曲线插值中步长的确定

徐 庆 荣

【提要】 本文评述了曲线插值中现有的二种步长确定法：距离法和增量法。提出了新的插值步长公式（见本文公式(16)）。该式能在满足曲线光滑度条件下给出尽可能大的步长，因而能提高绘图速度。

计算机制图中，对于绘制过平面上已知有序点列的光滑曲线，通常是在相邻点（以下称这些点为节点）间分段建立插值函数，并按此输出曲线图形，即所谓曲线插值。图形输出时，计算一系列插值加密点，并依次用折线连结，当插值点很密，使弦弧间偏差甚微（小于视觉分辨力或在图解精度以内）时，折线被认为逼近于光滑曲线。插值点密度取决于计算时采用的步长(函数自变量的增量)。因而，曲线光滑度依赖于步长的选取。人们总希望在保证一定光滑度要求下采用尽可能大的步长，达到既光滑又经济，这就是本文研究的出发点。鉴于地图曲线一般系任意曲线，且往往是采用参数方程表达的多值函数（下简称参数曲线），故本文仅就参数曲线插值计算的步长问题作初步探讨。

现 有 的 方 法

关于参数曲线插值步长的确定，目前采用的方法大体有两种：

1 距 离 法

这种方法规定相邻插值点间的距离等于或不超过某个定值 Δs，并按此确定步长 Δt。此法计算出的插值点具有沿曲线大致均匀分布的特点。对于不同参数曲线，Δt 的确定法亦不同。

（1）以累加弦长为参数的曲线

如正轴抛物线加权平均插值和张力样条插值中，参数 t 代表累加弦长，当相邻节点间曲线摆动不大时，步长 Δt 近似等于相邻插值点间距离。因此，便可取 $\Delta t=\Delta s$ 作为步长。例如，文献〔2〕在正轴抛物线加权平均插值程序中规定：$\Delta t=\Delta s=0.5$ 毫米；在张力样条插值程序中规定：$\Delta t=\Delta s=1$ 毫米。

（2）一般参数曲线

这类参数曲线的参数不代表曲线弧长或弦长，且往往无一定几何意义。如三次多项式插值[1]在分段插值区间的参数变化范围规定为：$0\rightarrow1$；五次多项式插值[3]在分段插值区间的参数变化范围规定为：$-1\rightarrow+1$。在这种情况下，步长 Δt 可用公式或试算法获得。

文献〔3〕的五次多项式插值中，采用下式近似确定步长 Δt：

$$\Delta t\approx\frac{\Delta s}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}} \qquad (1)$$

式中，Δs 事先给定（即相邻插值点间距离），$\dot{x}(t)$ 和 $\dot{y}(t)$ 是按五次多项式参数方程分别对参数 t 求得的一阶导数值，它们随 t 值而异，因而 Δt 亦随 t 值而变。

文献〔2〕在三次多项式（五点法）插值程序中，则采用试算法确定 Δt，事先给定 $\Delta s=$

0.5毫米。其过程是：假设步长；计算下一点坐标；距离检核，当距离超过规定的 Δs 时，适当缩小步长重行计算，直至距离小于或等于 Δs 为止；然后重复上述过程计算下个插值点。

采用距离法获得的插值点，不论曲线形状如何，其间隔大致相同。因而，有可能在曲线平缓处插值点过密，或曲线急转处插值点嫌稀。此外，距离限值 Δs 的确定一般凭经验给定，往往出入很大。

2 增量法[1]

此法在计算时首先假设一步长，每算一点都要和已算出的前一点计算坐标增量 Δx 和 Δy，令

$$d=\min(|\Delta x|,\ |\Delta y|)$$

则应满足

$$0.4\leqslant d\leqslant 1.4\ \text{（单位为绘图机步距）} \tag{2}$$

若不符式（2）的条件，应缩小或放大步长后重行计算，直至满足为止。

增量法能使曲线光滑度有可靠保证，若假设曲线在相邻两插值点间具有局部单调性，则绘出的曲线其弦弧间偏差不会超过1.4个绘图机步距。但在曲线平缓处（尤其当曲线走向与 x 轴交角接近45°时）很不经济。

