

利用选择权迭代法 进行粗差定位

李 德 仁

摘 要

选择权迭代法是一种可望用于粗差定位的有效方法。本文回顾该方法中几种主要的不同权函数后,从最小二乘法验后方差估计原理推导出选择权迭代法进行粗差定位的权函数的和统计检验量。通过对不同形式权函数的对比试验证实了所提方法之优越性。将其引入丹麦法中亦获得同样好的结果。

一、序 言

根据数理统计原理, Baarda 教授提出了最小二乘法平差系统的内部和外部可靠性理论,并建立了一种检测粗差的数据探测 (Data Snooping) 方法/4, 5, 6/。近几年来利用该理论已对摄影测量平差系统的内外部可靠性进行了大量的研究/1, 2, 3, 8, 9, 10, 12, 13 等/。这些研究从可靠性角度提供了设计摄影测量系统的一些基本原则。

然而关于粗差的定位和改正问题至今并未解决,而这恰恰是可靠性研究的一个现实目的。数据探测方法只能在已知单位权方差和仅含一个粗差的情况下指出粗差的存在。当单位权方差未知时,粗差将在平差中对所有的残差以及单位权方差估值产生影响,从而给粗差检测带来困难。表 1 列出一元三次多项式平差的三个实例。尽管前二例中的粗差已大于相应的下界值 $V.l_1$,但对于数据探测法还是很困难的:若以验前方差求统计量 W_i ,则将有多个超出检验之临界值(当 $\alpha = 0.1\%$ 时 $K_\alpha = 3.29$);若以验后单位权方差求统计量 \hat{W}_i ,则一个也不超出临界值 K_α 。第三例由于粗差已在下界值之下,用数据探测法当然无法发现了。鉴于此种原因,近年来,人们正致力于寻找新的方法来进行粗差定位和改正,包括非最小二乘法。其中选择权迭代法是一种较为切实可行的办法。

本文从最小二乘法验后方差估计原理出发,推导一种选择权迭代法的权函数和统计检验量,然后结合现有的其它各种形式进行对比试验,其中重点讨论权函数和统计量的选择问题。

表1 数据探测法 (Data Snooping) 难以检测粗差的示例

表1—1 $\nabla_0 l_1 = 9.82 \sigma_0$, $\nabla l_1 = 35 \sigma_0$, $\sigma_0 = \pm 0.007$, $\hat{\sigma}_0 = \pm 0.044$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_i	-0.250	-0.005	-0.002	0.005	-0.010	0.005	-0.005	0.005	0.005	-0.010
$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$	+0.105	-0.091	-0.008	0.023	0.043	0.010	-0.001	-0.031	-0.027	0.055
$W_i = \frac{ \bar{v}_i }{\sigma_0}$	15.00	13.00	1.14	3.29	6.14	1.43	0.14	4.43	3.86	7.86
$\hat{W}_i = \frac{ \bar{v}_i }{\hat{\sigma}_0}$	2.42	2.10	0.18	0.52	0.99	0.23	0.03	0.71	0.63	1.27

表1—2 $\nabla_0 l_1 = 9.82 \sigma_0$, $\nabla l_1 = 14 \sigma_0$, $\sigma_0 = \pm 0.017$, $\hat{\sigma}_0 = \pm 0.046$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_i	-0.250	-0.012	-0.006	0.012	-0.025	0.012	-0.012	0.012	0.012	-0.025
$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$	0.106	-0.088	-0.010	0.009	0.058	0.003	0.011	-0.036	-0.037	0.067
$W_i = \frac{ \bar{v}_i }{\sigma_0}$	6.24	5.18	0.59	0.53	3.41	0.18	0.65	2.12	2.18	3.94
$\hat{W}_i = \frac{ \bar{v}_i }{\hat{\sigma}_0}$	2.29	1.91	0.22	0.20	1.26	0.07	0.23	0.78	0.80	1.45

表1—3 $\nabla_0 l_1 = 9.82 \sigma_0$, $\nabla l_1 = 7 \sigma_0$, $\sigma_0 = \pm 0.035$, $\hat{\sigma}_0 = \pm 0.056$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_i	-0.250	-0.025	-0.012	0.025	-0.050	0.025	-0.025	0.050	0.025	-0.025
$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$	0.107	-0.082	-0.015	-0.015	0.085	-0.006	0.039	-0.066	-0.038	0.079
$W_i = \frac{ \bar{v}_i }{\sigma_0}$	3.06	2.34	0.43	0.43	2.43	0.17	1.11	1.89	1.09	2.26
$\hat{W}_i = \frac{ \bar{v}_i }{\hat{\sigma}_0}$	1.92	1.48	0.27	0.27	1.52	0.11	0.70	1.18	0.68	1.42

注: ε_i 为真误差

二、选择权迭代法的基本思想和各种形式的权函数

选择权迭代法进行粗差定位的基本思想是：由于粗差未知，平差从惯常的最小二乘法开始，但在每次平差后，根据其残差和其它有关参数按所选择的权函数计算每个观测值在下步迭代计算中的权。如果权函数选择得当，且粗差可定位，则含粗差观测值的权将愈来愈小，直至趋近于零。迭代中止时，相应的残差将直接指出粗差的大小，而平差结果将不受粗差的影响。这样便实现了粗差的自动定位和改正。

该方法从下列最小条件出发：

$$\sum P_i V_i^2 \rightarrow \text{Min} \quad (1)$$

其中权函数

$$P_i^{v+1} = f(V_i^v, \dots) \quad v = 1, 2, \dots$$

具有各种不同的形式。

1 L_q 迭代法

该法来自最小范数法

$$\sum |V_i|^q \rightarrow \text{Min} \quad (2)$$

当 $q = 1$ 和 $q = 0$ 时，相应的权函数为

$$P_i^{v+1} = \frac{1}{|V_i^v| + c} \quad (c \rightarrow 0) \quad (3)$$

和

$$P_i^{v+1} = \frac{1}{(V_i^v)^v + c} \quad (c \rightarrow 0) \quad (4)$$

但必须指出 L_q 迭代法之第一步乃最小二乘平差，所以它与 (2) 式之直接最小范数解法有明显的区别。

2 丹麦法

丹麦法有多种形式的权函数，一种据称适合于摄影测量平差的权函数为/15/：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{第 1 次迭代:} & P_i = 1 \\ \text{第 2, 3 次迭代:} & P_i = \left(\exp \left[- \left(\frac{V_i}{\sigma} \right)^{4.4} \right] \right)^{0.05} \\ \text{以后各次:} & P_i = \left(\exp \left[- \left(\frac{V_i}{\sigma} \right)^{3.0} \right] \right)^{0.05} \end{array} \right\} \quad (5)$$

