$$

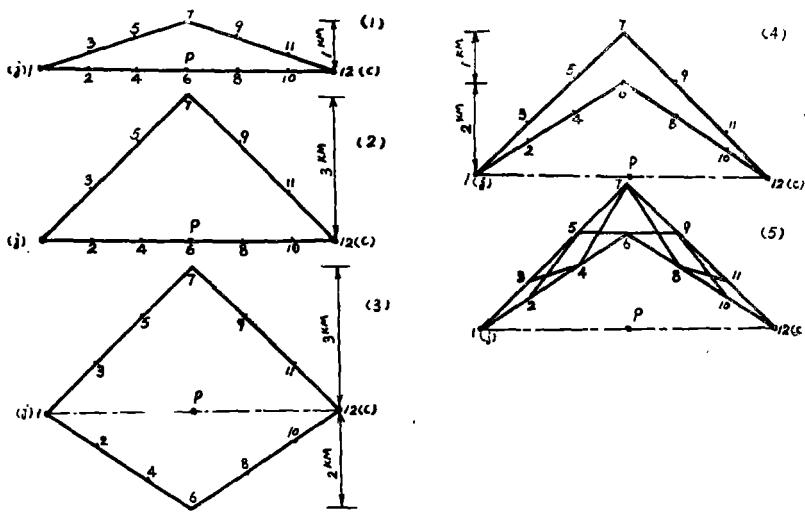
$T_1, T_2, \dots, T_K$  为近轴环边的方向角， $d_i$  为环边上第  $i$  点到贯通面的距离。当近轴环边与隧道  $j-c$  连线重合。则  $f_s^T = (0, \dots, 0)$ ， $Q_{ff}$  只受  $Q_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}$  的影响，为了减小  $Q_{ff}$ ，减少  $f_a^T$  中分量个数即减少近轴环边上导线点的个数最好。

由条件平差理论可知，设影响值权函数为  $dF = f^T d \hat{L}$ ，其中  $\hat{L}$  为观测值平差值向量，则

$$Q_{ff} = \left( \frac{ff}{p_L} \right) - \frac{\left( \frac{af}{p_L} \cdot 1 \right)^2}{\left( \frac{aa}{p_L} \right)} - \frac{\left( \frac{bf}{p_L} \cdot (r-1) \right)^2}{\left( \frac{bb}{p_L} \cdot 1 \right)} - \frac{\left( \frac{rf}{p_L} \cdot (r-1) \right)^2}{\left( \frac{rr}{p_L} \cdot (r-1) \right)} \quad (4-4)$$

$r$ 是条件数，即增加条件数可减小 $Q_{ff}$ 。由以上分析，导线网的布设应遵循以下原则：导线网应有一条环边尽量与 $jc$ 连线靠近，且该环边上的测站点应尽量减少；增加一条边和两个方向值，可增加三个条件，因此，应加测若干边长和方向观测，构成多余观测较多的复杂网。所应加测的边长和方向，可按(2—17)式进行优化计算。

图三是同一直线隧道的五种典型布网图形， $jc$ 长6公里，P点位于中间，测站数均为12，每条边在 $jc$ 上的投影长为1km，取方向观测精度为 $1''$ ， $b_1 = 10\text{mm}$ ， $b_2 = 0$ （边长在 $2\text{km}$ 以下的导线网可不考虑比例误差）。其影响值如表2所示。



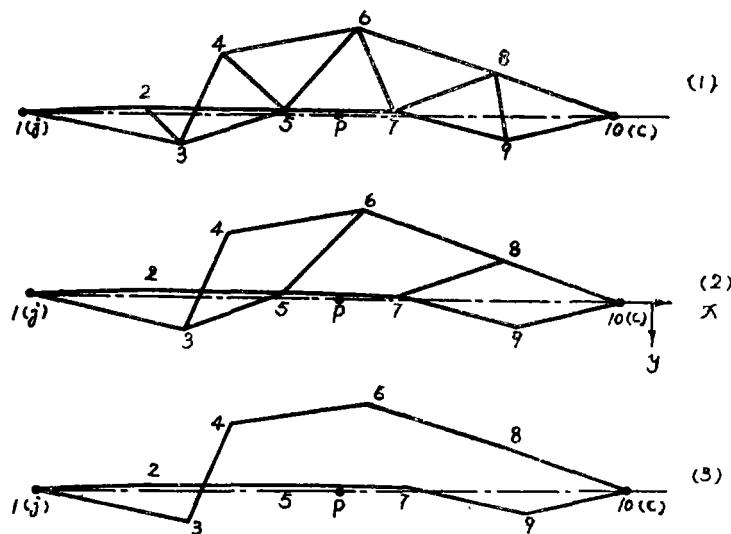
图三

表2

图 形	1	2	3	4	5
影响值 (mm)	19.4~20.6	21.6~21.9	22.4~22.9	22.2~22.4	16.2~16.8

图四(1)是 $\times \times$ 隧道的实测三角网，(2)、(3)分别表示两种导线网图形，测角量边的精度如前例，其影响值如表3所示。

图三几种方案的计算表明，当导线网的近轴环边与 $jc$ 重合时，另一环边从1公里偏移到3公里，影响值仅增加6%；近轴环边偏离值为隧道全长的 $1/3$ 到 $1/2$ 时，影响值增加约15%左右；在环边偏离轴线相同时，两条环边位于同一侧较好；当加测一些边和方向构成较复杂的网形时，方案(5)比(4)的影响值可减少30%。图四中，(2)比(3)提高精度26%，(2)比(1)的测角网提高精度23%。导线网布网很灵活，能在通视很困难的情况下布设，且精度较高，是值得推荐的布网方案。我国目前的铁路隧道地面导线网，网的两条环边靠得很近，环边上的测站几乎是成对出现，且环数较少，其主要原因可能是为了布网方便，为了避免复杂图形平差计算上的麻烦。这种网形易受相同旁折光的影响；同时由于环数少，多余观测少，观测中的粗差不易被发现。因此建议在前述布网原则的前提下，导线网



