

几何交叉活节放大因子的计算式[※]

李 以 赫

〔提要〕 交叉带活节是自动安平水准仪中广泛采用的元件。作者在本文中给出了交叉带活节（放大因子 $n \leq -1$ ）的放大因子的一般公式。

在本文后面作者给出了一种交叉带活节的放大因子的一系列测量结果。测量结果证明，所导出的公式是正确的，并且可以用于自动安平水准仪补偿器的设计。

一、问题的提出

几何交叉活节是自动安平水准仪的补偿器中广泛采用的一种灵敏元件。它是由两根软弹性丝交叉张于固定部件AB和摆动部件CD之上而组成的铰链机构（见图1）。固定部件AB为补偿器的基架，它与望远镜壳体固连。摆动部件CD上一般固定有使望远镜视线偏转的光学另件及空气阻尼器的活塞（或气缸）。当水准仪根据圆水准器整平了时，AB相对水平线有一微小倾角 α 。这时由于重量G比较重，弹性丝AD和BC比较软，则CD将反转 β 角，而且 $\beta \geq \alpha$ （图2）。我们称这种情况的交叉活节为几何交叉活节（或几何摆）。当然它也是有弹性作用的。为了区别 $\beta < \alpha$ 时的弹性交叉活节起见，暂且称它为几何交叉活节。AD和BC无限柔软时（或毫无弹性时）的几何交叉活节，我们称之为纯几何交叉活节。当 $\beta = \alpha$ 时，称为负一交叉活节，它们都是几何交叉活节的特殊情况。

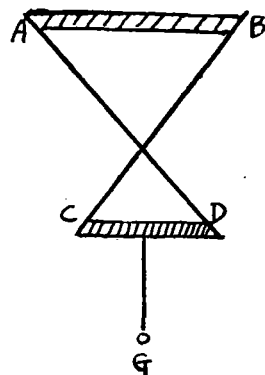


图 1

我们称 $n = -\frac{\beta}{\alpha}$ 为活节的放大因子，负号表示CD与AB旋向相反，它与活节的参数（几何尺寸、重量、交叉角、弹性参数）有什么关系，是我们感兴趣的问题，也是设计自动安平水准仪时，要解决的问题。上文谈的负一交叉活节和弹性交叉活节的放大因子 n 的计算式已经推导出来了，见参考文献〔1〕和〔2〕。目前在国内外文献中还没有找到几何交叉活节的放大因子 n 和参数间的一般关系式。霍夫曼在他的论文〔3〕中谈到：纯几何交叉活节的计算式就是纯几何四边形活节的计算式将 b 反符号则可应用。现根据该文中四边形活节的计算式写出纯几何交叉活节的计算式为：

$$n = \frac{\frac{-bc}{2d} + h}{\frac{-bd}{2c} + \frac{b^2}{4c} + \frac{b^2c}{4d^2} - h} \quad (1)$$

※ 几何交叉活节可又称交叉带活节

式中(见图1)

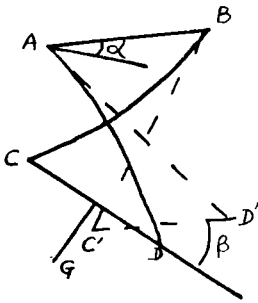


图 2

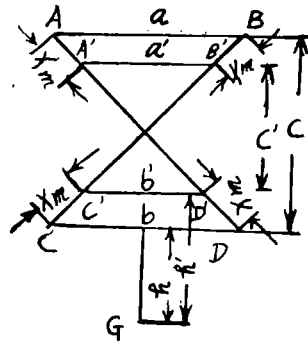


图 3

b 为 CD 之长度,

c 为 AB 与 CD 之间的距离,

$$d = \frac{a+b}{2}$$

a 为 AB 之长度;

h 为重心 G 到 CD 之距离, 在 CD 之上为正, 在 CD 之下为负。

由于不能找到毫无弹性的材料来做出纯几何交叉活节, 这样就不能直接使用(1)式。霍夫曼以弹性丝摆动端的轨迹曲率中心作为弹性丝的瞬时旋转中心, 用该中心代替几何交叉活节的 A 、 B 、 C 和 D 四点, 构成纯几何交叉活节 A' 、 B' 、 C' 和 D' 后, 再使用(1)式。他推导出弹性丝瞬时旋转中心到固定端的距离为(见图3):

$$X_m \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{EJ}{P}} - \frac{EJ}{4PL} \quad (2)$$

