DOI:10.13203/j.whugis1981.01.001

近代平差理论的扩充

陶本藻

〔提要〕本文在推证了用广义逆表达的随机参数最优线性无偏估计公式基础上，导出了滤波、推估和配置等广义估计公式，其特点是观测值的协方差阵不要求满秩。最后，作者提出了参数为随机的自由网平差新方法。

在现有的国内外文献中，估计随机参数，有用广义最小二乘估计［1］，［2］，［3］，［4］，最小方差估计［3］，［5］，［6］，极大验后估计［3］等方法，得出的结果相同，都是最优线性无偏估计。但这些公式都要求观测值协方差阵非奇异。为使估计公式不受上述限制，本文导出了滤波、推估、配置等广义估计公式，现有的公式可作为广义估计公式的特殊情形。考虑到自由网平差中可能遇到随机参数，作者提出了具有随机参数的自由网平差新方法，并证明它是滤波估计的广义形式。一段中估计公式是[9]提出的，二段中具体推导方法类同[3]。

一、 最优线性无偏估计

设观测值为 $\underset{n1}{l}$，待估参数为 $\underset{t1}{x}$，它们都是随机向量，存在协方差阵：

$$D_{xx}=E(X-EX)(X-EX)^T \tag{1,1}$$

$$D_{ll}=E(l-El)(l-El)^T \tag{1,2}$$

$$D_{xl}=E(X-EX)(l-El)^T \tag{1,3}$$

近代测量平差中求随机参数的实质是用 l 对 x 作最优线性无偏估计。设线性估计为

$$X=\alpha_0+\alpha l \tag{1,4}$$

要求估计是无偏的，则有

$$EX=\alpha_0+\alpha El$$

即

$$\alpha_0=EX-\alpha El \tag{1,5}$$

代入（1,4）式得

$$X=EX+\alpha(l-El) \tag{1,6}$$

要求估计是最小方差的，则式中的 α 的确定，必须使估计误差协方差阵

$$\Phi=E[X-EX-\alpha(l-El)][X-EX-\alpha(l-El)]^T \tag{1,7}$$

为最小。因为

$$E[(I-D_{ll}^{+}D_{ll})(l-El)][(I-D_{ll}^{+}D_{ll})(l-El)]^T$$

$$=E[(l-El)-D_{ll}^{+}D_{ll}(l-El)][(l-El)^T-(l-El)^TD_{ll}D_{ll}^{+}]$$

$$=D_{11}-D_{11}D_{11}D_{11}^{+}-D_{11}^{+}D_{11}D_{11}+D_{11}^{+}D_{11}D_{11}D_{11}D_{11}^{+}=0$$

其中乘积是非负定阵，必有

$$(l-El)^{T}(I-D_{11}^{+}D_{11})^{T}=0$$

$$(l-El)^{T}=(l-El)^{T}(D_{11}^{+}D_{11})^{T} \tag{1,8}$$

或

$$(l-El)^{T}=(l-El)^{T}D_{11}^{+}D_{11} \tag{1,9}$$

左乘（X－EX）并取数学期望，可得

$$E(X-EX)(l-El)^{T}=E(X-EX)(l-El)^{T}D_{11}^{+}D_{11}$$

即

$$D_{Xl}=D_{Xl}D_{11}^{+}D_{11} \tag{1,10}$$

由（1,7）式得

$$\Phi=E[(X-EX)-\alpha(l-E(l))][(X-EX)^{T}-(l-El)^{T}\alpha^{T}]$$

$$=D_{XX}-D_{Xl}\alpha^{T}-\alpha D_{lX}+\alpha D_{11}\alpha^{T}$$

顾及（1,10）式,则有

$$\Phi=\alpha D_{11}\alpha^{T}-\alpha D_{11}D_{11}^{+}D_{11}^{T}-D_{Xl}D_{11}^{+}D_{11}\alpha^{T}+D_{Xl}D_{11}^{+}D_{11}D_{11}^{+}D_{Xl}^{T}$$

$$+D_{XX}-D_{Xl}D_{11}^{+}D_{lX} \tag{1,11}$$

或

$$\Phi=(\alpha-D_{Xl}D_{11}^{+})D_{11}(\alpha-D_{Xl}D_{11}^{+})^{T}+D_{XX}-D_{Xl}D_{11}^{T}D_{lX} \tag{1,12}$$