K ubik 提出的权函数则为/16/：

$$p^{v+1} = p^v \cdot f(V^v)$$

$$f(V) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , \quad \text{若 } \frac{|V| \sqrt{p_0}}{m_0} < c \\ \exp - \left(\frac{|V| \sqrt{p_0}}{c \cdot m_0} \right) & , \quad \text{若 } \frac{|V| \sqrt{p_0}}{m_0} \geq c \end{array} \right\} \quad (6)$$

其中, $C=3$, p_0 为权系数, m_0 为观测值中误差。

3 带权 Data Snooping 法/14/

$$p_i^{*+1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{w_i^2}\right)^*, & \text{若 } w_i \geq 4.13 \\ 1, & \text{若 } w_i < 4.13 \end{cases} \quad (7)$$

其中,

$$W_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}^{vv}}}$$

4 从 Robust 原理出发的选择权迭代法/18/

Werner 从满足 Robust 估计的五个条件出发, 对平面区域网平差采用下列权函数

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p^0 \left[\frac{1}{1 + (\alpha \cdot |v|)^d} \right] & \text{当 } Q = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} > Q_{\text{限值}} \\ p_1 &= p^0 e^{-(\alpha \cdot |v|)^d} & \text{当 } Q \leq Q_{\text{限值}} \text{ 且 } p \geq p_{\text{min}1} \\ p_2 &= p^0 \left[\frac{p_{\text{min}1}}{\alpha \cdot |v| + 10 p_{\text{min}1}} \right] & \text{当 } Q \leq Q_{\text{限值}} \text{ 且 } p_{\text{min}1} > p > p_{\text{min}2} \\ p_3 &= p_{\text{min}2} & \text{当 } Q \leq Q_{\text{限值}} \text{ 且 } p \leq p_{\text{min}2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{p_i^0}}{\sqrt{r_i} \cdot \hat{\sigma}_0 \cdot k} \\ k &= k_{\text{max}} - (k_{\text{max}} - k_{\text{min}}) \cdot \frac{101}{100 + Q^2} \\ d &= d_{\text{min}} + (d_{\text{max}} - d_{\text{min}}) \cdot \frac{625}{625 + Q^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

且 p^0 为观测值之先验权, σ_0 为先验单位权中误差。

三、从验后方差估计原理导出的选择权迭代法/17/

上面所提及的权函数多为经验选取。事实上, 粗差可视为来自期望为零、方差很大的正态母体之子样。通过最小二乘法的验后方差估计, 可求出观测值之验后方差, 再利用方差检验可找出方差异常大(即含粗差)的观测值。然后给予它一个相应小的权进行下一步迭代平差, 便可逐步地进行粗差定位。这实质上就是上一节所述之选择权迭代法。

1 统计检验量的构建和权函数的导出

大地测量和摄影测量平差往往包含多组观测值, 每组内的观测值具有相同的精度。若假定观测值互不相关, 则可按 Förstner /11/ 提出的方法估求各组观测值的验后方差。

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{V_i' V_i}{r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k \text{ 为组号}) \quad (10)$$

其中

$$r_i = \text{Spur} \left(\underline{Q}_i^{vv} \underline{P}_i \right) \quad (11)$$

于是下步迭代中各组观测值的权为

$$P_i^{*+1} = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_i^2} \right)^v \quad (12)$$

其中

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V' P V}{r} \quad (13)$$

为了发现每组观测值内的粗差, 现对第 i 组内任一观测值 $l_{i,j}$ 求其方差估值 $\hat{\sigma}_{i,j}^2$ 和相应的多余观测分量 $r_{i,j}$ 。由 (10) 和 (11) 式可得到

$$\hat{\sigma}_{i,j}^2 = \frac{V_{i,j}^2}{r_{i,j}} \quad (14)$$

和

$$r_{i,j} = q_{i,j}^{vv} \cdot p_{i,j} \quad (15)$$

于是可建立下列统计量来检验该方差是否异常, 即相应的观测值是否包含粗差。

$$H_0 \text{ 假设: } E(\hat{\sigma}_{i,j}^2) = E(\hat{\sigma}_i^2)$$

$$\text{统计量: } T_{i,j} = \frac{\hat{\sigma}_{i,j}^2}{\hat{\sigma}_i^2} \quad (16)$$

或更一般地写成

$$T_{i,j} = \frac{V_{i,j}^2 \cdot p_i}{\hat{\sigma}_0^2 \cdot r_{i,j}} = \frac{V_{i,j}^2 \cdot p_i}{\hat{\sigma}_0^2 q_{i,j}^{vv} \cdot p_{i,j}} \quad (16')$$

此处 P_i 可理解为第 i 组观测值之验后权或验前权。

假如观测值 $l_{i,j}$ 不含粗差, 即 H_0 假设成立, 则统计量 $T_{i,j}$ 近似为自由度为 1 和 r_i 的

中心 F 分布。若 $T_{i,j} > F_{\alpha, 1, r_i}$, 则表明该观测值方差与该组观测值方差有显著差异, 就是说, 该观测值不属于第 i 组, 很可能包含有粗差。于是按下列权函数计算下一次迭代平差中观测值的权。

$$P_{i,j}^{r+1} = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_i^2}, & \text{当 } T_{i,j} < F_{\alpha, 1, r_i} \\ \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_i^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot r_{i,j}}{V_{i,j}^2}, & \text{当 } T_{i,j} \geq F_{\alpha, 1, r_i} \end{cases} \quad (17)$$

对于仅含一组等精度观测值之平差, 其统计量和权函数相应为:

$$T_i = \frac{V_i^2}{\hat{\sigma}_0^2 q_{ii}^{yy} P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

和

$$P_i^{r+1} = \begin{cases} 1, & \text{当 } T_i < F_{\alpha, 1, r} \\ \frac{\hat{\sigma}_0^2 q_{ii}^{yy} P_i}{V_i^2}, & \text{当 } T_i \geq F_{\alpha, 1, r} \end{cases} \quad (19)$$

应当指出的是, 这里为选择权迭代法导出的统计检验量和权函数仍属于最小二乘法的范畴。

2 与 Baarda 的数据探测法之比较

在一般式 (16') 中, 对于第一次迭代有 $P_i = P_{i,j}$, 于是得到

$$T_i^{\frac{1}{2}} = \frac{V_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}^{yy}}} = \hat{w}_i \quad (20)$$

这正是在未知单位权方差时进行数据探测法的 t (或 τ) 变量。所以数据探测法为本方法之第一次迭代。由于第一次迭代, 含粗差观测值的权是不正确的, 所以所有的残差及 $\hat{\sigma}_0$ 均受其影响, 此时的估计是有偏的。而本文提出的迭代法则通过反复迭代, 使粗差观测值的权逐步减小, 以致接近为零, 因而最终它 will 不影响平差结果而获得无偏估计。