式中 E 为弹性丝的弹性模量;

J 为弹性丝中性轴惯矩;

P 为弹性丝上受到的拉力;

L 为弹性丝的工作长度。

算出 X_m 后, 可算出 a' 、 b' 、 c' 和 d' , 至于 h 是否要换成 h' , 霍夫曼在文中没有论及, 如果将弹性丝瞬时旋转中心 A' 、 B' 、 C' 和 D' 作为纯几何交叉活节看待, 则应采用 h' 代替 h (图3) 我们将 a' 、 b' 、 c' 、 d' 和 h' 代入(1)式计算放大因子 n , 与实测结果相差较大。几何活节放大因子越接近负一, 则误差越大。这种办法只适合于放大因子接近纯几何时的情况。而且到底是采用摆动端点轨迹曲率中心, 还是采用弹性丝两端点切线交点作为瞬时旋转中心还是存在问题的。哈尔德在他的博士论文[2]中, 对霍夫曼的观点提出了异议。他认为要采用弹性丝两端点处切线的交点作为瞬时旋转中心。目前实际上只对几何交叉活节推导出了两个特例公式。一个是负一交叉活节的[1], 一个是纯几何交叉活节的式(1)。因此有必要推导出一个从负一交叉活节到纯几何交叉活节的几何交叉活节的一般计算式, 以满足设计需要, 这是本文的目的。

二、软弹性丝的特性

弹性丝的软硬程度是相对于它受的外力而言的。对于几何交叉活节而言,要弹性丝软一些,重量 G 重一些才能达到 $\beta \geq \alpha$,否则 β 角将小于 α 角而成为弹性摆。为了获得几何交叉活节的一般计算式,首先来研究一下软弹性丝的一些特性。

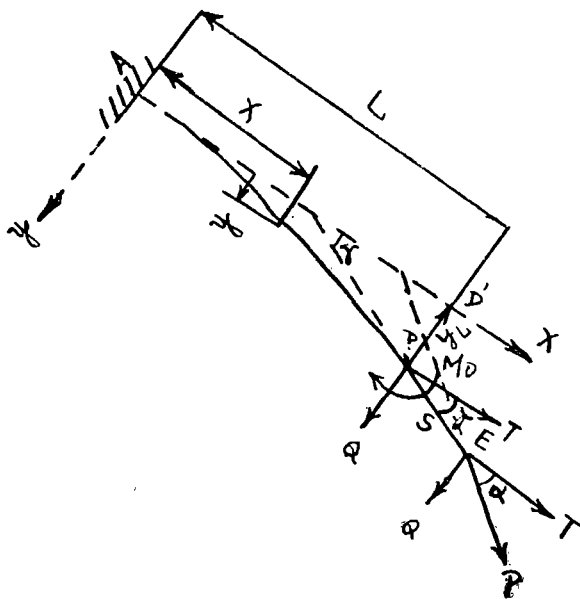


图 4

见图 4, 我们来研究一般弹性丝受力后的最大挠度。设 AD 为弹性丝, A 端固定, D 端有一刚性线为 DE , E 点处受到与弹性丝固定端 A 的切线方向 AD' 成 α 角的拉力 P 的作用, 而从 D' 点移到 D 点。 D 点处最大挠度为 y_L , 弹性丝长度为 L , DE 的长度为 S , 其方向即为弹性曲线 D 点的切线方向, 与 AD' 交叉成 γ 角。选取坐标原点为 A , y 轴与 x 轴方向如图 4 所示。