因为（1,12）式中第一项是非负定阵，所以只有当

$$\alpha=D_{Xl}D_{11}^{+} \tag{1,13}$$

时，Φ 才为最小。将（1,13）式代入（1,6）式，即得X最优线性无偏估计为

$$\hat{X}=E(X)+D_{Xl}D_{11}^{+}(l-El) \tag{1,14}$$

将（1,13）式代入（1,12）式，并用$D_{\hat{X}}$代Φ，得

$$D_{\hat{X}}=D_{XX}-D_{Xl}D_{11}^{+}D_{lX} \tag{1,15}$$

当D_{11}非奇异，则（1,14）和（1,15）式为

$$\hat{X}=E(X)+D_{Xl}D_{11}^{-1}(l-El) \tag{1,16}$$

$$D_{\hat{X}}=D_{XX}-D_{Xl}D_{11}^{-1}D_{lX} \tag{1,17}$$

这就是参考文献中随机参数的估计公式。

因此，用伪逆表示的最优线性无偏估计（1,14）及其误差协方差阵（1,15）是一种广义的估计公式，它不要求观测值协方差阵是非奇异的。

二、滤波、推估和配置

滤　　波

数学模型 $l=Ax+\Delta$ (2,1)

统计特性

$$D_{\Delta\Delta}=E(\Delta\Delta^T),\quad E(\Delta)=0$$
$$D_{XX}=E(X-EX)(X-EX)^T$$
$$D_{X\Delta}=0$$
$$D_{ll}=AD_{XX}A^T+D_{\Delta\Delta}$$
$$D_{Xl}=D_{XX}A^T$$

按（1,14）和（1,15）式由 l 估计 X，可得滤波公式：

$$\hat{X}=E(X)+D_{XX}A^T(AD_{XX}A^T+D_{\Delta\Delta})^+(l-El) \tag{2,2}$$
$$D_{\hat{X}}=D_{XX}-D_{XX}A^T(AD_{XX}A^T+D_{\Delta\Delta})^+AD_{XX} \tag{2,3}$$

推　　估

分两种情形讨论

（1）、假定无误差，用 AX 推估 X′。

按（1,14）和（1,15）式可得推估公式

$$\hat{X}'=E(X')+D_{X'X}A^T(AD_{XX}A^T)^+A(X-EX) \tag{2, 4}$$
$$D_{\hat{X}'}=D_{X'X'}-D_{X'X}A^T(AD_{XX}A^T)^+AD_{XX'} \tag{2,5}$$

特别地，当A＝I，则有

$$\hat{X}'=E(X')+D_{X'X}(D_{XX}^+)(X-EX) \tag{2,6}$$
$$D_{\hat{X}'}=D_{X'X'}-D_{X'X}D_{XX}^+D_{XX'} \tag{2,7}$$

（2）、假定有误差，用 l 推估 x′。数学模型

$$l=AX+OX'+\Delta \tag{2,8}$$

推估公式为

$$\hat{X}'=E(x')+D_{X'X}A^T(AD_{XX}A^T+D_{\Delta\Delta})^+(l-El) \tag{2,9}$$
$$D_{\hat{X}'}=D_{X'X'}-D_{X'X}A^T(AD_{XX}A^T+D_{\Delta\Delta})^+AD_{XX'} \tag{2,10}$$

配　　置

数学模型

$$l=AX+BY+\Delta \tag{2,11}$$

式中 Y 为非随机参数。上式写成

$$V=BY-l \tag{2,12}$$

式中 $V=-AX-\Delta$，则 Y 的估值为

$$\hat{Y}=(B^TD_{ll}^+B)^+B^TD_{ll}^+l \tag{2,13}$$

设 Y 为可估参数，则 $B^TD_{ll}^+B$ 非奇异，上式为

$$\hat{Y}=(B^TD_{ll}^+B)^{-1}B^TD_{ll}^+l \tag{2,14}$$

它是无偏估计。

$$D_{\hat{Y}}=(B^TD_{ll}^+B)^{-1} \tag{2,15}$$

由（2,11）式：

$$l - By = AX + \Delta \tag{2,16}$$

按（1,14）式得

$$\hat{X} = E(X) + D_{XX}A^T(AD_{XX}A^T + D_{\Delta\Delta})^+(l - B\hat{y} - AEX) \tag{2,17}$$

求 $\hat{x}$ 的方差，得

$$D(\hat{X}) = D_{Xl}D_{ll}^+D_{lX} - D_{Xl}D_{ll}^+B(B^TD_{ll}^+B)^{-1}B^TD_{ll}^+D_{lX} \tag{2,18}$$

