

# 切向判别法—数控绘图的一种方法

何宗宜

## 摘 要

本文系统地介绍了切向判别法的原理, 计算过程及程序设计。该方法根据曲线, 能划分正负区的特性和曲线的切线斜率来控制绘图笔笔头动作, 成功地利用八向量绘制一般平面曲线  $f(x, y) = 0$ , 从而提高计算机绘图的精度和速度。

## 一、前言

计算机绘图中, 关于用绘图机基本动作直接逼近已知曲线的方法, 近年来, 我国先后提出的有“正负法”<sup>(1)</sup>以及在“正负法”绘图基础上进一步发展的“TN法”<sup>(2)</sup>和“跟踪法”<sup>(3)</sup>等。极大地扩充了能够直接逼近曲线的范围, 研究了由隐函数定义的平面曲线的绘制问题。

目前, “正负法”绘图动作一般局限于四向量。若扩展为八向量绘图, 显然能进一步提高逼近精度和绘图速度。近来虽有提出八向量绘图, 但没有提出绘其他曲线的一般方法。为此本文初步探讨了“正负法”八向量动作绘一般曲线的方法——切向判别法。

## 二、切向判别法绘图原理

### 一、基本思想

设  $L$  是由  $f(x, y) = 0$  所定义的平面曲线。由切向判别法来具体构造出  $L$  的一条近似折线  $\bar{L} = m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$  的过程, 如图 1 所示。根据平面曲线将平面分成正负区域的特

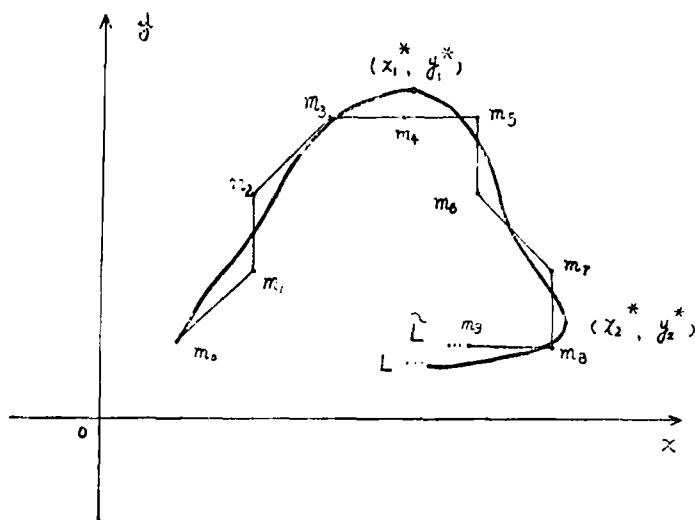


图 1 正负法八向量动作绘制  $f(x, y) = 0$  曲线

性和曲线各点的导数值 $y'$ 来判断选用八个基本方向之一去逼近曲线 $L$ 。这八个基本方向是 $(-x, -y)$ 、 $(-x, +y)$ 、 $(+x, +y)$ 、 $(+x, -y)$ 、 $(-x, 0)$ 、 $(0, -y)$ 、 $(+x, 0)$ 、 $(0, +y)$ 。如图2所示。

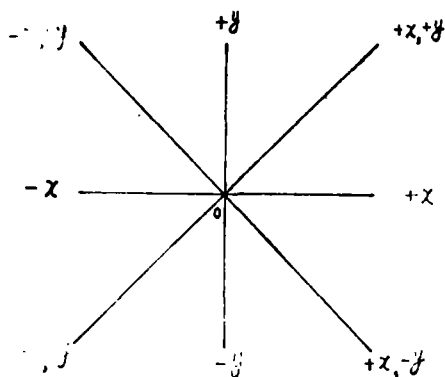


图2 八个基本方向

首先从 $m_0$ 出发, 起点 $m_0$ 在曲线上即 $f(x_0, y_0) = 0$ , 沿 $(\pm x, \pm y)$ 方向走一步

$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  ( $|\Delta x| = |\Delta y|$  = 绘图步距, 以下同) $x$ 和 $y$ 前面正负号应适当选取。如图1, 应选取 $(+x, +y)$ 方向。因为 $m_1$ 点离开曲线,

它不进入正区就进入负区。现在假定属于负区, 即 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < 0$ ; 一旦进入负区, 我们应该选择适当方向向正区前进。由