在 E 点将拉力 P 分解为平行于 x 轴的分力 T 和平行于 y 轴的分力 Q , 则有

$$\left. \begin{aligned} T &= P \cos \alpha \\ Q &= P \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由于一般 $\alpha \leq 15'$, 我们取 $\cos \alpha = 1$ 和 $\sin \alpha = \alpha$,

$$\left. \begin{aligned} T &= P \\ Q &= P\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

如果将两分力 T 和 Q 平移到 D 点, 则在 D 点要加一附加力矩

$$M_D = QS \cos \gamma - TS \sin \gamma \quad (5)$$

由于 $\gamma \leq \alpha \leq 15'$, 我们取 $\cos \gamma = 1$ 和 $\sin \gamma = \gamma$, 则

$$M_D = QS - TS \gamma \quad (6)$$

将 (4) 式代入上式, 则

$$M_D = PS\alpha - PS\gamma = PS(\alpha - \gamma) \quad (7)$$

由文献[4], 第210页, 可知弹性曲线的微分方程式为:

$$\pm EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{(x)} \quad (8)$$

式中 E 为弹性模量;

J 为弹性丝中性轴惯矩;

$M_{(x)}$ 为作用在 x 点处的外力矩。

由图4可知:

$$M_{(x)} = Q(L - X) - T(y_L - y) + M_D$$

上式代入(8)式有

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2 y}{dx^2} &= Q(L - X) - T(y_L - y) + M_D \\ &= Ty - Qx - Ty_L + QL + M_D \\ y'' - \frac{T}{EJ} y + \frac{Q}{EJ} x + \frac{-QL - M_D + Ty_L}{EJ} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(4) 及 (7) 式代入上式有

$$y'' - \frac{P}{EJ} y + \frac{P\alpha}{EJ} x + \frac{-P\alpha L - PS(\alpha - \gamma) + Py_L}{EJ} = 0 \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad k &= \sqrt{\frac{P}{EJ}} \\ A &= \frac{P\alpha}{EJ} = k^2 \alpha \\ B &= \frac{-P\alpha L - PS(\alpha - \gamma) + Py_L}{EJ} \\ &= k^2 [-\alpha L - S(\alpha - \gamma) + y_L] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式代入(10), 得二阶非齐次常系数微分方程式

$$y'' - k^2 y + Ax + B = 0 \quad (12)$$

其通解为

$$y = c_1 \operatorname{ch} kx + c_2 \operatorname{sh} kx + \frac{Ax + B}{k^2} \quad (13)$$

取导数

$$y' = c_1 k \operatorname{sh} kx + c_2 k \operatorname{ch} kx + \frac{A}{k^2} \quad (14)$$

于是待定系数 c_1 及 c_2 可由下述条件求出

$$\left. \begin{aligned} y|_{x=0} &= 0 \\ y'|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将上式代入 (13) 及 (14) 得

$$\left. \begin{aligned} 0 &= c_1 + \frac{B}{k^2} \\ 0 &= c_2 k + \frac{A}{k^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

因此

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{B}{k^2} \\ c_2 &= -\frac{A}{k^3} \end{aligned}$$

将式 (11) 代入上式有

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \alpha L + S(\alpha - \gamma) - y_L \\ c_2 &= -\frac{\alpha}{k} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上式代入 (13) 式并整理得

$$y = [y_L - \alpha L - S(\alpha - \gamma)](1 - \operatorname{ch} kx) - \frac{\alpha}{k} \operatorname{sh} kx + \alpha x \quad (18)$$

取 $x = L$ 代入上式, 并整理, 可得最大挠度

$$y_L = \alpha L - \frac{\alpha}{k} \operatorname{th} kL + S(\alpha - \gamma) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kL}\right) \quad (19)$$