新方法的探讨——矢高法

为克服距离法和增量法的缺点，本文试图从弦弧矢间的几何关系来分析研究参数曲线插值计算中的步长，并找出便于计算步长的近似公式。

曲线参数方程的一般形式为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \tag{3}$$

式中 t 为参数。

这里假设方程（3）的曲线为正则曲线，因而对其作如下限制：

1、$x(t)$、$y(t)$ 在插值区间（相邻节点间）都是单值的；

2、$x(t)$、$y(t)$ 在插值区间都是解析函数，也就是它们在插值区间任一点处都能展开成泰勒级数；

3、满足不等式 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2>0$，即两个一阶导数在插值区间任一点处不同时为零。

目前地图上采用的各种插值函数正是属于以上性质的曲线函数。

按方程（3）以 Δt 为步长计算插值点 $\{x,\ y\}$，依次用折线连结时，弦弧间的偏差用垂直于弦的矢 Δ 表示（见图1）。为使折线尽可能逼近曲线，一般规定 $\Delta\leqslant h$（h为绘图机步距），所确定的步长 Δt 应使输出图形满足这个条件。在要求不高时，也可适当放宽条件，将 Δ 的限值稍加大些。

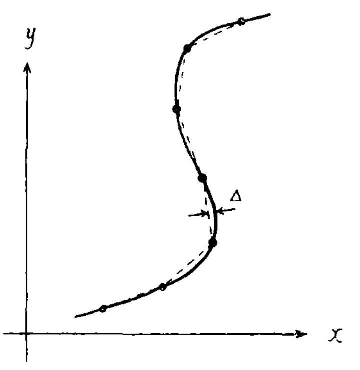

图1

为便于分析，我们分别考察步长 Δt 对曲线

$$Lx:\ x = x(t)$$

和

$$Ly:\ y = y(t)$$

的影响。

首先考察曲线 Lx 。如图 2 ，当步长为 Δt 时，弦 AB 与弧 $\overset{\frown}{AB}$ 间在P处产生x 方向的最大偏差 δ_x，与弦AB垂直方向的最大偏差为矢 δ_1 。作一辅助圆在曲线 L_x 的凹向切于 P 点，其半径OP等于 $\overset{\frown}{AB}$ 上的最小曲率半径 R_0 ，即

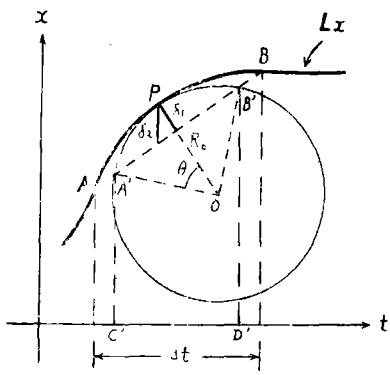

图 2

$$OP = R_0 = \frac{(1+\dot{x}_0^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot{x}_0|}$$

式中，$\dot{x}_0$ 和 $\ddot{x}_0$ 分别为 $\overset{\frown}{AB}$ 上最大曲率点处对 t 的一阶导数和二阶导数。当弦 AB 逼近弧 $\overset{\frown}{AB}$ 时，δ_1 是很小的。因而由图 2 ，存在如下关系

$$A'B' = 2\sqrt{2R_0\delta_1 - \delta_1^2} \approx 2\sqrt{2R_0\delta_1} \tag{4}$$

$$\delta_1 = \frac{\delta_x}{\sqrt{1+\dot{x}_p^2}} \tag{5}$$

$$A'B' = C'D'\sqrt{1+\dot{x}_p^2} \leqslant \Delta t\sqrt{1+\dot{x}_p^2} \tag{6}$$

式中，$\dot{x}_p$ 为曲线 L_x 在P点处的一阶导数，利用以上关系式，可有

$$\delta_x \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1+\dot{x}_p^2}{1+\dot{x}_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot |\ddot{x}_0| \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{1+tg^2\alpha_p}{1+tg^2\alpha_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot |\ddot{x}_0| \cdot \Delta t^2 \tag{7}$$