此即 $\hat{x}$ 与 X 的协方差，故有

$$D(\hat{X}) = D(\hat{X}, X) \tag{2,19}$$

求 $\hat{X}$ 的误差方差，得

$$D_{\hat{X}} = D(\hat{X} - X) = D_{XX} - D_{Xl}D_{ll}^+D_{lX} + D_{Xl}D_{ll}^+B(B^TD_{ll}^+B)^{-1}B^TD_{ll}^+D_{lX} \tag{2,20}$$

当 D_{ll} 非奇异，以上公式即为参考文献中滤波、推估、配置公式。

三　具有随机参数的自由网平差

随机参数 X 和观测值 l 的期望为 EX 和 El，协方差 D_{XX} 和 $D_{\Delta\Delta}$，且 $D_{X\Delta} = 0$，令

$$\Delta X = X - EX \quad , \quad E(\Delta X) = 0 \tag{3,1}$$

误差方程

$$V = B\Delta X - L \tag{3,2}$$

式中

$$B = \begin{pmatrix} \underset{mt}{A} \\ \underset{tt}{I} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \underset{m1}{l} - El \\ \underset{t1}{O} \end{pmatrix} \tag{3,3}$$

A 和 B 的列秩 R（A）＝R（B）＝$r < t$，L 的权阵

$$P_{LL} = \begin{pmatrix} D_{\Delta\Delta}^+ & \\ & D_{XX}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\Delta\Delta} & \\ & P_{XX} \end{pmatrix} \tag{3,4}$$

（3,2）式的最小二乘解

$$B^TP_{LL}B\Delta X = B^TP_{LL}L \tag{3,5}$$

令

$$B^TP_{LL}B = A^TP_{\Delta\Delta}A + P_{xx} = N \tag{3,6}$$

则有

$$N\Delta X = A^TP_{\Delta\Delta}(l - El) \tag{3,7}$$

N奇异，最小范数 $\|\Delta X\|$ 解为

$$\Delta X = N(NN)^-A^TP_{\Delta\Delta}(l - El) \tag{3,8}$$

协因数阵为

$$Q_{XX} = N(NN)^-N(NN)^-N \tag{3,9}$$

当 A 为列满秩，N 非奇异，（3,8）式为

$$\Delta X = (A^TP_{\Delta\Delta}A + P_{XX})^{-1}A^TP_{\Delta\Delta}(l - El) \tag{3,10}$$

运用矩阵反演公式，顾及单位权方差 $\sigma_0^2=1$，则有

$$\Delta X = D_{XX}A^T\left(AD_{XX}A^T + D_{\Delta\Delta}\right)^{-1}\left(1 - El\right) \tag{3,11}$$

由（3,9）式得

$$O_{XX} = N = \left(A^T P_{\Delta\Delta} A + P_{XX}\right)^{-1} \tag{3,12}$$

运用矩阵反演公式，顾及 $\sigma_0^2=1$，可得

$$D_{\hat{X}} = D_{XX} - D_{XX}A^T\left(AD_{XX}A^T + D_{\Delta\Delta}\right)^{-1}AD_{xx} \tag{3,13}$$

（3,11）和（3,13）式即为滤波公式。

可见求随机参数的滤波公式是本方法的特殊情形。

参考文献

[1] 周江文：论拟合推估〈误差理论〉测绘出版社 1979

[2] 周江文：拟合推估的二种解法　测绘学报 1981（1）

[3] 崔希璋、于宗俦、陶本藻、刘大杰：广义测量平差　武汉测绘学院 1979

[4] H.Moritz: Least Sguares Collocation, 1973

[5] A.Bjerhammar: Theory of Errors and generalized Matrix Inverses, 1973

[6] K.R.Koch: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, 1980

[7] E.Mittermayer: Eine Verallgemeinerung der Methode der Klemsten Quadrate Zur Ausgleichung freier Netze. Z.f.V 1971 (11)

[8] 王之卓：配置法及其在航测中的应用　武汉测绘学院 1980

[9] 中国科学院控制理论研究室：离散时间系统的递推估计与随机控制 科学出版社 1980

An Extended Approach for the Contemporary Theory of Error Adjustment

Tao Benzao

Abstract

On the basis of deducting the best linear unbiased estimation of stochastic parameters by applying the generalized matrix inverses, the generalized estimate formulas of filtering prediction and collocation etc. are obtained, the advantage being that the covariance matrix of the observations need not necessarily be full rank. Finally, a new method concerning the adjustment of free networks with stochastic parameters is given.