概括而言, 数据探测法是用 t (或 τ) 检验一步法检测粗差, 是有偏的。而本法作为数据探测法的发展, 是用 F 检验多步迭代法进行粗差定位, 估计是从有偏到无偏。

此外, 由于选择权迭代法中, 含粗差观测值之多余分量将逐步趋向 1。根据下式

$$\delta'_{0,i} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (21)$$

则最终可发现的粗差均接近于观测值中误差的 δ_0 倍。这就是说, 选择权迭代法还可以改善内部可靠性 (见下文表 7.3 和表 7.4)。

四、不同的选择权迭代法的对比试验

我们可将不同选择权迭代法的权函数按其内容分类为:

$$(i) \text{ 残差的函数} \quad p_i = f_1(v_i) \quad (22)$$

$$(ii) \text{ 标准化残差的函数} \quad p_i = f_2(w_i) \quad (23)$$

$$(iii) \text{ 方差估值的函数} \quad p_i = f_3(\hat{\sigma}_i) \quad (24)$$

若按其形式则可分为

(i) 幂函数

(ii) 指数函数

孰为最优? 我们取对单粗差可定位系统*为例进行对比试验。因为如果一个权函数对单粗差系统就不合适, 则对多个粗差同时定位将无从谈起。

1 用作对比试验的算例和各种权函数

本文取一元三次多项式平差为例 (见/6/和/19/), 其函数模型为

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (25)$$

未知参数的期望值为

$$E(\underline{a}) = (0, 21, -10, 1)'$$

对于 $\underline{x} = (0, 1, 2, \dots, 9)'$

观测值期望

$$E(\underline{y}) = (0, 12, 10, 0, -12, -20, -18, 0, 40, 108)'$$

按等权最小二乘平差求得残差之协因素阵 \underline{Q}^{vv} 和相关系数阵 $\underline{\rho}^{vv}$ 列于表 2 和表 3, 按 (21) 式求出之 $\delta_{0.1}$ 值则列于表 4。可以看出, 该系统的内部可靠性数值差别还是较大的。

试验采用的各种权函数汇列于表 5。作者对丹麦法赋予三种不同内容的权函数。

取不同大小的粗差 (从 $4.5\sigma_0$ 到 $35\sigma_0$) 和粗差落在不同内部可靠性的观测值上进行试验。试验结果列于表 6 和表 7。表中的 μ_x 为平差未知参数与真值相比较而求出的中误差, L_2 代表惯常的非迭代的最小二乘平差。

综观表 6 和表 7 的结果, 只有权函数作为验后方差估值函数的选择权迭代法 L_{pvs} 和 L_{D3} 才能在所有的情况下正确地进行粗差定位。它们甚至能发现和改正小于不可发现粗差的下界值 $v_{0.1}$ 的粗差 (见表 7.3 和 7.4)。

2 权函数的选择

为了有效地进行粗差定位, 权函数的选择应满足下列条件:

(i) 通过迭代, 含粗差观测值的权应逐步趋近于零, 亦即其多余观测分量应逐步趋近于 1。

*关于粗差定位可能性需专文讨论。在不计偶然误差影响时, 若残差相关系数均小于 1, 则可视作单粗差可定位系统。

表2. 残差的协因素矩阵 $\hat{\alpha}^{vv}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.1762	-0.3133	-0.0196	0.1063	0.1133	0.0503	-0.0336	-0.0895	-0.0685	0.0789
	0.6984	-0.2480	-0.1688	-0.0802	0.0014	0.0597	0.0783	0.0410	-0.0685
		0.6739	-0.2946	-0.1944	-0.0662	0.0492	0.1110	0.0783	-0.0895
			0.6925	-0.2434	-0.1385	-0.0289	0.0492	0.0597	-0.0386
				0.7590	-0.2014	-0.1385	-0.0662	0.0014	0.0503
					0.7590	-0.2434	-0.1944	-0.0802	0.1183
						0.6925	-0.2946	-0.1688	0.1063
							0.6739	-0.2480	-0.0196
								0.6984	-0.3133
									0.1762

表3. 残差的相关系数矩阵 $\hat{\rho}^{vv}$

1	-0.8930	-0.0568	0.3043	0.3098	0.1377	-0.0961	-0.2597	-0.1954	0.4444
	1	-0.3615	-0.2427	-0.1101	0.0019	0.0858	0.1142	0.0587	-0.1954
		1	-0.4315	-0.2718	-0.0926	0.0720	0.1646	0.1142	-0.2597
			1	-0.3357	-0.1970	-0.0417	0.0720	0.0858	-0.0961
				1	-0.2654	-0.1910	-0.0926	0.0019	0.1377
					1	-0.3357	-0.2718	-0.1101	0.3098
						1	-0.4315	-0.2427	0.3043
							1	-0.3615	-0.0568
								1	-0.8930
									1

表4. 各观测值的内部可靠性数值 δ_{0i}'

9.82	4.93	5.02	4.95	4.73	4.73	4.95	5.02	4.93	9.82
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

表 5 对比试验中利用的各种权函数

方 案	权 函 数 p_i^* ($v=2,3,4,\dots$)	权函数的种类
L_1	$\frac{1}{ v_i } \quad \text{当 } v_i > 0.7 \hat{\sigma}_0$ $\frac{1}{0.7 \hat{\sigma}_0} \quad \text{当 } v_i \leq 0.7 \hat{\sigma}_0$	$f_1(v_i)$, 幂函数
L_0	$\frac{1}{v_i^2} \quad \text{当 } v_i > 0.7 \hat{\sigma}_0$ $\frac{1}{0.7 \hat{\sigma}_0^2} \quad \text{当 } v_i \leq 0.7 \hat{\sigma}_0$	$f_1(v_i)$, 幂函数
L_{0H}	$1 \quad \text{当 } W_i \leq 2$ $\frac{1}{W_i^2} \quad \text{当 } W_i > 2$	$f_2(W_i)$, 幂函数
L_{D1}	$1 \quad \text{当 } \frac{ v_i }{\hat{\sigma}_0} \leq 2$ $\left(\exp\left(-\left(\frac{v_i}{\hat{\sigma}_0}\right)^{4.4}\right)\right)^{0.05} \quad \text{当 } \frac{ v_i }{\hat{\sigma}_0} > 2 \text{ 且 } v=2,3$ $\left(\exp\left(-\left(\frac{v_i}{\hat{\sigma}_0}\right)^{3.0}\right)\right)^{0.05} \quad \text{当 } \frac{ v_i }{\hat{\sigma}_0} > 2 \text{ 且 } v>3$	$f_1(v_i)$, 指数函数
L_{D2}	$1 \quad \leq 2$ $\left(\exp\left(-W_i^{4.4}\right)\right)^{0.05} \quad \text{当 } W_i > 2 \text{ 且 } v=2,3$ $\left(\exp\left(-W_i^{3.0}\right)\right)^{0.05} \quad > 2 \text{ 且 } v>3$	$f_2(W_i)$, 指数函数
L_{D3}	$1 \quad \leq k$ $\left(\exp\left(-T_i^{2.2}\right)\right)^{0.05} \quad \text{当 } T_i^{\frac{1}{2}} > k \text{ 且 } v=2,3$ $\left(\exp\left(-T_i^{1.5}\right)\right)^{0.05} \quad > k \text{ 且 } v>3$	$f_3(\hat{\sigma}_i)$, 指数函数
L_{PVS}	$1 \quad \leq k$ $\frac{1}{T_i} \quad \text{当 } T_i^{\frac{1}{2}} > k$	$f_3(\hat{\sigma}_i)$, 幂函数