数学分析知, 若某点附近的曲线上能使 $|y'| > 1$ 成立, 那么它处在以 $x$ 为横轴、 $y$ 为纵轴的 $xoy$ 坐标系中, 以 $f(x, y) = 0$ 所定义的曲线 $L$ “较陡”的位置附近。此时应该选择沿 $\pm y$ 方向前进。 $y$ 前面的正负号适当选取。如图1所示。应选 $+y$ 方向走一步 $\Delta y$ ; 反之如 $|y'| < 1$ 成立, 此时应该选取 $(\pm x, \pm y)$ 方向向正区前进。因为此时它处在曲线“较缓”

的位置附近。 $x$ 、 $y$ 前面的正负号适当选取。若该点能使 $|y'| = 1$ 成立, 显然该走 $(\pm x, \pm y)$ 方向。按这样方向向前进, 直至到达正区为止。进入正区后, 就应该选择适当方向向负区前进。如果 $|y'| > 1$ , 该点处于 $L$ 曲线“较陡”附近, 应该沿 $(\pm x, \pm y)$ 方向向负区

前进。如图1中的 $m_2$ 点, 应选择 $(+x, +y)$ 方向, 走一步 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 。如果 $|y'| < 1$ , 该点处于曲线“较缓”位置附近, 应该选择沿 $\pm x$ 方向向负区前进。如图1中的 $m_3$ 点, 沿 $+x$ 方向走一步 $\Delta x$ 。若 $|y'| = 1$ , 显然应该走 $(\pm x, \pm y)$ 方向。按这样的方法向负区前进, 直至进入负区。一旦进入负区, 则又向正区移动……依此类推。在图1中,  $m_4$ 以前我们所选取的方向都是正的 $x$ 及正的 $y$ 方向,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 都为正。当跨过曲线的极值点 $(x_1^*, y_1^*)$ 即切线斜率为零的点后,  $\Delta y$ 就得改变方向, 取负的 $\Delta y$ 。而跨过斜率为无穷大的点后, 即跨过图1所示点 $(x_2^*, y_2^*)$ 以后,  $x$ 也改变了方向, 变成负的 $\Delta x$ 。这样一直走下去, 直至曲线终点 $m_n$ 。我们就得到以 $m_0$ 、 $m_1$ 、 $m_2$ …… $m_n$ 为角点的折线 $\bar{L}$ 。用这样方法构成的折线, 折线逼近精度提高了, 且大大减少走步次数, 因而提高了效率。由于该方法在逼近曲线 $L$ 的数控判别过程中除了根据曲线正负区特性外, 还要根据曲线的切线斜率, 所以我们把它称为切向判别法。

## 二、基本问题

我们将假设曲线 $L$ 是一阶光滑, 没有奇点, 并且能变量分离的多项式曲线。对于有奇点的可视为多段拼接曲线的连接而作分段处理。

用本方法绘图需要解决以下几个问题:

### 1、判别函数的选择及简化计算

我们在表示同一条曲线的许多解析表达式中, 选取能划分正负区域、计算起来容易的表达式作为判别函数。

对于变量分离的代数曲线 $f_1(x) + f_2(y) = 0$ 采用判别函数 $F(x, y) = \sigma(|f_2(y)|)$

$-|f_1(x)|$ 。其中 $\sigma$ 起始为1,而每当绘图笔跨越曲线 $F(x, y) = 0$ 的结点或极值点时 $\sigma$ 变号。

由差分原理知:

$$F(x + \Delta x, y) = F(x, y) + \Delta F(x, y, \Delta x)$$

$$\Delta f_1(x, \Delta x) = \Delta f_1(x - \Delta x, \Delta x) + \Delta^2 f_1(x - \Delta x, \Delta x)$$

$$\Delta^2 f_1(x - \Delta x, \Delta x) = \Delta^2 f_1(x - 2\Delta x, \Delta x) + \Delta^3 f_1(x - 2\Delta x, \Delta x)$$

.....

$$F(x, y + \Delta y) = F(x, y) + \Delta F(x, y, \Delta y)$$

$$\Delta f_2(y, \Delta y) = \Delta f_2(y - \Delta y, \Delta y) + \Delta^2 f_2(y - \Delta y, \Delta y)$$

$$\Delta^2 f_2(y - \Delta y, \Delta y) = \Delta^2 f_2(y - 2\Delta y, \Delta y) + \Delta^3 f_2(y - 2\Delta y, \Delta y)$$

