

# 位移向量的 $L^1$ 范数为最小的监测网平差

陈永奇

## 摘要

为更好地鉴别变形模型，本文提出了使位移向量的  $L^1$  范数为最小的自由网平差方法，并通过几个模拟实验来证实这种方法的有效性。

## 一 引 言

最近几年，自由网问题在国内引起了很大的兴趣，重点讨论了解向量具有最小欧氏范数的解法（以下称为自由网的“内制约”法平差），例如[1][3]。根据实际问题的需要，一些学者又提出了不同的方法，如“广义的赫尔默特变换”[8]或“拟稳平差”[1][2]，“外坐标法”[9]等。

在大地控制网中，研究自由网问题是和控制网在空间中的定位相联系的。经过了过去十多年的讨论，内制约法平差已比较广泛地被接受[11]，如出现了所谓“浮动参考系”的方案，在网中均匀地选择一些控制点来定义参考系的做法（类似于“拟稳平差”）[12]等。在形变分析中，问题并不是那样明确。为此，本文试图分析自由网平差在形变分析中的作用并提出另一种方法。

作为讨论问题的基础，下面给出了自由网平差的通用解法。设  $(l, \underline{A} \underline{x}, \sigma^2 Q)$  为自由网平差的高斯—马尔可夫模型，其图形矩阵  $\underline{A}$  的零空间  $N\{\underline{A}\}$  可以由矩阵  $\underline{H}$  的列向量张成。对于一个有  $m$  个点的三维控制网，最大的矩阵  $\underline{H}$  有如下的结构：

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{z}_0 & -\underline{y}_0 & \underline{x}_0 \\ \underline{0} & \underline{c} & \underline{0} & -\underline{z}_0 & \underline{0} & \underline{x}_0 & \underline{y}_0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{c} & \underline{y}_0 & -\underline{x}_0 & \underline{0} & \underline{z}_0 \end{bmatrix} / 3m \times 7 \quad (1.1)$$

式中  $\underline{c}^T = (1, 1, \dots, 1)$ ， $\underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0$  是相对于网“重心”的坐标向量。矩阵  $\underline{H}$  的列向量分别代表整个网在  $x, y, z$  方向上的平移，绕  $x, y, z$  坐标轴的转动以及比例尺的变化。对于其它形式的自由网，相应矩阵  $\underline{H}$  的构成可以简单地去掉 (1.1) 中不相干的列和行。研究自由网问题包括两方面：一是怎样定义参考系方程  $\underline{D}^T \underline{x} = \underline{0}$ （秩  $\{\underline{D}\} = \text{秩} \{\underline{H}\}$ ），二是有了参考系方程后怎样解。前一个问题本文讨论的重点，将在第二部分介绍，而后一个问题可以综合成下面两个定理[4]。

**定理1.1：** 设  $\hat{\underline{x}}$  是自由网的线性模型  $(l, \underline{A} \underline{x}, \sigma^2 Q)$  的任一解向量，则相应于参考系方程  $\underline{D}^T \underline{x} = \underline{0}$  的解为

$$\hat{\underline{x}}_1 = \underline{S} \hat{\underline{x}} \quad (1.2a)$$

$$\hat{\underline{Q}}_{\hat{\underline{x}}_1} = \underline{S} \underline{Q} \hat{\underline{x}} \quad (1.2b)$$

其中

$$\underline{S} = (\underline{I} - \underline{H} (\underline{D}^T \underline{H})^{-1} \underline{D}^T) \quad (1.3a)$$

或

$$\underline{S} = (\underline{I} - \underline{H} (\underline{H}^T \underline{W} \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \underline{W}) \quad (1.3b)$$

而

$$\underline{W} = \underline{D} (\underline{D}^T \underline{D})^{-1} \underline{D}^T$$

**定理1.2:** 设  $\underline{N} \underline{x} = \underline{u}$  为自由网线性模型 ( $\underline{l}$ ,  $\underline{A} \underline{x}$ ,  $\sigma^2 \underline{Q}$ ) 的法方程式, 则相应于参考系方程  $\underline{D}^T \underline{x} = 0$  的解向量为:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{N}_D^{-1} \underline{u} \quad (1.4a)$$

$$\hat{\underline{Q}_x} = \underline{N}_D^{-1} \quad (1.4b)$$

其中

$$\underline{N}_D = (\underline{N} + \underline{D} \underline{D}^T)^{-1} - \underline{H} (\underline{H}^T \underline{D} \underline{D}^T \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \quad (1.5)$$