注: (i) $W_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{q_{ii}^{vv}}}$ (ii) $T_i = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{v_i^2}{\hat{\sigma}_0^2 \cdot r_i}$ (iii) $k = \begin{cases} 1, & v=2,3 \\ 3.29, & v>3 \end{cases}$

表 6—1 粗差在 l_0 上 $\sigma_0 = \pm 0.007$, $\nabla_0 l_0 = 4.73 \sigma_0$, $\nabla l_0 = 35 \sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_z	迭代次数
ε_1	0.005	-0.005	-0.002	0.005	-0.010	-0.250	-0.005	0.005	0.005	-0.010			
L_2	0.012	0.004	-0.018	-0.044	-0.043	0.189	-0.055	-0.052	-0.026	0.032	0.089	0.012	
	0.029	0.005	-0.022	-0.052	-0.049	0.217	-0.066	-0.064	-0.031	0.076			
L_1	0.002	0.004	-0.005	-0.015	-0.001	0.239	-0.004	-0.012	-0.009	0.009	0.044	0.006	6
L_0	-0.000	0.004	-0.002	-0.009	0.007	0.249	0.006	-0.004	-0.006	0.004	0.011	0.005	5
L_D	1	-0.000	0.004	-0.002	0.008	0.250	0.006	-0.004	-0.006	0.004	0.006	0.005	4
	2	0.001	0.004	-0.004	-0.013	0.001	-0.002	-0.010	-0.008	0.007	0.032	0.006	3
	3	-0.001	0.003	-0.003	-0.010	0.007	0.006	-0.003	-0.005	0.004	0.006	0.005	4
L_{PVS}	-0.000	0.004	-0.002	-0.009	0.007	0.249	0.006	-0.004	-0.006	0.004	0.007	0.005	6
L_{OH}	0.002	0.004	-0.005	-0.016	-0.003	0.237	-0.007	-0.014	-0.010	0.010	0.042	0.006	3

表 6—2 粗差在 l_0 上 $\sigma_0 = \pm 0.017$ $\nabla l_0 = 14\sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_{Σ}	迭代次数
ε_i	0.012	-0.012	-0.006	0.012	-0.025	-0.250	-0.012	0.012	0.012	-0.025			
v_i	0.012	0.009	-0.020	-0.057	-0.032	0.189	-0.046	-0.057	-0.034	0.037			
$\frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$	0.028	0.010	-0.025	-0.068	-0.036	0.216	-0.055	-0.070	-0.041	0.089	0.090	0.019	
L_1	0.001	0.008	-0.007	-0.028	0.009	0.238	0.003	-0.018	-0.018	0.014	0.049	0.013	7
L_0	-0.000	0.008	-0.005	-0.023	0.017	0.248	0.014	-0.010	-0.014	0.010	0.026	0.012	4
1 v_i	-0.001	0.008	-0.004	-0.022	0.018	0.248	0.014	-0.009	-0.014	0.009	0.016	0.012	4
2 v_i	0.002	0.008	-0.008	-0.032	0.005	0.232	-0.002	-0.022	-0.020	0.017	0.049	0.014	3
3 v_i	-0.003	0.007	-0.006	-0.024	0.017	0.247	0.014	-0.008	-0.013	0.010	0.014	0.013	4
L_{FVS}	-0.001	0.008	-0.004	-0.022	0.018	0.248	0.014	-0.009	-0.014	0.009	0.017	0.012	6
L_{OH}	0.002	0.008	-0.008	-0.030	0.007	0.234	0.000	-0.020	-0.019	0.016	0.046	0.013	3

表6—3 粗差在 l_0 上 $\sigma_0 = \pm 0.035$ $\nabla l_0 = 7\sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_x	迭代次数
ε_i	0.025	-0.025	-0.012	0.025	-0.050	-0.250	-0.025	0.050	0.025	-0.025			
v_i	0.010	0.018	-0.025	-0.080	-0.012	0.190	-0.025	-0.083	-0.035	0.043	0.095	0.031	
$\frac{v_i}{\sqrt{\frac{v_i}{q_i}}}$	0.025	0.021	-0.030	-0.096	-0.014	0.218	-0.030	-0.101	-0.042	0.102			
L_1	0.002	0.016	-0.016	-0.058	0.022	0.233	0.020	-0.046	-0.019	0.021	0.065	0.028	6
L_0	0.001	0.013	-0.018	-0.056	0.028	0.242	0.031	-0.036	-0.015	0.015	0.048	0.030	4
1	0.010	0.018	-0.025	-0.080	-0.012	0.190	-0.025	-0.083	-0.035	0.043	0.095	0.031	不迭
2	0.000	0.017	-0.012	-0.052	0.029	0.239	0.024	-0.043	-0.019	0.020	0.051	0.025	2
3	-0.001	0.014	-0.014	-0.051	0.034	0.247	0.035	-0.034	-0.014	0.014	0.029	0.027	4
L_{PVS}	-0.002	0.017	-0.009	-0.046	0.036	0.248	0.034	-0.036	-0.015	0.015	0.037	0.024	7
L_{OH}	0.001	0.017	-0.012	-0.054	0.026	0.236	0.021	-0.046	-0.020	0.021	0.054	0.026	2