且可以证明:

$$\Delta F(x, y, \Delta x) = -|\Delta f_1(x, \Delta x)|$$

$$\Delta F(x, y, \Delta y) = |\Delta f_2(y, \Delta y)|$$

## 2、初始 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 方向决定

初始 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 的方向是随着具体曲线的不同而不同的。一般地说,一旦具体曲线及起点和终点确定后,初始的 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 的方向就能确定下来。因此,这个问题将留给以后讨论实例时再进行说明。

## 3、 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ 的变号判别

设变量分离曲线为 $f_1(x) + f_2(y) = 0$ ,若 $\Delta f_1(x_i, \Delta x) \cdot \Delta f_1(x_{i-1}, \Delta x) \leq 0$ ;时改变 $\Delta y$ 的符号, $\sigma$ 变号。

若 $\Delta f_2(y_i, \Delta y) \cdot \Delta f_2(y_{i-1}, \Delta y) \leq 0$ ,改变 $\Delta x$ 的符号, $\sigma$ 变号。

$\Delta f_1(x_i, \Delta x)$ ,  $\Delta f_2(y_i, \Delta y)$ 都可能为零,这样要连续两次变号,导致错误。因此必须修改变号规则:

若 $\Delta f_1(x_i, \Delta x) \cdot \Delta f_1(x_{i-1}, \Delta x) \leq 0 \wedge \Delta f_1(x_i, \Delta x) \neq 0$ ,则 $\Delta y$ 变号, $\sigma$ 变号。

若 $\Delta f_2(y_i, \Delta y) \cdot \Delta f_2(y_{i-1}, \Delta y) \leq 0 \wedge \Delta f_2(y_i, \Delta y) \neq 0$ ,则 $\Delta x$ 变号, $\sigma$ 变号。

## 4、终点判断

收尾工作是消除积累误差的有效办法。一般采用强制性办法。强行笔头移至终点 $(x_i, y_i)$ 。当曲线表达式为单值函数时,如果 $|WW_x - x_i| < 1$ ,就终止正负法过程。这里, $WW_x$ 是绘图笔当前位置的 $x$ 值, $x_i$ 是终点的 $x$ 值,均以步长为单位。 $y$ 方向余下的步数将采取强制性的办法来完成。如余下有十步、二十步或更多步数,笔头都可一次动作完成,到达终点。从以下分析可以得出:收尾工作对绘单值函数可以提高绘图效率。

当曲线表达式是多值函数时,则只有当 $|WW_x - x_i| < 1 \wedge |WW_y - y_i| < 1$ 时,才能终止正负法过程。这里 $WW_y$ 是绘图笔当前位置的 $y$ 值, $y_i$ 是终点的 $y$ 值。 $WW_x$ 、 $x_i$ 意义同上。

## 5、输出规则

我们约定:第一步走 $(\Delta x, \Delta y)$ ,那么:

(1) 如果 $|y'| < 1$ :

$F(x, y) < 0$  时输出  $(\Delta x, \Delta y)$ ;  $F(x, y) > 0$  时输出  $\Delta x$ 。

(2) 如果  $|y'| > 1$ :

$F(x, y) < 0$  时输出  $\Delta y$ ;  $F(x, y) > 0$  时输出  $(\Delta x, \Delta y)$ 。

(3) 若  $|y'| = 1$  或  $F(x, y) = 0$ , 则输出  $(\Delta x, \Delta y)$ 。

令  $G = |y'| - 1$ , 那么以上三种情况可归纳为:

如果  $G \cdot F(x, y) \geq 0$ , 输出  $(\Delta x, \Delta y)$ 。否则, 如果  $G < 0$  输出  $\Delta x$ ,  $G > 0$  输出  $\Delta y$ 。

此外,  $|y'|$  的值可以用差分近似值代替。表达式为:

$$|y'| \approx \left| \frac{\frac{\Delta f_1(x, \Delta x)}{\Delta x}}{\frac{\Delta f_2(y, \Delta y)}{\Delta y}} \right| = \left| \frac{\Delta f_1(x, \Delta x)}{\Delta f_2(y, \Delta y)} \right|$$

### 三、几种常用曲线绘制的实例

#### 一、三次多项式曲线

在地图制图中, 图形数字化或测量计算往往是一系列离散点的坐标数据。单值函数情况下, 相邻二离散点  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  之间根据端点条件可建立形如:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