上式中的第三项是由外力的作用点不在 D 处引起的最大挠度值, 其中 γ 是未知量, 下面我们已知量来表示上式中的 $(\alpha - \gamma)$ 。

取 $x = L$ 代入 (14) 式, 可得

$$y'_L = \tan \gamma = \gamma = [\alpha L + S(\alpha - \gamma) - y_L] k \operatorname{sh} kL - \frac{\alpha}{k} k \operatorname{ch} kL + \alpha$$

$$\gamma = [\alpha L - y_L] k \operatorname{sh} kL + S k (\alpha - \gamma) \operatorname{sh} kL + \alpha (1 - \operatorname{ch} kL)$$

用 α 减去上式并整理得

$$\alpha - \gamma = \frac{\alpha}{1 + S k \operatorname{sh} kL} - \frac{(\alpha L - y_L) k \operatorname{sh} kL}{1 + S k \operatorname{sh} kL} - \frac{\alpha (1 - \operatorname{ch} kL)}{1 + S k \operatorname{sh} kL} \quad (20)$$

上式中的 $(\alpha L - y_L)$ 可由 (19) 式得出。

$$\alpha L - y_L = \frac{\alpha}{k} \operatorname{th} kL - S(\alpha - \gamma) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kL}\right)$$

上式代入 (20) 并整理得

$$(\alpha - \gamma) = \frac{\alpha \operatorname{sh} kL (1 - \operatorname{th} kL)}{1 + S k \operatorname{sh} kL + S k \operatorname{ch} kL \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kL}\right)} \quad (21)$$

由这个表达式可知, 当 $kL = \infty$ 时, $\text{th}kL = 1$, 这时

$$\alpha - \gamma = 0 \quad (22)$$

$$\alpha = \gamma \quad (23)$$

也就是说, (19) 式表达的最大挠度 y_L 的第三项为零。在这种情况下最大挠度

$$y_L = \alpha L - \frac{\alpha}{k} \text{th}kL \quad (24)$$

因此我们认为当 $\text{sh}kL \approx \text{ch}kL$ 或 $\text{th}kL \approx 1$ 时的弹性丝为软弹性丝。这种软弹性丝有以下几个特性:

(1) 最大挠度为

$$y_L \approx \alpha L - \frac{\alpha}{k} \text{th}kL$$

(2) 软弹性丝受力端 D 的切线方向就是拉力方向, 即

$$\gamma \approx \alpha$$

(3) 力的作用点 E 到 D 的距离 S, 对最大挠度影响较小。

至于 kL 要大到什么程度才能把 $\text{th}kL$ 近似看成等于一, 是取决于我们最后的计算结果要求多精确。一般当 $kL \approx 2$ 时, 将来计算几何交叉活节的放大因子可到百分之一的精度。对于设计来说是足够了。

三、纯几何交叉活节放大因子计算式的另一种形式

为了获得几何交叉活节放大因子的计算式, 我们还是要从纯几何交叉活节放大因子的计算式出发。

现将 (1) 式重抄于下

$$n = \frac{\frac{-bc}{2d} + \frac{h}{2c} + \frac{b^2}{4c} + \frac{b^2c}{4d^2} - h}{-bd} \quad (1)$$

式中符号含义为 (见图 5):

a 为 AB 之长度;

b 为 CD 之长度;

c 为 AB 与 CD 之间的距离;

h 为重心 G 到 CD 之间的距离;

在 CD 之上为正, 在下为负;

$$d = \frac{a+b}{2}$$

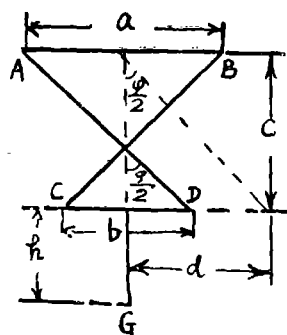


图 5

如果用另外的参数表示 (见图 6):

L 为 AD 之长, 即为吊丝工作长度;

g 为 D 点到两吊丝交叉点之距离;

$\lambda = \frac{g}{L}$, 称为分段比值;

φ 为交叉吊丝的夹角。

由图 5 及图 6 可知老参数和新参数有下述关系:

$$\left. \begin{aligned} b &= 2g \sin \frac{\varphi}{2} \\ c &= L \cos \frac{\varphi}{2} \\ d &= L \sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