## 二 位移向量的 $L^1$ 范数最小的监测网平差方法

### 2.1 形变分析中自由网平差的作用

形变监测网一般可分为参考网和相对网[6]。分析参考网的目的是要查明它的稳定性, 或者说要找出个别不稳定的点。这一问题解决了, 计算变形体(如拦河坝)上点的位移相对来讲要简单得多, 可以直接计算变形体上目标点相对于参考网中所有稳定点的位移, 也可以把这些稳定点作为“拟稳点”再进行“拟稳平差”。对于相对网, 问题比较复杂。分析的目的是要找出各个点间由于变形体中应力的作用而变化的情况。

形变测量的几何分析可以归纳为三个相互有连系的步骤[5]: 在时间和空间中初步鉴别变形模型, 估计变形模型参数和统计检验诊断模型。第二步和第三步与自由网平差方法无关, 也就是说, 无论采用什么样的平差方法都应得到唯一的结果[5]。然而, 为在空间中鉴别变形模型, 画出二个周期观测的位移场是有益的。

监测网一般是自由网, 不同的平差方法会得出完全不同的位移场。我们的目的是要选择一种方案, 使得变形模型的鉴别更容易些, 这就是形变分析中研究自由网问题的目的。

“内制约”平差法意味着监测网中各点位移的矢量和为零, 由位移所计算的网在两周期中绕“重心”的转动和比例尺的变化都为零(有测边的监测网没有后面这一点)。如果  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  分别表示  $i$  点在  $x$ ,  $y$ ,  $z$  三个方向上的位移分量, 那么上面这些结果可以写为:

$$\begin{aligned} \sum_i u_i &= \sum_i v_i = \sum_i w_i = 0 \\ \sum_i (y_{i0} w_i - z_{i0} v_i) &= \sum_i (z_{i0} u_i - x_{i0} w_i) = \sum_i (x_{i0} v_i - y_{i0} u_i) = 0 \\ \sum_i (x_{i0} u_i + y_{i0} v_i + z_{i0} w_i) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中  $x_{i0}$ ,  $y_{i0}$ ,  $z_{i0}$  为  $i$  点相对于网“重心”的坐标。很明显, 这和现实情况不一定符合。如果网中某些点有移动, 那么“内制约”平差法会歪曲真实的位移场, 使得变形模型的鉴别变得困难。为此, 提出了使位移向量的  $L^1$  范数最小为准则来建立参考系的方案。

### 2.2 方法介绍

设  $\underline{d}$  是监测网的位移向量, 由任意的自由网平差方法求得。通过定理 1.1 可以把它转换到由  $\underline{D}^T \underline{x} = 0$  所定义的参考系中去, 记为  $\underline{d}_1$ ,

$$\underline{d}_1 = (\underline{I} - \underline{H} (\underline{H}^T \underline{W} \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \underline{W}) \underline{d} \quad (2.2)$$

式中

$$\underline{W} = \underline{D}(\underline{D}^T \underline{D})^{-1} \underline{D}^T \quad (2.3)$$

方法的核心是选择参考系方程的矩阵  $\underline{D}$  (或  $\underline{W}$ ) 使得  $\|\underline{d}_1\|_1$  = 最小。令

$$\underline{t} = (\underline{H}^T \underline{W} \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \underline{W} \underline{d} \quad (2.4)$$

则

$$\|\underline{d}_1\|_1 = \sum_i |d_{1i}| = \sum_i |d_{1i} - H_{i1} t_i| \quad (2.5)$$