式中 α_p 为曲线 L_x 在 P 点处的切线角，α_0 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上最大曲率点处的切线角。令

$$\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_p$$

则式（7）中的

$$\frac{1+tg^2\alpha_p}{1+tg^2\alpha_0} = \frac{\sec^2\alpha_p}{\sec^2(\alpha_p+\Delta\alpha)} = [\sec\alpha_p \cdot \cos(\alpha_p+\Delta\alpha)]^2 = (\cos\Delta\alpha - tg\alpha_p \cdot \sin\Delta\alpha)^2$$

考虑到 $\Delta\alpha$ 是很小的，上式可改写为

$$\frac{1+tg^2\alpha_p}{1+tg^2\alpha_0} \approx (1 - tg\alpha_p \cdot \sin\Delta\alpha)^2 \tag{8}$$

因为 $\overset{\frown}{AB}$ 上任一点处的曲率不会大于辅助圆的曲率，由曲率定义可以证明

$$|\Delta\alpha| \leqslant \theta$$

由图 2 及式（4）、（5）知

$$\sin\theta = \frac{A'B'}{2R_0} \approx \sqrt{\frac{2\delta_1}{R_0}} = |\cos\alpha_p|^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\delta_x}{R_0}} \tag{9}$$

将式（8）改写成如下关系式

$$\frac{1+tg^2\alpha_p}{1+tg^2\alpha_0} \leqslant (1+|tg\alpha_p|\cdot\sin|\Delta\alpha|)^2 \leqslant (1+|tg\alpha_p|\cdot\sin\theta)^2$$

用式（9）代入上式，得

$$\frac{1+tg^2\alpha_p}{1+tg^2\alpha_0}\leqslant\left(1+|tg\alpha_p|\cdot|\cos\alpha_p|^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\delta_x}{R_0}}\right)^2 \tag{10}$$

由方程（3）性质知，在插值区间，$tg\alpha_p$ 的值是有限的；为满足图形易读性，式（10）中的 R_0 也不会无限小。故当 δ_x 足够小时，式（10）中的

$$|tg\alpha_p|\cdot|\cos\alpha_p|^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\delta_x}{R_0}}$$

项可忽略不计，我们假设在曲线插值计算时是符合这个情况的，因此，式（10）可改为

$$\frac{1+tg^2\alpha_p}{1+tg^2\alpha_0}\leqslant 1$$

于是式（7）可近似简化成

$$\delta_x\leqslant\frac{\Delta t^2}{8}\cdot|\ddot{x}_0| \tag{11}$$

再考察曲线 L_y：$y=y(t)$，同样可以得到

$$\delta_y\leqslant\frac{\Delta t^2}{8}\cdot|\ddot{y}_0| \tag{12}$$

L_x 和 L_y 上某点 P 产生的 δ_x 和 δ_y 综合反映在XOY绘图平面上，将使曲线点 P 产生一个位移 $\vec{\delta}$，即为

$$\vec{\delta}=\vec{\delta}_x+\vec{\delta}_y \tag{13}$$

当 $\vec{\delta}$ 与 P 点处画线方向重合时，即当

$$\frac{\delta_y}{\delta_x}=\frac{\dot{y}_p}{\dot{x}_p}$$

时，实际上没有绘图误差。但当 $\vec{\delta}$ 方向与 P 点处画线方向垂直时，即当

$$\frac{\delta_y}{\delta_x}=-\frac{\dot{x}_p}{\dot{y}_p}$$

成立时，绘图误差达到最大，刚好等于矢量 $\vec{\delta}$ 的模。用 Δ 代表绘图误差，其值便可表示为

$$\Delta\leqslant\sqrt{\delta_x^2+\delta_y^2} \tag{14}$$

用式（11）和（12）代入上式，整理后得到步长与二阶导数的关系式：

$$\Delta t\geqslant 2\sqrt{2\Delta}/(\ddot{x}_0^2+\ddot{y}_0^2)^{\frac{1}{4}} \tag{15}$$