*所有的检验量均小于临界值(下同)。

表 6—4 粗差在 1σ 上 $\sigma_0 = \pm 0.049$ $\nabla l_0 = 4.5\sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_x	迭代次数
ε_i	0.035	-0.035	-0.017	0.035	-0.070	-0.250	-0.035	0.070	0.035	-0.035			
v_i	0.010	0.025	-0.028	-0.098	0.003	0.190	-0.011	-0.097	-0.041	0.049			
$\frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$	0.023	0.029	-0.034	-0.118	0.003	0.218	-0.013	-0.118	-0.049	0.116	0.100	0.040	
L_1	0.003	0.020	-0.024	-0.083	0.029	0.224	0.026	-0.066	-0.029	0.028	0.076	0.039	5
L_0	0.002	0.018	-0.025	-0.082	0.034	0.231	0.034	-0.059	-0.026	0.022	0.065	0.040	3
1 v_i	0.010	0.025	-0.028	-0.098	0.003	0.190	-0.011	-0.097	-0.041	0.049	0.100	0.040	不迭代
2 v_i	0.000	0.024	-0.016	-0.073	0.039	0.233	0.033	-0.062	-0.026	0.028	0.066	0.036	2
3 v_i	-0.000	0.019	-0.020	-0.072	0.046	0.245	0.048	-0.047	-0.019	0.020	0.040	0.039	4
L_{PVS}	-0.002	0.024	-0.013	-0.066	0.050	0.246	0.046	-0.051	-0.022	0.022	0.051	0.034	7
L_{OH}	0.000	0.024	-0.016	-0.072	0.040	0.234	0.034	-0.061	-0.026	0.028	0.066	0.035	2

*所有的检验量均小于临界值

表7-1 粗差在 l_1 上 $\sigma_0 = \pm 0.007$, $V_0 l_1 = 9.82 \sigma_0$, $V l_1 = 35 \sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_x	迭代次数
ε_1	-0.250	-0.005	-0.002	0.005	-0.010	0.005	-0.005	0.005	0.005	-0.010			
L_2	v_1	-0.076	-0.006	0.019	0.038	0.009	-0.001	-0.026	-0.023	0.023	0.044	0.130	
	$\frac{v_1}{\sqrt{q_{11}}}$	-0.091	-0.008	0.023	0.043	0.010	-0.001	-0.031	-0.027	0.055			
L_1	v_1	-0.097	-0.023	0.009	0.034	0.010	0.004	-0.019	-0.020	0.018	0.037	0.139	6
L_0	v_1	-0.116	-0.041	-0.005	0.026	0.010	0.008	-0.013	-0.016	0.012	0.027	0.142	6
L_D	1 v_1	-0.076	-0.006	0.019	0.038	0.009	-0.001	-0.026	-0.023	0.023	0.044	0.130	不迭代
	2 v_1	-0.029	-0.004	0.003	0.020	0.001	0.004	-0.012	-0.012	0.011	0.028	0.050	4
	3 v_1	0.002	-0.002	-0.008	0.009	-0.004	0.007	-0.003	-0.006	0.004	0.007	0.003	6
L_{PVS}	v_1	0.002	-0.002	-0.008	0.009	-0.004	0.007	-0.003	-0.006	0.004	0.007	0.002	7
L_{OH}	v_1	-0.040	-0.004	0.007	0.024	0.003	0.003	-0.015	-0.015	0.014	0.032	0.070	4

表 7—2 粗差在 l_1 上 $\sigma_0 = \pm 0.017$ $\Delta l_1 = 14 \sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_x	迭代次数
ε_1	-0.250	-0.012	-0.006	0.012	-0.025	0.012	-0.012	0.012	0.012	-0.025			
L_2	0.045	-0.074	-0.008	0.008	0.051	0.003	0.009	-0.030	-0.031	0.028			
	0.106	-0.088	-0.010	0.009	0.058	0.003	0.011	-0.036	-0.037	0.067	0.046	0.127	
L_1	0.023	-0.091	-0.019	0.003	0.051	0.008	0.016	-0.024	-0.029	0.023	0.042	0.137	6
L_0	0.011	-0.098	-0.023	0.002	0.053	0.011	0.019	-0.021	-0.029	0.019	0.037	0.143	7
L_D	0.045	-0.074	-0.008	0.008	0.051	0.003	0.009	-0.030	-0.031	0.028	0.046	0.127	不迭代
	0.133	-0.040	-0.006	-0.004	0.039	-0.002	0.012	-0.020	-0.024	0.020	0.037	0.071	4
	0.253	0.005	-0.003	-0.019	0.022	-0.010	0.017	-0.007	-0.014	0.008	0.016	0.007	5
L_{PVS}	0.247	0.003	-0.004	-0.019	0.023	-0.009	0.017	-0.008	-0.014	0.009	0.018	0.005	7
L_{OH}	0.128	-0.042	-0.006	-0.003	0.039	-0.002	0.012	-0.021	-0.024	0.020	0.037	0.074	3

表7—3 粗差在 l_1 上 $\sigma_0 = \pm 0.035$ $\nabla l_1 = 7\sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_x	迭代次数
ε_1	-0.250	-0.025	-0.012	0.025	-0.050	0.025	-0.025	0.050	0.025	-0.025			
L_2	0.045	-0.069	-0.012	-0.013	0.074	-0.005	0.032	-0.054	-0.032	0.033			
											0.056	0.123	
	0.107	-0.082	-0.015	-0.015	0.085	-0.006	0.039	-0.066	-0.038	0.079			
L_1	0.027	-0.076	-0.012	-0.008	0.080	0.003	0.036	-0.054	-0.034	0.028	0.054	0.135	6
L_0	0.014	-0.081	-0.012	-0.005	0.084	0.004	0.039	-0.053	-0.036	0.024	0.049	0.142	7
L_D	1	0.045	-0.069	-0.012	0.074	-0.005	0.032	-0.054	-0.031	0.033	0.056	0.123	不迭代
	2	0.045	-0.069	-0.012	0.074	-0.005	0.032	-0.054	-0.031	0.033	0.056	0.123	不迭代
	3	0.242	0.008	-0.004	0.054	-0.010	0.048	-0.027	-0.012	0.012	0.029	0.010	4
L_{PVS}	0.229	0.001	-0.008	-0.036	0.049	-0.016	0.040	-0.034	-0.016	0.016	0.038	0.011	7
L_{OH}	0.045	-0.069	-0.012	-0.013	0.074	-0.005	0.032	-0.054	-0.031	0.033	0.056	0.123	不迭代