其中  $d_{1i}$ ,  $d_i$  分别为  $\underline{d}_1$ ,  $\underline{d}$  的第  $i$  个元素,  $H_{i1}$  为  $\underline{H}$  的第  $i$  行向量。求 (2.5) 式的极小值有多种方法, 例如 [7] 采用线性规划的方法。本文采用了一种近似的解法, 它对于满足 2.1 所提出的初步鉴别变形模型这一目的是完全足够的。方法的理论基础来自于 [10]。矩阵  $\underline{W}$  的建立是逐步进行的。开始取  $\underline{W} = \underline{I}$ , 由 (2.2) 求得  $\underline{d}_1$ , 然后在第  $k+1$  次计算时, 取  $\underline{W} = \text{diag}\{1/|d_{1i}(k)|\}$ , 整个计算过程进行到相邻两次  $d_{1i}$  的差值小于某一预先设置的限差为止。实际计算时, 可能某些  $d_{1i}(k)$  会接近于零, 这会出现数值计算的不稳定, 为此设置了一个下限值  $\delta$ , 如果  $|d_{1i}(k)| < \delta$ , 则取  $\underline{W}$  的相应元素  $w_{ii} = 0$ ; 如果在下次计算过程中  $|d_{1i}(k+1)| > \delta$ , 则  $w_{ii}$  又做相应的变化, 即取  $w_{ii} = 1/|d_{1i}(k+1)|$ 。整个过程可以在计算机上自动地完成。

$\underline{d}_1$  的协因数阵为:

$$\underline{Q}_{d_1} = (\underline{I} - \underline{H}(\underline{H}^T \underline{W} \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \underline{W}) \underline{Q}_d (\underline{I} - \underline{H}(\underline{H}^T \underline{W} \underline{H}) \underline{H}^T \underline{W})^T \quad (2.6)$$

式中

$$\underline{Q}_d = \underline{Q}_{\underline{x}^{(1)}} + \underline{Q}_{\underline{x}^{(2)}} \quad (2.7)$$

其中,  $\underline{Q}_{\underline{x}^{(1)}}$  为第 1 期坐标平差值的协因数阵, 可以从任意一种自由网平差方法中获得。

矩阵  $\underline{H}$  有相应于两期观测中共同点的行数和相应于两期监测网参考系亏秩合集的列数。

### 三 模拟实验

图 1 是一个国家一等网的一部分。第一期观测是三角网, 第二期是三角三边网。在地质断层的东部人为地引入 200 毫米的位移 (虚线表示), 然后分别用“内制约”平差法和所建议的方法进行计算, 不考虑观测误差, 所得的位移场分别画在图 1a 和图 1b。很清楚, 所建议的方法给出较好的变形体状态的图形, 对鉴别变形模型有利。

相同的这个网由荷兰德尔夫特大学大地测量计算中心进行模拟, 第一期的方向测量中误差为  $0.46''$ , 边长测量中误差为 0.03 米, 第二期的方向测量和边长测量中误差分别为  $0.35''$  和 0.10 米。用所建议的方法, 网中各点的位移和相应的 95% 置信椭圆画在图 2。从图上可以看出一个清晰的变形图形: 断层的东部相对于西部做相对移动, 而 3 号点还有不规则的运动, 在断层的西部, 45 号点是不稳定的点。进一步的分析, 包括变形模型参数的估计和统计检验诊断都证实了图上所指示的模型。

图 3 是某大坝变形观测的参考网。5 号点在 y 方向上每次模拟移动 1 毫米, 用两种方法计算各点的位移和相应的 95% 置信椭圆。如果位移在相应的置信椭圆外, 就考虑它可能移动, 需要进一步进行分析。所得的结果载于表 1。很明显, 所建议的方法较好。

怀疑不稳定的点号 表1

点号 \ 模拟位移量 (mm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点号										
1							✓	✓	✓	✓
2										✓
3					✓	✓	✓	✓	✓	✓
4				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
6									✓	✓