式中，$\ddot{x}_0$ 和 $\ddot{y}_0$ 代表在与 Δt 对应的弧段上最大曲率点处的二阶导数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 和 $\frac{d^2y}{dt^2}$。但当 Δt 未知时，$\ddot{x}_0$ 和 $\ddot{y}_0$ 亦未知。通常，为了便于计算，每个插值区间〔a，b〕（a 为该区间参数 t 的初值，b 为 t 的终值）可只计算一次步长，即找一个在该区间处处满足光滑度而又尽可能大的步长作为它的统一步长。若令 $\Delta=h$（绘图机步距），那末在插值区间〔a，b〕的步长公式为：

$$\Delta t=\begin{cases}2\sqrt{2h}\Big/\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}(\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t))^{\frac{1}{4}} & \text{当}\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}(\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t))>0\text{时}\\ b-a & \text{当}\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}(\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t))=0\text{时}\end{cases}\tag{16}$$

当按式（16）计算出的Δt大于$b-a$时，应令$\Delta t=b-a$。式(16)适用于方程（3）性质的各种参数曲线。按式(16)计算的步长能保证所绘折线与插值函数曲线间的偏差不大于一个绘图机步距，即能达到逼近光滑曲线。

几 个 实 例

应用式(16)计算步长Δt，须先求出二阶导数平方和的最大值，对不同插值方法亦有不同求法。现举例说明如下。

1、三次多项式插值（五点法）[1]

相邻节点间的插值公式为

$$\begin{cases}x=p_0+p_1z+p_2z^2+p_3z^3\\ y=q_0+q_1z+q_2z^2+q_3z^3\end{cases}\tag{17}$$

式中，z为参数，它在插值区间的变化范围为$o\to 1$。系数p_i、q_i（$i=0,1,2,3$）的确定见文献〔1〕。

现分别取x和y对z二阶导数：

$$\ddot{x}=2p_2+6p_3z$$

$$\ddot{y}=2q_2+6q_3z$$

则有

$$\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=4[p_2^2+q_2^2+6(p_2p_3+q_2q_3)z+9(p_3^2+q_3^2)z^2]\tag{18}$$

令

$$F=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2$$

函数F为向上凹的二次曲线，故区间〔0，1〕上F的最大值位于该区间的起端或末端。于是有

$$\max_{o\leqslant z\leqslant 1}(\ddot{x}^2(z)+\ddot{y}^2(z))=\begin{cases}4(p_2^2+q_2^2) & \text{当}3p_3(2p_2+3p_3)+3q_3(2q_2+3q_3)\leqslant 0\text{时}\\ 4[p_2^2+q_2^2+3p_3(2p_2+3p_3)+3q_3(2q_2+3q_3)] & \text{其他情况时}\end{cases}\tag{19}$$

2、正轴抛物线加权平均插值[2]

设有曲线节点$\{x_i, y_i\}$（$i=1, 2, 3, \cdots, n$），每过顺序三点建立一抛物线，于是在节点i与i+1间（$i=2, 3, 4, \cdots, n-2$）有两支抛物线，即有经过$i-1$、i和$i+1$三点的抛物线：

$$\begin{cases}x_L=a_L+b_Ls+c_Ls^2\\ y_L=d_L+e_Ls+f_Ls^2\end{cases}\tag{20}$$

以及经过i、i+1和i+2三点的抛物线：

$$\begin{cases}x_R=a_R+b_Rs+c_Rs^2\\ y_R=d_R+e_Rs+f_Rs^2\end{cases}\tag{21}$$

式中s为参数，代表从第一个节点算起的累加弦长。方程(20)和(21)中的系数分别由点$i-1$，i，$i+1$以及i，$i+1$，$i+2$唯一确定。

在插值区间$[s_i, s_{i+1}]$上述两支抛物线的加权平均值，即作为该区间的插值函数，如下式：

$$\begin{cases} x = w_L x_L + w_R x_R \\ y = w_L y_L + w_R y_R \end{cases} \tag{22}$$

式中权函数w_L和w_R一般取三次多项式[2]，其值为

$$w_L = \left(1 - \frac{s-s_i}{\Delta s}\right)^2 \left[1 + 2\left(\frac{s-s_i}{\Delta s}\right)\right]$$

$$w_R = \left(\frac{s-s_i}{\Delta s}\right)^2 \left[3 - 2\left(\frac{s-s_i}{\Delta s}\right)\right] \tag{23}$$

其中，$\Delta s = s_{i+1} - s_i$，$s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}$。