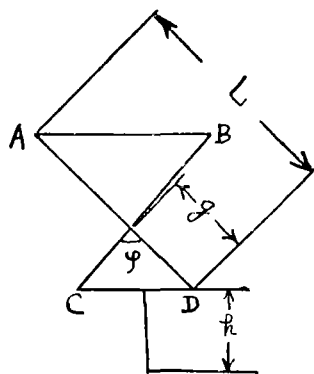


图 6

将上式代入 (1) 式有

$$n = \frac{-g \sin \frac{\varphi}{2} \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}} + h}{-g \sin \frac{\varphi}{2} \tan \frac{\varphi}{2} + \frac{(2g \sin \frac{\varphi}{2})^2}{4L \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{(2g \sin \frac{\varphi}{2})^2 L \cos \frac{\varphi}{2}}{4L^2 \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} - h} \quad (26)$$

经整理后可得

$$n = \frac{-g \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 + h \cos \frac{\varphi}{2}}{-g \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 + \lambda g - h \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (27)$$

上式右边各项的几何含义可由图 7 看出。上式分子为 OE 之长度。因此

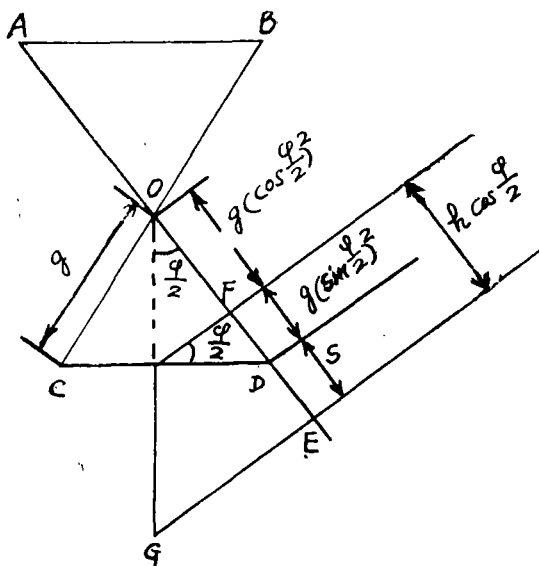


图 7

则得几何交叉活节的 β 表达式

$$\beta = \frac{-L\alpha + \frac{\alpha}{k} \text{th}kL + \frac{S}{\lambda} \alpha}{g - \frac{S}{\lambda}}$$

于是几何交叉活节的放大因子计算式为

$$n = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-L + \frac{1}{k} \text{th}kL + \frac{S}{\lambda}}{g - \frac{S}{\lambda}} \quad (34)$$

或
$$n = \frac{-1 + \frac{1}{kL} \text{th}kL + \frac{S}{g}}{\lambda - \frac{S}{g}} \quad (35)$$

这就是从负一交叉活节到纯几何交叉活节的几何交叉活节的一般计算式。它是包含几何交叉活节的两种特殊情况。当 $kL = \infty$ 时,即吊丝毫无弹性时,分子中第二项为零,则得纯几何交叉活节的计算式(29)。当 $n = -1$ 时,有

$$-\lambda + \frac{S}{g} = -1 + \frac{1}{kL} \text{th}kL + \frac{S}{g}$$

$$(1 - \lambda)kL = \text{th}kL \quad (36)$$

这就是作者在[1]中所导出的负一交叉活节的计算式。因此式(35)是几何交叉活节的一般计算式,在理论上包含了上述两特殊情况。

我们用 $\varphi = 90^\circ$, $\lambda = 0.5$, $L = 7.6$ 毫米, $h = -16.5$ 毫米,弹性丝的截面积为0.491毫米 \times 0.076毫米的几何交叉活节做了系统实验,实测的放大因子见表一。 kL 值和 n 值的实测关系见图9。