表7-4 粗差在 l_1 上 $\sigma_0 = \pm 0.049$ $VL_1 = 4.5\sigma_0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{\sigma}_0$	μ_x	迭代次数
ε_i	-0.250	-0.035	-0.017	0.035	-0.070	0.035	-0.035	0.070	0.035	-0.035			
L_2	0.045	-0.065	-0.015	-0.028	0.092	-0.012	0.049	-0.067	-0.038	0.039	0.066	0.120	
	0.108	-0.078	-0.018	-0.034	0.106	-0.014	0.059	-0.081	-0.045	0.092			
L_1	0.031	-0.065	-0.006	-0.017	0.105	-0.002	0.055	-0.066	-0.041	0.033	0.064	0.131	4
L_0	0.021	-0.068	-0.004	-0.009	0.115	0.009	0.066	-0.057	-0.038	0.027	0.061	0.138	5
L_D	0.045	-0.065	-0.015	-0.028	0.092	-0.012	0.049	-0.067	-0.038	0.039	0.066	0.120	不迭代
	0.045	-0.065	-0.015	-0.028	0.092	-0.012	0.049	-0.067	-0.038	0.039	0.066	0.120	不迭代
	0.258	0.016	-0.010	-0.056	0.063	-0.025	0.058	-0.044	-0.020	0.018	0.048	0.021	6
L_{PVS}	0.207	-0.004	-0.011	-0.049	0.070	-0.022	0.055	-0.049	-0.024	0.023	0.053	0.022	7
L_{OH}	0.045	-0.065	-0.015	-0.028	0.092	-0.012	0.049	-0.067	-0.038	0.039	0.066	0.120	不迭代

(ii) 不含粗差观测值的权, 在迭代中止时应等于该组观测值的权 (验前给定或由验后方差估计求得)。当仅含一组观测值时, 其权应为 1。对于不含粗差之系统, 平差应回到通常的最小二乘法平差。

(iii) 迭代过程应能收敛, 且有较快的收敛速度。

为了检核第一个条件, 图1.1和1.2分别对粗差为 $35\sigma_0$ 和 $4.5\sigma_0$ 绘出含粗差观测值的多余分量在迭代过程中的变化情况 (其它两例亦同), 从中明显看出:

——当权函数简单地取为改正数 V_i 的函数 (L_{D1} , L_{D0} 和 L_{D1}) 时, 它只能对落在内部可靠性好的观测值上之粗差进行定位。当粗差落在内部可靠性差的观测值上时, 其多余观测分量反而递减, 因而平差结果比一般最小二乘平差结果更差。其原因在于简单的残差并不总能反映粗差的大小。

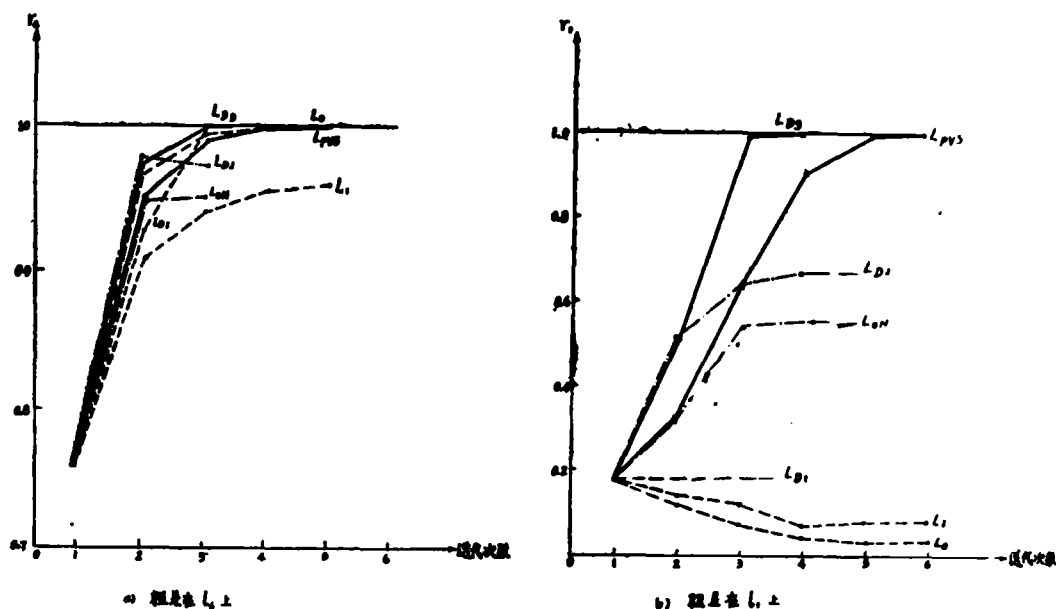


图1.1 含粗差观测值的多余观测分量在迭代过程中的变化 (粗差约为 $35\sigma_0$)

——当权函数取为标准化残差的函数 (L_{D2} 和 L_{D0H}) 时, 含粗差观测值的多余分量或递增, 或振荡或保持不变, 但永远不能趋近于 1, 因此也是不可取的。

——只有当权函数取为观测值验后方差的函数时 (L_{PVS} 和 L_{D3}), 含粗差观测值的权才能在迭代过程中不断递增。其中 L_{D3} 总能达到 1, 而采用 L_{PVS} 法时, 当粗差不大时, 它将根据最小二乘原理, 以相应小的权参加平差, 所以也是合理的。

应当指出, Werner /18/ 采用的权函数也是验后方差的函数。这是因为其最本质的权 P_i (见 (8) 式) 取决于

$$\alpha \cdot |V_i| = \frac{|V_i| \sqrt{P_i^0}}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{r_i} \cdot K} \quad (16'')$$

它与 (16') 式是一致的。

如果将 Kubik 的权函数 (6) 式中, P_0 理解为先验权, $m_0 = \hat{\sigma}_0 \sqrt{r_i}$ (因为原文交待不详), 则它也属于同一类权函数。

为了检验第二个条件, 取不含粗差的观测值进行试验。结果表明, 凡进行统计检验的方法均回到一般的最小二乘平差。只有不作统计检验之 L_1 和 L_0 导致比 L_2 稍差的结果, 可见统计检验和判断是必要的。

至于收敛性, 从表 6、表 7 看出, 采用指数函数时收敛较快。不收敛的情况发生在 L_{D2} 和 L_{OH} 中, 因为它们可能导致周期性振荡 (见图 1.2)。