图四

表 3

影响值(mm) 定向方向	图 形		
	1	2	3
j—2 c—9	18.7	17.5	19.0
j—2 c—8	18.4	16.0	21.1
j—3 c—9	23.0	16.0	22.1
j—3 c—8	22.8	14.1	19.1

的两条环边不宜靠得太近，应布设为较复杂的环形，如图一、图三（5）、图四（2）的图形。

### 五 导线网的最优化

由(2—18)式可知，影响值的权函数式与进出口点上洞内导线的定向点A、B有关。故影响值与定向点的选择有关。设进出口分别有K和L个定向点，则有K·L组定向方向和K·L个影响值，见表1、表3。其中最小影响值所对应的定向方向为最佳定向方向，最大影响值所对应的为最不利定向方向。表3列出了图四各布网方案的4组影响值，由于图形不同，最佳定向方向亦不同，最小影响值与最大影响值相比，精度提高了14%~20%。根据本文所编的电算程序可以计算出每一组定向方向下网的影响值，因此能准确地得到最佳定向方向，这是

导线网最优化的内容之一。

导线网最优化的第二个内容是如何确定应加测的边和方向的位置；以及如何把各测站上各方向的等权观测变为各测站的不等权观测，在权总和不变的情况下使影响值达到最小。

根据求条件极值的原理，设方向观测值的权的总和为C，由(2—17)式，可推得当观测方向的权满足<sup>[2]</sup>：

$$p_i = \frac{|d_{1,i}|}{\sum |d_{1,i}|} \cdot C$$

时， $Q_{ff}$ 最小。其中 $d_{1,i}$ 为观测值 $l_i$ 在(2—16)式中的系数。由于 $d_{1,i}$ 与观测值初次选取的权有关，故要作迭代计算，当第*i+1*次与第*i*次的 $Q_{ff}$ 值相差小于某一限值时，停止迭代，再将各测站上各方向的不等权观测化为等权观测，在权总和不变的条件下，根据优化设计和最大最小测回数等因素选定各测站的设计权，根据设计权制定测站观测方案和计算优化后的影响值。

为了确定加测边和方向的条数和位置，对于一个导线网，先对凡是能通视的方向都加测边和方向，并计算(2—17)式中的边长和方向的影响系数矩阵。不难理解，影响系数愈大则相应边或方向的观测误差对 $Q_{ff}$ 的影响则越大，因此施测那些系数较大的边和方向，则可能有效地提高精度。

应该指出，测站方向观测的最优化以及加测边和方向的选择都应按最佳定向方向进行，以期得到最小的影响值。

例如图三(5)的最佳定向方向为(j—3)、(C—11)，可加测的8条边的系数列于表4：

表4

可加测边	$S_{3-4}$	$S_{8-11}$	$S_{5-6}$	$S_{6-9}$	$S_{4-7}$	$S_{7-8}$	$S_{2-5}$	$S_{9-10}$
影响系数	-0.0047	0.0047	-0.0007	0.0007	-0.0188	0.0188	-0.019	0.019

由表中易知，加测后面的四条边较好。即应加测与隧道方向大致垂直的那些边。

通过对图三、图四各种图形的计算，导线网在方向观测的权总和为定值的情况下，对测站方向观测作最优化设计，可提高影响值的精度15%~21%。同时，还具有进出口点，定向点测站上的权分配较大，网的中部测站点的权分配较小的规律。由于进出口点、定向点靠近隧道两端，到测站的路程较短，而这些站上测回数分配较多。故在权总和不变的情况下，不仅可提高精度，还能减少工作量。

## 六 结束语

由于光电测距仪的使用，导线网有了新的发展，它具有布网灵活，精度较高的优点，乐于为隧道测量工作者应用。为了提高网的精度，网形应趋于复杂一些，网的设计和平差采用电子计算机进行已势在必行。本文按间接平差理论给出了计算影响值，优化设计以及平差的公式和程序，分析了导线网布设所应遵循的原则，用典型图型和实测图形进行了计算和验证，讨论了目前布网所存在的一些问题。本文作者用Algol语言所编写的程序可以用于实际。

## 参 考 文 献

- [1] 崔希璋等:《广义测量平差》 1979.
- [2] 李青岳:工程测量专用控制网的最优化问题。《测绘特刊》 1979.10.
- [3] 张正禄:论隧道施工三角网和边角网测量误差对横向贯通误差的影响和网的最优化设计。《测绘学报》第三期 1982.

## Discussions on the design of a surface traverse network for setting out tunnels

Zhang Zhenglu

### Abstract

Based on the least square adjustment by indirect observations, this paper gives the rigorous formulas for calculating the lateral break-through error caused by surveying errors of a surface traverse network for setting out a tunnel. Starting from this lateral break-through error and considering some examples, the influence caused by the different weights selected for the direction and distance observations, the optimization for the figure and observation programme of the traverse network are discussed. The advantages of adopting traverse network as a control for setting out a tunnel and some problems to which attention must be paid in the design are pointed out.