三次插值多项式<sup>(5)</sup>, 我们讨论这种曲线的绘制。

##### 1、计算过程

首先平移坐标原点至曲线起点  $(x_i, y_i)$ , 平移后三次多项式变为

$$y = p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$$

假设坐标已化成以绘图仪步距为单位, 那末

$$f_1(x) = p_1x + p_2x^2 + p_3x^3; f_2(y) = y$$

判别函数:  $F(x, y) = \sigma(|f_2(y)| - |f_1(x)|)$

用 Taylor 级数展开, 并考虑到  $|\Delta x| = 1$ ,  $|\Delta y| = 1$

$$\Delta f_2(y, \Delta y) = \Delta y; \text{ 令 } \Delta y = Y\Delta y, \text{ 则 } Y = 1;$$

$$\Delta f_1(x, \Delta x) = [3p_3x^2 + (2p_2 + 3p_3\Delta x)x + p_1 + p_2\Delta x]\Delta x = X\Delta x$$

$$\Delta^2 f_1(x, \Delta x) = (6p_3x\Delta x + 6p_2 + 2p_3\Delta x)\Delta x = R_x\Delta x$$

$$\Delta^3 f_1(x, \Delta x) = 6p_3\Delta x = R'_x\Delta x$$

即可以简化判别函数的计算, 此外

$$|y'| \approx \left| \frac{\Delta f_1(x, \Delta x)}{\Delta f_2(y, \Delta y)} \right| = |X|$$

##### 2、程序框图 (见图 3)

###### ① 绘图初始状态

笔头处于起点  $(0, 0)$  位置时, 给下列单元赋值:

$$0 \Rightarrow F \Rightarrow WW_x \Rightarrow XX_y;$$

$$p_1 + p_3 + p_2 \text{SIGN}(x_i) \Rightarrow X;$$

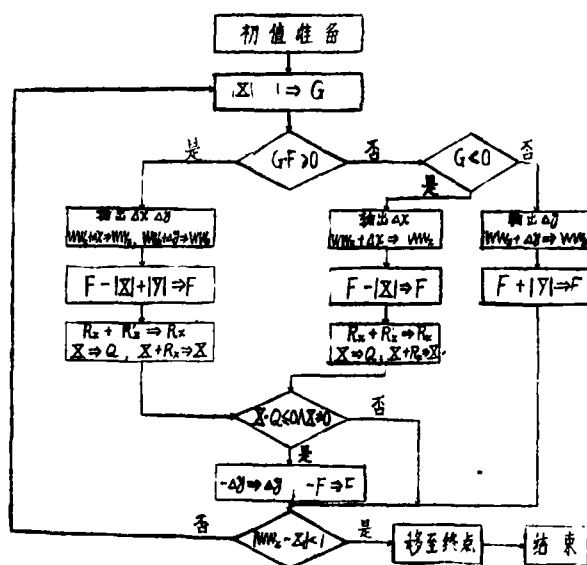


图3 绘三次多项式曲线框图

$$\text{SIGN}(x_i) \Rightarrow \Delta x_i;$$

$$\Delta x \cdot \text{SIGN}(X) \Rightarrow \Delta y;$$

$$2p_2 \cdot \text{SIGN}(x_i) \Rightarrow R_x;$$

$$6p_3 \Rightarrow R_x';$$

其中:  $x_i = x_{i+1} - x_i$

## (2) 绘图过程

参看框图。曲线从 (0, 0) 出发后

a、计算G,  $G = |X| - 1$ 。

b、若  $G \cdot F \geq 0$ , 则输出  $(\Delta x, \Delta y)$ , 计数器  $WW_x, WW_y$  加上相应的  $\Delta x, \Delta y$ , 并计算新值:

$F - |X| + 1 \Rightarrow F$  同时修改  $R_x, X$ ;

$R_x + R_x' \Rightarrow R_x, X + R_x \Rightarrow X$ 。

如果修改前后的X异号且修改后的X值不等于0, 则  $\Delta y$  变号, 从而F亦变号。

c、若  $G \cdot F < 0$

$G > 0$  时, 输出  $\Delta y$ ,  $WW_y$  加上相应的  $\Delta y$ , 并计算新值  $F + 1 \Rightarrow F$ ;

$G < 0$  时, 输出  $\Delta x$ ,  $WW_x$  加上相应的  $\Delta x$ , 并计算新值  $F - |X| \Rightarrow F$ , 同时修改  $R_x, X$ ,  $R_x + R_x' \Rightarrow R_x, X + R_x \Rightarrow X$ 。