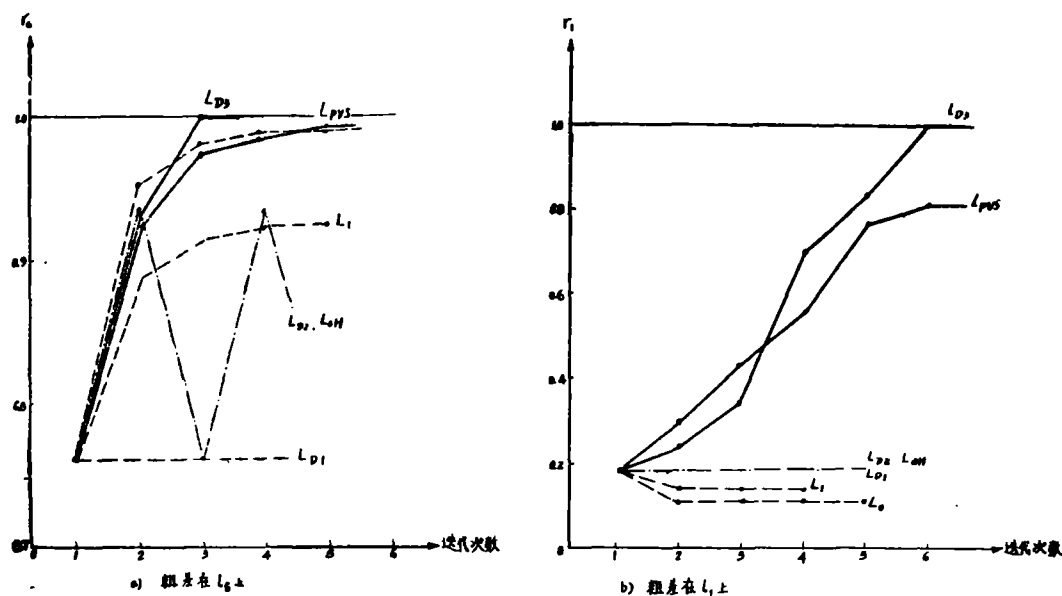


图 1.2 含粗差观测值的多余观测分量在迭代过程中的变化 (粗差约为 $4.5\sigma_0$)

为了加快收敛和处理较大的粗差 (如 $10000\sigma_0$), 可同时引入一个大的临界限值 $F_{\alpha, \max}$, 若 $T_1 > F_{\alpha, \max}$, 则直接置该观测值的权为 10^{-20} 或 0。试验表明是有效的。

综上所述, 选择权迭代法的权函数应为观测值验后方差的函数。本文提出的 L_{PVS} 和将它引入丹麦法之 L_{D3} 是可推荐的。

3 统计检验量的选择

对于选择权迭代法, 如上所述, 进行统计检验是必要的。在表 5 中有三种不同形式的检验量:

$$(i) \text{ 简单残差检验量 } T_1 = \frac{|V_i|}{\hat{\sigma}_0} \quad (26)$$

$$(ii) \text{ t- (或 } \tau \text{ -) 检验量 } T_2 = w_i = \frac{|V_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}^{-1}}} \quad (27)$$

$$(iii) F \text{ 检验量}^* \quad T_3 = T_{i, i}^{\frac{1}{2}} = \frac{|V_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{r_i}} \quad (28)$$

$$\text{或} \quad T_3 = T_{i, i}^{\frac{1}{2}} = \frac{|V_{i, i}| \sqrt{P_i}}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{r_{i, i}}} \quad (28')$$

为了正确地进行粗差定位,统计检验量应当满足的条件是:含粗差观测值之相应统计检验量在迭代过程中应逐步增大,迭代中止时它应能反映实际粗差的大小。

为此,图 2.1 和 2.2 绘出含粗差观测值之相应统计量在迭代过程中的变化。从中看出,简单检验量 T_1 只对内部可靠性好的观测值粗差有效, t 检验量 T_2 在迭代过程中或保持常数或周期振荡,只有 F 检验量能在任何情况下指出和反映粗差的大小。其中 L_{pv} 法的方差检验更能反映粗差的大小。

与统计检验有关的一个问题是检验时临界限值的确定。在未知单位权方差时只能采用统计方差。此时有两种不同的处理方法(见表 5),即固定限值和可变限值法。固定限值法为了顾及开始迭代时粗差对单位权方差估值的影响,一般规定 $K = 2$ (或 2.5),相当于 $\alpha = 5\%$ (或 1%)。尽管如此,固定限值仍可能在开始迭代时漏去粗差,而且对于最终决断,此限值又偏小。因此作者在 L_{pvs} 和 L_{D3} 中采用可变限值法。在前三次迭代中取 $K = 1$ 以防漏去粗差,而从第 4 次起则取 $K = 3.29$ ($\alpha = 0.1\%$),以避免将非粗差当作粗差。本质上讲,它应取决于 $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = Q^*$ 的值,(9) 式中的限值便是如此处理的。

试验表明,变动限值法较好。

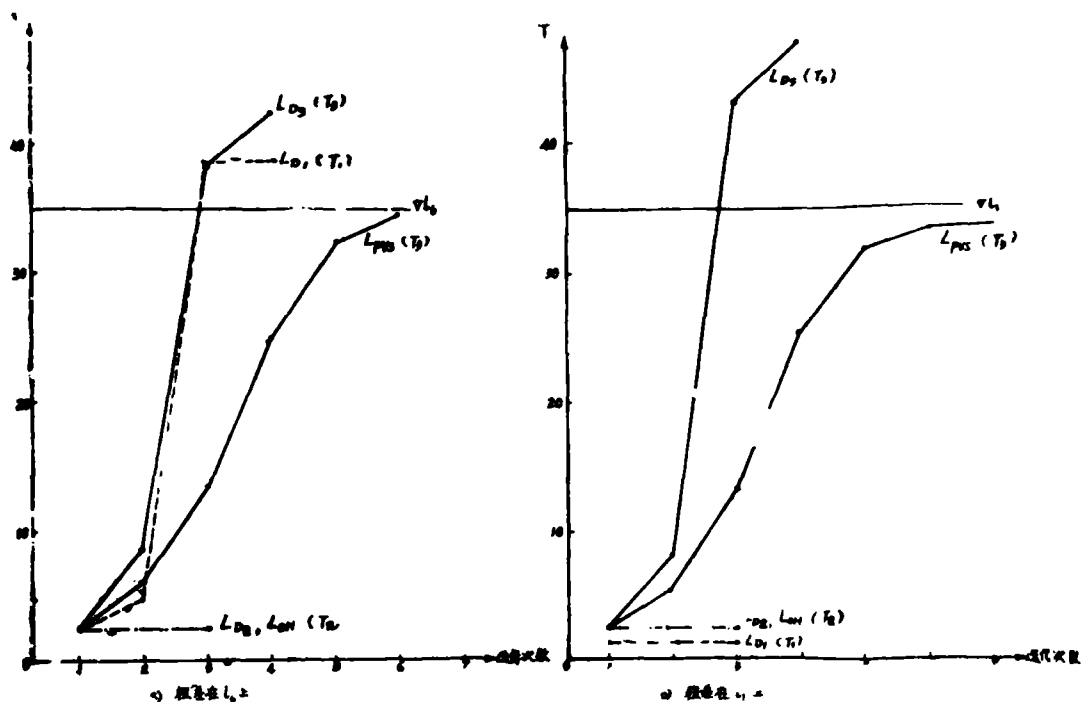


图2.1 含粗差观测值之相应统计检验量在迭代过程中的变化(粗差约为 $35\sigma_0$)