表1

$n_{\text{实}}$	2G克	E公斤/毫米 ²	J	k	kL	$n_{\text{理}}$	$n_{\text{霍}}$
-1.017	57.8	12500	0.00001796	0.301	2.18	-1.019	-1.102
-1.030	65.7	12500	0.00001796	0.326	2.48	-1.032	-1.105
-1.046	77.2	12500	0.00001796	0.347	2.64	-1.040	-1.109
-1.055	86.7	12500	0.00001796	0.369	2.80	-1.045	-1.110
-1.067	102.2	12500	0.00001796	0.400	3.04	-1.055	-1.113
-1.082	122.7	12500	0.00001796	0.438	3.32	-1.063	-1.115
-1.036	122.7	12500	0.00003184	0.329	2.51	-1.035	-1.108
-1.075	43.8	12500	0.00005418	0.476	3.79	-1.075	-1.16
-0.994	46.2	12500	0.00001796	0.288	2.04	-1.009	

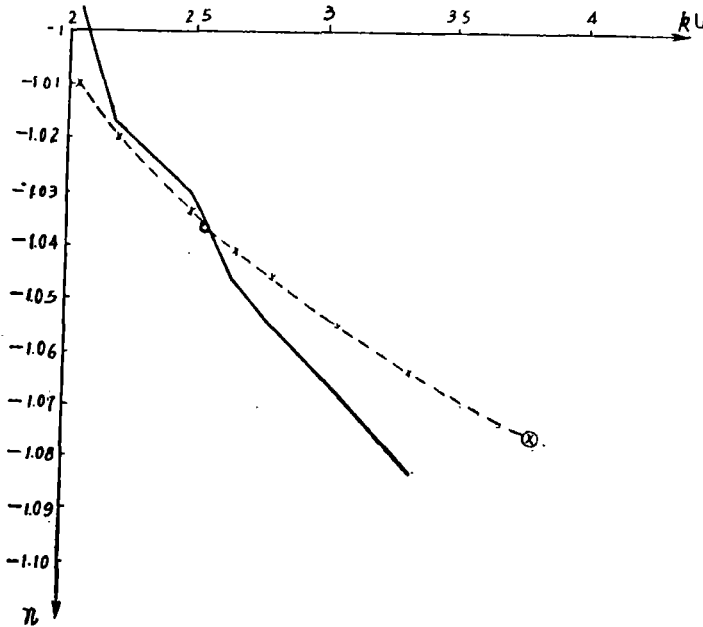


图 9

表 1 中 $n_{\text{实}}$ 是实测的放大因子, $n_{\text{理}}$ 是按本文的式 (35) 代入实测参数值算出的放大因子, $n_{\text{霍}}$ 是按霍夫曼的方法算出的放大因子。由表可见式 (35) 是正确的, 由它算出的放大因子与实测的平均只有百分之一的误差, 而且反映了 kL 变化时, n 的变化规律。而霍夫曼的方法误差较大, 也没有反映出实际变化规律, 它在这种情况下是不适用的, 而本文的式 (35) 则可满足设计需要。

图 9 中细实线及圈点为实测放大因子, 虚线为用式 (35) 算得值。 $kL=2.51$ 的圈点是采用了截面积为 0.090 毫米 \times 0.523 毫米的弹性丝测得的结果, $kL=3.79$ 的圈点是采用了截面积为 0.051 毫米 \times 0.0490 毫米的弹性丝测得的结果。由图 9 可看出, 实测值是在理论值两边变化的, 平均有百分之一的误差, 这主要是实验误差。

式 (35) 可解决一些设计问题。比方, 当由仪器总体设计方案定下放大因子 n , 几何活节的几何尺寸 (λ , g , φ , h , S) 及重量 G 之后, 我们可以由它算出弹性丝的抗弯刚度 EJ , 如果 E 定下来, 则可算出弹性丝应采用多大的截面积。算弹性丝参数之前, 首先应该假定弹性丝毫无弹性, 用已知参数计算一下 n 值, 其绝对值要比设计要求的大才能进一步计算弹性丝参数。否则应该改变已知参数才行。因为无限软的吊丝都达不到要求的 n 值, 那软弹性丝就更达不到了。