由式（22），求x对s的二阶导数：

$$\ddot{x} = \ddot{w}_L x_L + 2\dot{w}_L \dot{x}_L + w_L \ddot{x}_L + \ddot{w}_R x_R + 2\dot{w}_R \dot{x}_R + w_R \ddot{x}_R$$

因

$$w_L + w_R = 1$$

$$\dot{w}_L = -\dot{w}_R$$

$$\ddot{w}_L = -\ddot{w}_R$$

故

$$\ddot{x} = \ddot{w}_L (x_L - x_R) + 2\dot{w}_L (\dot{x}_L - \dot{x}_R) + w_L (\ddot{x}_L - \ddot{x}_R) + \ddot{x}_R$$

$$|\ddot{x}| \leqslant |\ddot{w}_L| \cdot |x_L - x_R| + 2|\dot{w}_L| \cdot |\dot{x}_L - \dot{x}_R| + w_L \cdot |\ddot{x}_L - \ddot{x}_R| + |\ddot{x}_R| \tag{24}$$

由式(20)、(21)和(23)，可有

$$w_L \leqslant 1$$

$$|\dot{w}_L| = \left|\frac{6}{\Delta s^2}(s-s_i)\left(\frac{s-s_i}{\Delta s} - 1\right)\right| \leqslant \frac{3}{2\Delta s}$$

$$|\ddot{w}_L| = \left|\frac{6}{\Delta s^2}\left[2\left(\frac{s-s_i}{\Delta s}\right) - 1\right]\right| \leqslant \frac{6}{\Delta s^2}$$

$$\ddot{x}_L = 2c_L$$

$$\ddot{x}_R = 2c_R$$

将上列各式代入式（24），得

$$|\ddot{x}| < \frac{6}{\Delta s^2} \cdot \max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |x_L - x_R| + \frac{3}{\Delta s} \cdot \max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |\dot{x}_L - \dot{x}_R| + 2|c_L - c_R| + 2|c_R| \tag{25}$$

式中

$$\max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |x_L - x_R| = |x_L - x_R|_{s = s_i + \frac{\Delta s}{2}} = \Big| a_L - a_R + (b_L - b_R)$$

$$\cdot \left(s_i + \frac{\Delta s}{2}\right) + (c_L - c_R)\left(s_i + \frac{\Delta s}{2}\right)^2 \Big| \tag{26}$$

$$\max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |\dot{x}_L - \dot{x}_R| = \max(|b_L - b_R + 2c_L s_i - 2c_R s_i|,\ |b_L - b_R + 2c_L s_{i+1} - 2c_R s_{i+1}|)$$

类似地，可求得

$$|\ddot{y}| < \frac{6}{\Delta s^2} \cdot \max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |y_L - y_R| + \frac{3}{\Delta s} \cdot \max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |\dot{y}_L - \dot{y}_R| + 2|f_L - f_R| + 2|f_R| \tag{27}$$

式中

$$\max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |y_L - y_R| = |y_L - y_R|_{s = s_i + \frac{\Delta s}{2}} = \left| d_L - d_R + (e_L - e_R) \cdot \left(s_i + \frac{\Delta s}{2}\right) + (f_L - f_R)\left(s_i + \frac{\Delta s}{2}\right)^2 \right| \tag{28}$$

$$\max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} |\dot{y}_L - \dot{y}_R| = \max(|e_L - e_R + 2f_L s_i - 2f_R s_i|,\ |e_L - e_R + 2f_L s_{i+1} - 2f_R s_{i+1}|)$$

若令不等式(25)右部分用$\ddot{X}$表示，不等式(27)的右部分用$\ddot{Y}$表示，则有

$$\max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}} (\ddot{x}^2(s) + \ddot{y}^2(s)) < \ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2 \tag{29}$$

实际应用时，就以$\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2$作为二阶导数平方和的最大值代入公式(16)计算步长。

3、张力样条插值[2]