* 为便于对比,此处取其开方根值。

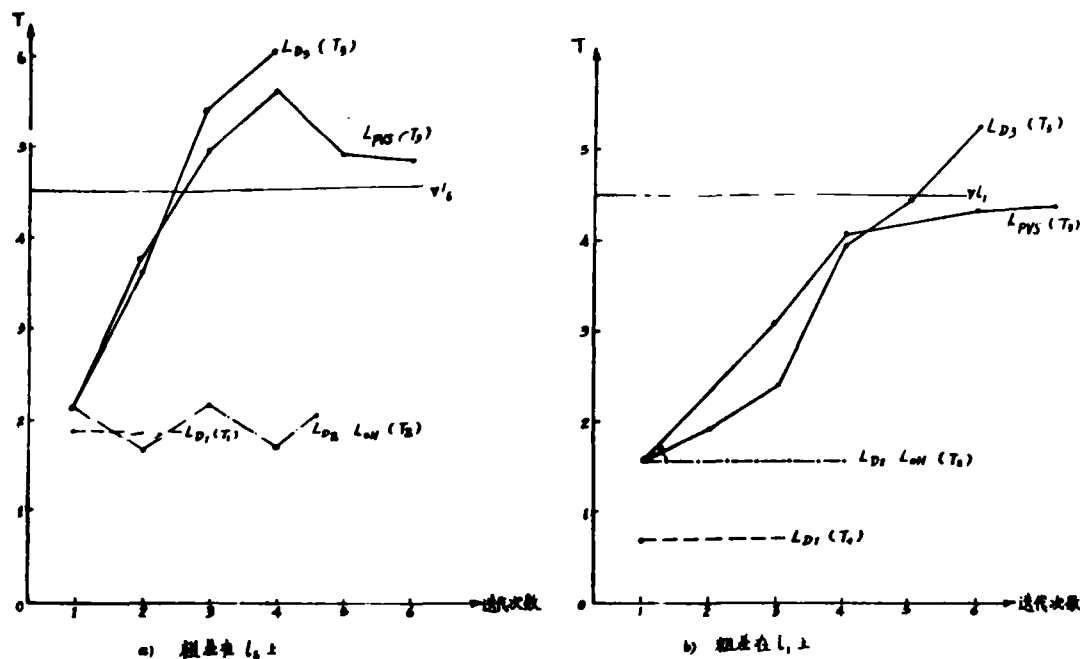


图2.2 含粗差观测值之相应统计检验量在迭代过程中的变化 (粗差约为 $4.5\sigma_0$)

关于多个粗差的定位问题, 由于涉及多个粗差的定位性或可区分性, 拟另文讨论。

五、小 结

1、观测值中含有的粗差可以看作取自期望为零、方差很大之正态母体的子样, 通过验后方差估计和方差检验可以在迭代过程中将它找出。若给予它一个相应小的验后权则可逐步实现粗差定位和改正。这是从最小二乘法意义上理解的选择权迭代法。并且可将此法理解为Baarda的数据探测法的引伸和发展。

2、通过本文所作的不同选择权迭代法的对比试验表明, 按照验后方差估计原理导出的权函数应作为选择权迭代法的权函数的基本成分。若采用指数函数可加快收敛速度。

3、观测值的验后方差与其应有值 (验前值或该组观测值的验后方差) 求得之方差比应作为选择权迭代法进行粗差定位时的统计检验量。

参 考 文 献

- /1/ Ackermann, F.; The Concept of Reliability in Aerial Triangulation, Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria, Cooperativa libraria universitaria del Polytecnico, Milano, Dicembre 1979, N. 1
- /2/ Ackermann, F.; Zuverlässigkeit photogrammetrischer Blöcke, ZfV, Heft 8, 1981
- /3/ Amer, F.; Theoretical Reliability Studies for some elementary Photogrammetric Procedures, ITC, Enschede, Netherlands

- / 4 / Baarda, W.: Statistical Concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Comm. New Series, Vol. 2, No4, Delft 1967
- / 5 / Baarda, W.: A Test Procedure for use in Geodetic Networks, Neth. Geod. Comm. Vol. 2, No5, 1968
- / 6 / Baarda, W.: Reliability and Precision of Networks, Pres, Paper to VIIth Int. Course for Eng. Surveys of High Precision, Darmstadt, 1976
- / 7 / Barrodal, I.: L1 Approximation and the Analysis of Data, Appl, Statist, 17(1968), PP 51-57
- / 8 / Förstner, W.: Die Suche nach groben Fehlern in photogrammetrischen Blöcken, DGK, C 240, München 1978
- / 9 / Förstner, W.: On Internal and External Reliability of Photogrammetric Coordinates, ASP-ASCM Convention, Washington 1979
- /10/ Förstner, W.: The Theoretical Reliability of Photogrammetric Coordinates, ISP Congress, Hamburg 1980
- /11/ Förstner, W.: Konvergenzbeschleunigung bei der a posteriori Varianzschätzung, ZfV, 104, Heft 4, 1979
- /12/ Grün, A.: Gross Error Detection in Bundle Adjustment, Paper presented to the Symposium on Aerial Triangulation, Brisbane, Sept. 1979
- /13/ Grün, A.: Internal Reliability Models for Aerial Bundle Systems, ISP Congress, Hamburg 1980
- /14/ El-Hakim, S.F.: Data Snooping with weighted Observations, Symposium of ISP Comm. III, Helsinki 1982
- /15/ Krarup, T.; Juhl, J.; Kubik, K.: Cötterdämmerung over Least Squares, ISP Congress, Comm III, Hamburg 1980
- /16/ Kubik, K.: An Error Theory for the Danish Method, Symposium of ISP Comm. III, Helsinki, 1982
- /17/ Li Deren: Ein Verfahren zur Aufdeckung grober Fehler mit Hilfe der a posteriori-Varianzschätzung, BuL Heft 5, 1983
- /18/ Werner, H.: Robuste Schätzer zur automatischen Suche grober Fehler bei der Lageblockausgleichung mit unabhängigen Modellen, Diplomarbeit, Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1983
- /19/ 王任亨: 粗差检测和粗差定位, 1982

Gross Error Location by means of the Iteration

Method with variable Weights

Li Deren

Abstract

The iteration method with variable weights would be an effective method for the location of gross errors in the adjustment. After a general view of several different and available weight functions of this method a new weight function and a corresponding test quantity are developed based on the a posteriori variance estimation of the least squares. The advantages of the suggested method are justified through a comparative investigation of the different weight functions. The introduction of this weight function into danish method can also produce a good result.