如果修改前后的X异号且修改后的X值不为0, 则  $\Delta y$  变号, 从而F亦变号。

d、 $|WW_x - X_1| < 1$  成立做收尾工作, 否则回到 a。

## 二、圆

地图制图中特别是专题地图制作中, 圆是用途极广的符号之一。在制图中一般都给出圆心坐标和半径。基于这样一个实际情况, 我们讨论了已知圆心坐标  $(x_0, y_0)$ 、圆的半径 R

来绘图。

### 1、计算过程

先建立圆的方程:  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

平移坐标, 原点移至起点。这次试验程序以  $(x_0 - R, y_0)$  为起点, 顺时针绘, 平移后方程变为:  $x^2 - 2Rx + y^2 = 0$

假设坐标都已化为绘图信步距为单位, 那末

$$f_2(y) = y^2; f_1(x) = x^2 - 2Rx$$

按 Taylor 级数展开, 并考虑到  $|\Delta x| = |\Delta y| = 1$ , 则有:

$$\Delta f_1(x, \Delta x) = 2X\Delta x - 2R\Delta x + 1 = X;$$

$$\Delta^2 f_1(x, \Delta x) = 2\Delta x \Delta x = 2 = R_x;$$

$$\Delta f_2(y, \Delta y) = 2Y\Delta y + 1 = Y;$$

$$\Delta^2 f_2(y, \Delta y) = 2\Delta y \Delta y = 2 = R_y$$

这样即可简化判别函数的计算, 此外

$$|y'| \approx \left| \frac{X}{Y} \right|, \quad \text{则有 } G = \left| \frac{X}{Y} \right| - 1。$$

若  $Y \rightarrow 0$  时, 则  $G \rightarrow \infty$ 。因此在程序设计中应该考虑到这种情况, 否则计算机可能会溢出G。

### 2、程序框图

#### ①绘图前初始状态

$\Delta x$ 、 $\Delta y$  的初始符号由下式决定:

对于形如  $ay + bx + Ax^2 + By^2 = 0$  的曲线

$$\Delta x = \begin{cases} -T \cdot \text{SIGN}(aB) & a \neq 0 \\ -\text{SIGN}(bA) & a = 0 \end{cases}$$

$$\Delta y = \begin{cases} T \cdot \text{SIGN}(bA) & b \neq 0 \\ -\text{SIGN}(aB) & b = 0 \end{cases}$$

按本例  $a = 0, A = B = 1, b = -2R < 0, T = -1$  (顺时针)。故  $1 \Rightarrow \Delta x \Rightarrow \Delta y, 0 \Rightarrow F, 1 - 2R \Rightarrow X, 2 \Rightarrow R_x \Rightarrow R_y, 1 \Rightarrow Y$ 。

#### ②绘图过程。参看图4, 曲线从 $(0, 0)$ 出发

a、如果  $|Y| < \varepsilon, 1 \Rightarrow G$ ; 否则  $\left| \frac{X}{Y} \right| - 1 \Rightarrow G$ 。 $\varepsilon$  为预先赋给的一个微小的正数值。

b、若  $G \cdot F \geq 0$ ; 输出  $(\Delta x, \Delta y)$ , 计数器  $WW_x$  和  $WW_y$  加上相应的  $\Delta x$  和  $\Delta y$  并计算新值。

$F - |X| + |Y| \Rightarrow F$ ; 同时修改  $X$  和  $Y$ ;

$X + R_x \Rightarrow X, Y + R_y \Rightarrow Y$

如果修改前后的  $X$  异号且修改后的  $X$  值不为 0, 则  $\Delta y$  变号, 从而引起了  $F$  的变号, 并要重新修正  $Y$ 。