设平面上已知有序点列$\{x_i, y_i\}$ ($i=1, 2, 3, \cdots, n$)，张力系数为σ，以累加弦长s为参数，则相邻节点间的张力样条函数为：

$$\left\{\begin{aligned} x = x(s) &= \frac{1}{\sigma^2 \mathrm{sh}(\sigma H_i)}[\ddot{x}(s_i)\mathrm{sh}(\sigma(s_{i+1}-s)) + \ddot{x}(s_{i+1})\mathrm{sh}(\sigma(s-s_i))] + \\ &\left(x_i - \frac{\ddot{x}(si)}{\sigma^2}\right)\frac{s_{i+1}-s}{H_i} + \left(x_{i+1} - \frac{\ddot{x}(s_{i+1})}{\sigma^2}\right)\frac{s-s_i}{H_i} \\ y = y(s) &= \frac{1}{\sigma^2 \mathrm{sh}(\sigma H_i)}[\ddot{y}(s_i)\mathrm{sh}(\sigma(s_{i+1}-s)) + \ddot{y}(s_{i+1})\mathrm{sh}(\sigma(s-s_i))] + \\ &\left(y_i - \frac{\ddot{y}(s_i)}{\sigma^2}\right)\frac{s_{i+1}-s}{H_i} + \left(y_{i+1} - \frac{\ddot{y}(s_{i+1})}{\sigma^2}\right)\frac{s-s_i}{H_i} \end{aligned}\right. \tag{30}$$

式中
$$H_i = s_{i+1} - s_i$$
$$s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

现分别取x和y对s的二阶导数

$$\ddot{x} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\sigma H_i)}[\ddot{x}(s_i)\mathrm{sh}(\delta(s_{i+1}-s)) + \ddot{x}(s_{i+1})\mathrm{sh}(\sigma(s-s_i))]$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\sigma H_i)}[\ddot{y}(s_i)\mathrm{sh}(\sigma(s_{i+1}-s)) + \ddot{y}(s_{i+1})\mathrm{sh}(\sigma(s-s_i))]$$

又

$$\ddot{x}^2 = \frac{1}{sh^2(\sigma H_i)}[\ddot{x}^2(s_i)sh^2(\sigma(s_{i+1}-s)) + 2\ddot{x}(s_i)\ddot{x}(s_{i+1})sh(\sigma(s_{i+1}-s))\cdot sh(\sigma(s-s_i)) + \ddot{x}^2(s_{i+1})sh^2(\sigma(s-s_i))]$$

$$\ddot{y}^2 = \frac{1}{sh^2(\sigma H_i)}[\ddot{y}^2(s_i)sh^2(\sigma(s_{i+1}-s)) + 2\ddot{y}(s_i)\ddot{y}(s_{i+1})sh(\sigma(s_{i+1}-s))\cdot sh(\sigma(s-s_i)) + \ddot{y}^2(s_{i+1})sh^2(\sigma(s-s_i))]$$

故

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \frac{1}{sh^2(\sigma H_i)}[sh^2(\sigma(s_{i+1}-s))\cdot(\ddot{x}^2(s_i)+\ddot{y}^2(s_i)) + 2sh(\sigma(s_{i+1}-s))sh(\sigma(s-s_i))\cdot(\ddot{x}(s_i)\ddot{x}(s_{i+1})+\ddot{y}(s_i)\ddot{y}(s_{i+1})) + sh^2(\sigma(s-s_i))\cdot(\ddot{x}^2(s_{i+1})+\ddot{y}^2(s_{i+1}))] \tag{31}$$

令

$$M = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$$

不难证明$\frac{d^2M}{ds^2}$在区间$[s_i, s_{i+1}]$恒为正，故函数M为向上凹曲线。因此M的最大值位于插值区间的左端或右端，即

$$\max_{s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}}(\ddot{x}^2(s)+\ddot{y}^2(s)) = \max(\ddot{x}^2(s_i)+\ddot{y}^2(s_i),\ \ddot{x}^2(s_{i+1})+\ddot{y}^2(s_{i+1})) \tag{32}$$

上式中，$\ddot{x}(s_i)$、$\ddot{y}(s_i)$、$\ddot{x}(s_{i+1})$、$\ddot{y}(s_{i+1})$为函数x(s)和y(s)在插值区间两端节点处的二阶导数，这些值在建立插值函数时都有算出，可以现成利用。