注: “✓”表示用“内制约”平差法

“✗”表示用所建议的方法

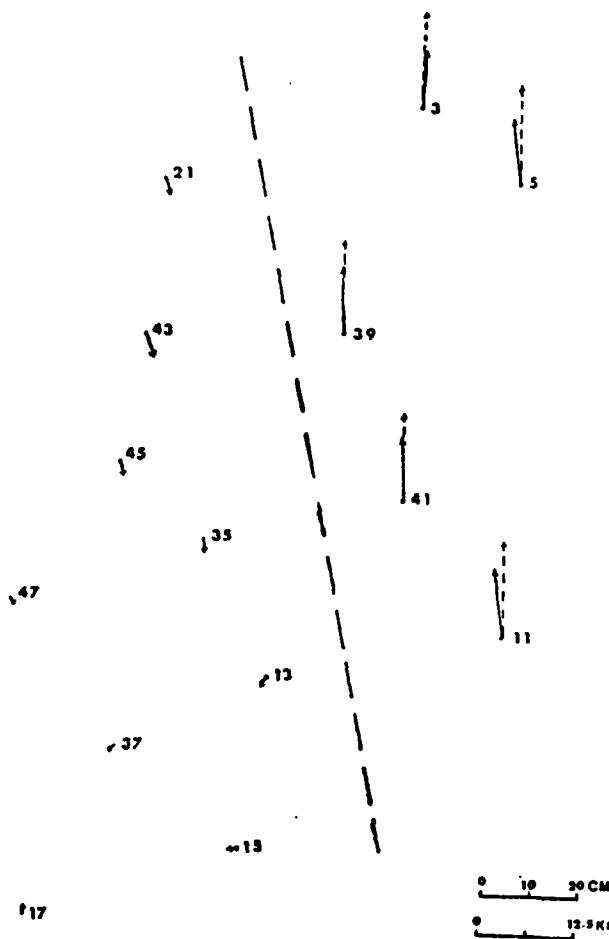


图1a: 用所建议的方法所得的位移矢量场

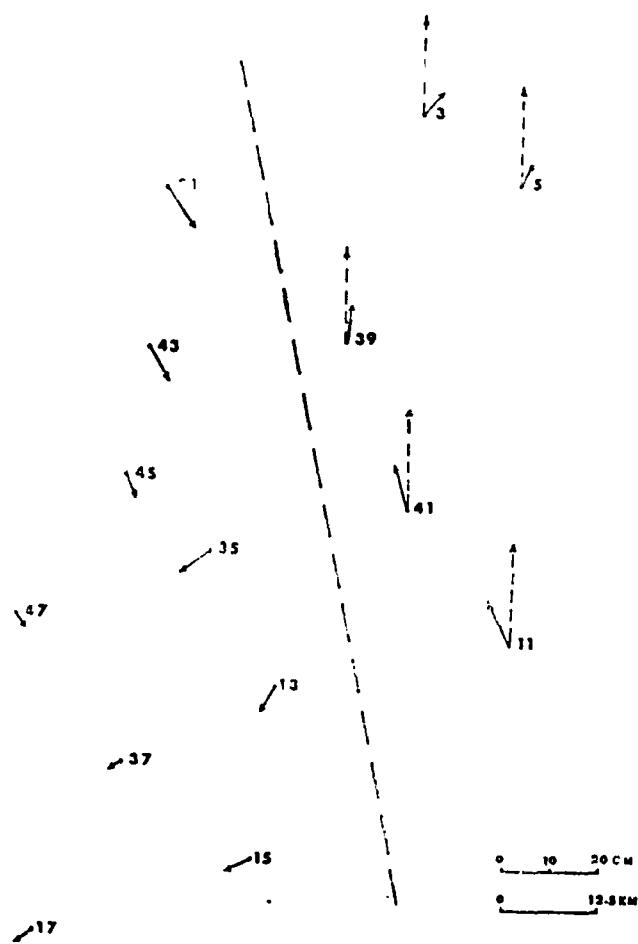


图1b: 用“内制约”法所得的位移矢量场

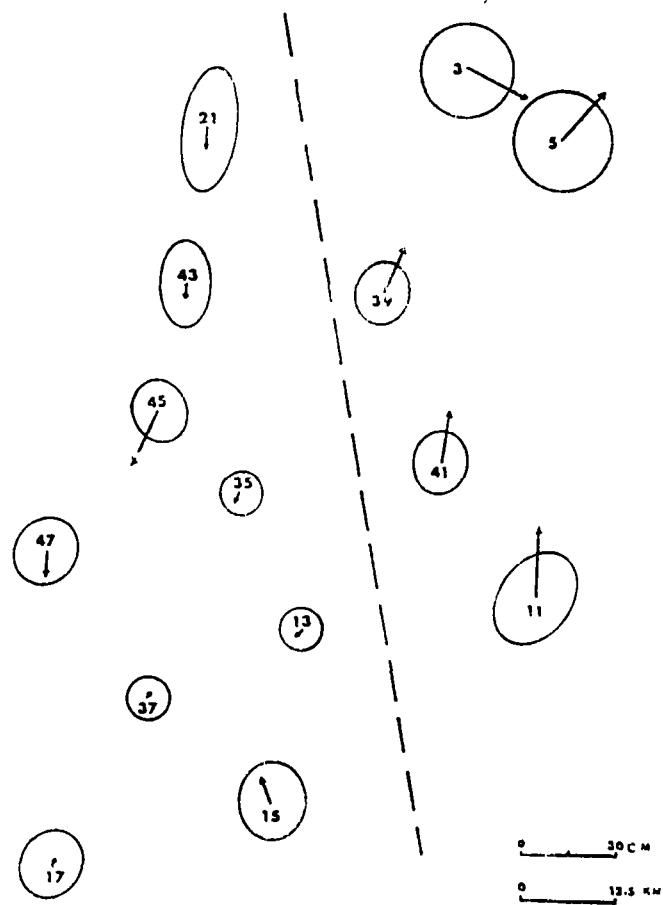


图 2：两期模拟观测的变形图形

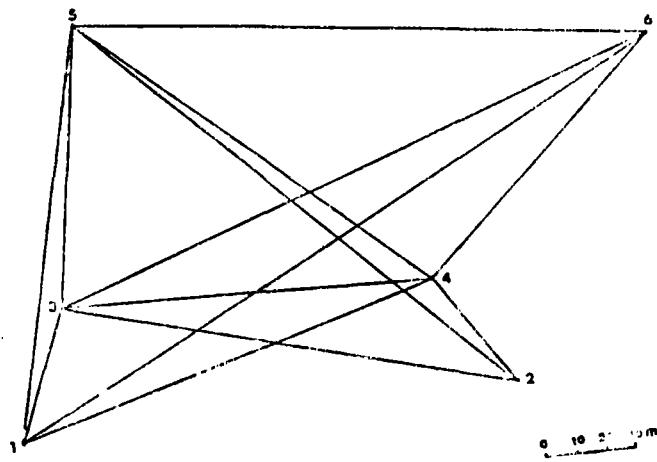


图 3：某大坝变形观测的参考网

## 参考文献

- [1] 陶本藻: 自由网平差与变形分析, 武汉测绘学院出版科, 1983。
- [2] 周江文: 监测网拟稳平差, 《测量与地球物理研究所专刊》, 1980第2号。
- [3] 刘大杰: 论亏秩自由网平差, 《武汉测绘学院学报》N0.1, 1981。
- [4] 陈永奇: 测量工程个别问题, 武汉测绘学院出版科, 1984。
- [5] Chen, Y.Q., 1983. Analysis of Deformation Surveys—A Generalized Method. TR. No.94, Dept. of Surveying Engineering, University of New Brunswick.
- [6] Chrzanowski, A., Y.Q.Chen and J. M. Secord, 1983. On the strain analysis of tectonic movements using fault crossing geodetic surveys. Tectonophysics 97, pp. 297—315.
- [7] Fuchs, H., 1982. Adjustment by minimizing the sum of absolute residuals. DGK, Heft Nr. 258/v.
- [8] Keller, W., 1978. Lagerung freier Netze. proceedings of the II international symposium of deformation measurements by geodetic methods, Bonn.
- [9] Prescott, W.H., 1981. The determination of displacement fields from geodetic data along a strike-slip Fault. J. Geophys. Res., 86, pp.6067—6072.
- [10] Schlossmacher, E.T., 1973. An interactive technique for absolute deviations curve Fitting. JASA, vol.68, pp. 857—859.
- [11] Schmitt, G., 1982. Optimal design of geodetic networks. DGK. Heft Nr. 258/III, pp. 7—12.
- [12] Vanicek, P. and E. J. Krakiwsky, 1982. Geodesy: The Concept. North Holland, Amsterdam.

## Adjustment of a Monitoring Free Network

## by Minimizing the First Norm of the Displacement Vector

Chen Yongqi

## Abstract

A robust method in the adjustment of a free network is proposed for the identification of the deformation models in space domain. The method is based on the minimization of the first norm of the displacement vector. Some simulated examples are also given to demonstrate the idea.