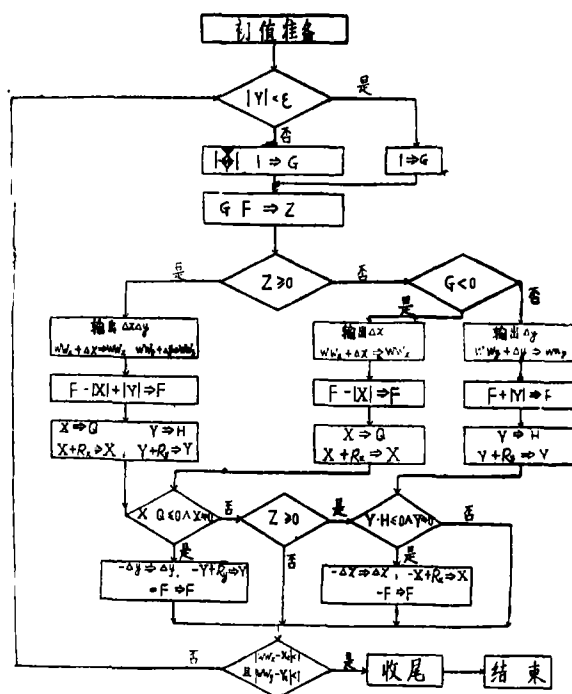


图4 画圆的框图

$$-Y + R_y \Rightarrow Y$$

如果X同号，则看修改前后的Y是否异号，是异号且修改后的Y值不为0，则  $\Delta x$  变号，从而引起了F变号，并重新修正X：

$$-X + R_x \Rightarrow X。$$

c、若  $G \cdot F < 0$

当  $G > 0$  时则输出  $\Delta y$ ，计算器  $WW_y$  加上相应的  $\Delta y$  并计算新值

$$F + |Y| \Rightarrow F，同时修改Y；Y + R_y \Rightarrow Y$$

如果修改前后的Y异号且修改后的Y不为0则  $\Delta x$  变号，从而引起F变号，并重新修改X；

当  $G < 0$ ，则输出  $\Delta x$ ，计算器  $WW_x$  加上相应的  $\Delta x$  并计算新值  $F - |X| \Rightarrow F$ ；同时修改X

$$X + R_x \Rightarrow X$$

若修改前后的X异号且修改后的X值不为0，则  $\Delta y$  变号，从而引起F变号，并重新修订Y；

$$-Y + R_y \Rightarrow Y$$

d、 $|WW_x - X| < 1$  和  $|WW_y - Y| < 1$  同时成立则做收尾工作，否则返回a。

## 四、结束语

以上系统地介绍了切向判别法的原理，计算过程和程序设计。该方法进一步运用正负法原理成功地利用八向量绘制一般平面线  $f(x, y) = 0$ 。通过绘图实验，表明该方法是可行

的。目前正负法数控绘图动作一般局限于四向量。切向判别法则将其发展为八向量绘图,输出规则不仅取决于正负区域,还取决于曲线切线斜率。用八向量走步动作逼近曲线显然能使平均误差减小。另一方面,绘图笔头具有 $(\pm x, \pm y)$ 方向的动作在绘整个曲线过程中减少笔头移动的总步数,从而提高了绘图速度。在[4]中,曾叙述八向量绘图。但提出的方法有局限性,只给出了绘图方法但没给出绘一般曲线的方法。其次,所给出方法的输出规则比较复杂,它有八种不同的输出规则。切向判别法则统一为三种输出规则。此外在[4]中所给出的方法没有利用差分来简化计算判别函数值,而切向判别法是运用了差分计算。由于切向判别法的输出规则和计算过程简练,因而具有程序设计容易、绘图速度快和精度高等优点。

本文写作承徐庆荣老师指导,在实验中曾得到郭仁忠、孟明等同志的帮助。在此一并致谢。

### 参 考 文 献

- [1] 杨学平:计算机绘图 电力工业出版社 1980。
- [2] 金通洸、沈炎:图形显示和数控绘图的TN法(I)——曲线的直线逼近 浙江大学学报 No.1, 1979。
- [3] 李兆华:隐函数的一种数值解法——跟踪法 六机部鉴定会交流材料 1977。
- [4] 刘岳、梁启章:专题地图制图自动化 测绘出版社 1981。
- [5] 武汉测绘学院地图制图自动化研究室:计算机地图制图讲义 武汉测绘学院教材出版科 1981。

## The Method of Discrimination of Tangential

### Direction — A Method in Computer Assisted Cartography

He Zongyi

#### Abstract

In this paper the principle, calculation procedure and computer programming of Method of Discrimination of Tangential Direction are described. This method controls the movement of the plotter head based on the characteristic that the curve can divide the plane into positive and negative areas. The plotter head thus goes forwards according to tangent slope of the curve. This method plots successfully a general plane curve  $f(x, y) = 0$  using eight vectors and thus accuracy and velocity of the computer assisted map drawing could be increased.