试验情况

作者曾分别按矢高法、距离法和增量法针对同一曲线图形（如图3）进行了计算分析和绘图试验。计算机输出的各项数据见表1、2和3。

矢高法试验结果 表 1

插值方法	插值点总数	相邻插值点间弦长(mm)			弦弧间偏差（步）			运算时间（分钟）
		最大	最小	平均	最大	最小	平均	
五点法	998	2.762	0.039	0.920	0.944	10^{-5}	0.363	13
张力样条法	1038	2.138	0.071	0.884	0.943	0.0006	0.335	32

距离法试验结果 表 2

插值方法	插值点总数	相邻插值点间弦长（mm）			弦弧间偏差（步）			运算时间（分钟）
		最大	最小	平均	最大	最小	平均	
五点法	2388	0.50	0.30	0.38	2.27	0	0.08	27
张力样条法	1877	0.83	0.02	0.49	0.70	0	0.10	53

增量法试验结果 表 3

插值方法	插值点总数	相邻插值点间弦长（mm）			弦弧间偏差（步）			运算时间（分钟）
		最大	最小	平均	最大	最小	平均	
五点法	6005	2.09	0.05	0.15	0.87	0	0.02	60
张力样条法	6028	4.14	0.04	0.15	0.96	0	0.02	174

注：（1）试验时采用的绘图机步距为：0.0635mm；

（2）弦弧间偏差值（矢高）的单位为：绘图机的步；

（3）距离法试验时曾规定：五点法插值中$0.3 \leqslant \Delta s$（相邻插值点间弦长）$\leqslant 0.5$mm，

张力样条插值中 步长（累加弦长为参数）= 0.5mm；

（4）表列各项数据是在微型计算机（CROMEMCO）上运算获得的。

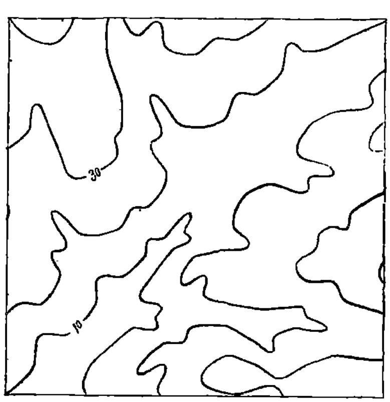

图 3

试验表明：

1、按矢高法和增量法输出的曲线图形，其绘图误差（弦弧间偏差）都能小于事先给定的容许误差，而距离法有时则不能保证应有的精度（这次试验中距离法的最大误差达到2.27个绘图机步距）。

2、由于矢高法公式(16)中二阶导数平方和最大值的计算只需利用插值过程的中间结果（如插值多项式系数或节点处的导数值等），并且每个插值区间的步长只须计算一次，故按矢高法计算步长的程序量和计算量约与其他两法相仿。

3、按矢高法计算的步长能随曲线形状而动态地变化（不同插值区之间），因而能在满足光滑度条件下较经济地给出插值点密度。从表1、2和3可知矢高法所计算的插值点比其他两法少得多，所耗机器时间亦明显少于其他两法。

由此得出结论：采用矢高法不仅能保证曲线光滑度，而且能大大地提高绘图速度。

本文曾由胡毓巨、毋河海、肖干庭和费立凡等同志校阅过，谨致谢意。

参 考 文 献

〔1〕 杨学平：《计算机绘图》电力工业出版社　1980

〔2〕 刘岳、梁启章：《专题地图制图自动化》测绘出版社　1981

〔3〕 H.Lienhard：Interpolation von Funktionswerten bei numerischen Bahnsteuerungen, Contraves AG Zürich

Bestimmung der Schrittlänge Bei der Kurveninterpolation

Xu Qingrong

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel wurden zwei bekannte die Schrittlänge bestimmende Methoden diskutiert：eine mit der Distanz und andere mit dem Inkrement. Es wird eine nene Formel für die Bestimmung der Schrittlänge bei der Interpolation (s.Formel (16))entwickelt. Diese Formel kann unter der Bedingung, die gewünschte Glätte der Kurve znb efriedigen, die möglichst große Schrittlänge geben, dadurch wird die Zeichengeschwindigkeit gesteigert werden.