此外, 由于加工误差, 装配后的几何交叉活节的放大因子不会精确达到设计值, 设计时需要考虑某些参数可调整。由式 (35) 可知, $n=-1$ 的情况及其附近调整重力 G , 对 n 影响较显著, 其它情况可调整重心高度, 这要根据情况选用。

在结束本文之前, 还要强调一下, 使用式 (35) 是有条件的, 即 kL 值要比较大, 也就是要 $shkL \approx chkL$ 。几何交叉活节一般是满足这个条件的。这样做的目的是使计算简单些。如果 kL 比较小, 则 (35) 的分子中应加上重心高度引起的弹性项:

$$\frac{S \operatorname{sh} kL (1 - \operatorname{th} kL) (1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kL})}{1 + S k \operatorname{sh} kL + S k \operatorname{ch} kL (1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kL})}$$

这可由(19)式的第三项及(21)式得出。这样一来 kL 值就处在一个较复杂的超越函数中了。要解算出与弹性丝参数有关的 kL 值就较麻烦。我们只好以不同的 kL 值代入计算式, 用逐渐逼近的办法解算出 kL 值。因此本文实际上也解决了 kL 值比较小的计算问题。

本文提出了一个计算几何交叉活节放大因子的一般公式。它能满足设计需要。为了使我国自动安平水准仪从目前的研制阶段发展到成批生产阶段。有了放大因子计算式还是不够的。还有一些问题, 如几何交叉活节的精度究竟与那些参数有关等等, 需要我们共同努力去解决。

参 考 资 料

- [1] 李以赫: 自动安平水准仪补偿器的交叉活节 中国仪器仪表学会第一届代表大会学术交流论文。武测资料 1979.1.
- [2] Hardy R. Beitrage Zur Entwicklung automatischer Nivellierinstrumente. D. G. K. Reihe C Heft Nr.61 1963.
- [3] Hofmann. O. Ein neues astasiertes Pendel für genaue Neigungsmessungen und automatische stabilisierung von Ziellinien. Jenaer Jahrbuch, 1958.
- [4] 南京工学院力学教研组编《材料力学》上册 人民教育出版社 1961

Die Allgemeine Formel für den Vergrößerungsfaktor des Kreuzbandgelenks

Li Yihe

Zusammenfassung

Das Kreuzbandgelenk ist ein Element, das in den automatischen Nivellierinstrumenten üblich verwandt wird. In der vorliegenden Arbeit gibt der Verfasser die allgemeine Formel für den Vergrößerungsfaktor des Kreuzbandgelenks (Vergrößerungsfaktor $n \leq -1$);

$$n = \frac{-1 + \frac{1}{kL} \operatorname{th} kL + \frac{S}{g}}{\lambda - \frac{S}{g}}$$

wobei

L -----die wirksame Bandlänge,

g -----Bandlänge zwischen dem Schnittpunkte der Bänder und einem Ende der Schwinge,

λ ----- $\frac{g}{L}$, das Teilungsverhältnis,

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

E -----Elastizitätsmodul des Bandmaterials,

J -----Trägheitsmoment des Bandes,

$$P = \frac{G}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$$

G -----Pendelgewicht,

φ -----Kreuzungswinkel der Bänder,

$$S = g \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 + h \cos \frac{\varphi}{2},$$

h -----Abstand zwischen dem Schwerpunkte und der Mitte der Schwinge. Liegt der Schwerpunkt über der Mitte der Schwinge, so ist der Abstand h mit einem positiven Vorzeichen zu versehen; dagegen, mit einem negativen Vorzeichen.

Im letzten Teil der Arbeit gibt der Verfasser eine Reihe der Meßergebnisse der Vergrößerungsfaktoren eines Kreuzbandgelenks. Die Meßergebnisse demonstrieren, daß die abgeleitete Formel richtig ist, und zur Konstruktion des Kompensators der automatischen Nivellierinstrumente benützt werden kann.