

控制网及部分控制网的图形一致性与仿射性

W·M·威尔施* 张 琰

摘要

研究用测量控制网进行监视的不同复杂程度的地壳或其他对象的运动模型这项科学任务，不能按呆板的程式而只能针对各个具体情况来完成。为了抓住各种各样可能出现的现象，如同其他科学领域一样，分析人员的手段必须是灵活多样的。

本文在于阐述从几何与统计的角度研究控制网图形一致性与仿射性的一般方法。文中所介绍的方法非常适用于在计算机图象荧光屏上人机对话式地工作。除了单个点的变形分析外，还可对有限单元、部分网、跨断层的过渡区或整个网进行研究。比较网的多种不同形式的设计是不受限制的。不论是均匀变形还是非连续变形均可处理，并给予定性与定量的描述。文中特别注意到几何上的严密性。

1. 引言

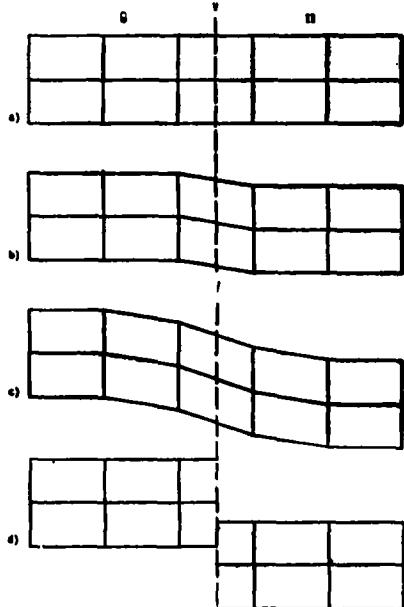
平面与高程控制网是检查几何物体平面、高程与形状变化的一个重要手段。人们往往放弃测定物体相对于可视为不变的参考系统的位置变化，而满足于考察代表物体的一组点之间的相对位置的变化。因此求绝对位移的任务也就转化为求相对位移，更恰当地说就是求形状的变化。

在研究当前地壳运动的领域里，地壳的一部分被视为可变形的，这种变形可以是连续的或非连续的。为了求得这个变形可将所研究的这部分地壳用若干个点来表示，其相对位置通过测量加以确定。这些点的总体就表现为一个测量控制网。网形的变化正是由于地壳的变形而引起的；它可作为其他学科的科学工作者进一步研究的重要信息来源。

为了直观起见，在图1中带有模型性质地描述了沿着断层的两个地质构造板块的反向运动。

图1 沿着断层作反向板块运动的应变累积

本文1983年7月13日收到。*西德慕尼黑联邦国防军大学教授。



用格网表示的控制网横跨断层V，将两个板块I与II连系在一起。图1a表示初始状态。在两个板块作均匀而方向相反的运动时，如果由于摩擦与块状结构使得这两个板块尚未出现保持形状不变的相对滑动的话，则首先是直接跨在断层上的那一部分控制网发生均匀的仿射变形（图1b）。在持续不断的运动与错位不断增大的情况下，相衔接的控制网部分也逐渐地出现变形（图1c），直到最后所积累的应力通过一次地震被释放为止。这时可以看出断层两边的控制网部分作互相平行的移动而其本身不再发生形状变化（图1d）。

显然，这个例子是一个非常简单的模型。尽管如此，借助于这个模型仍然可以使得用应变分析来描述控制网几何图形扭曲时所出现的多数问题变得直观一些：如图形一致性检验，仿射变形和相对刚体运动；此外尚须考虑一些附带的问题，如互相关联的单个点的运动，或测量上有关可估量和基准变换的不变性的典型问题。

2. 控制网比较的依据

众所周知，控制网变形状态的分析是以比较不同时间的观测结果为依据的。由于观测资料中一般都含有多余观测，因此须要进行加工，从而求得平差后的观测值。但是人们通常不是直接对观测值进行平差，而是选择计算技术上有利并且直观的途径，即对控制点的坐标进行平差，其中这些控制点之间已作过观测。然而，上述两种方法的本质区别却不可忽视：平差后的观测值只是相对量（一般测量观测值总是只能使两个或两个以上的控制点之间产生联系），而平差后的坐标则是绝对值（一个点本身的坐标是可以单独存在的）。不过这种绝对性只是表面的，因为它是通过某种随意的措施（如通过坐标系统与测量基准的规定）而得到的。这种在坐标中含有的随意性必须引起我们的注意。

2.1 x—方法

以下假定，首次观测与重复观测的两个周期可比较的控制点有n个，其坐标向量 x_1 和 x_2 ，按最小二乘法算得的协因数矩阵 Q_{x_1} 和 Q_{x_2} ，单位权中误差 s_1 和 s_2 以及多余观测数 f_1 和 f_2 均已存在。控制点可作比较的条件在于，按控制点的个数与点位所确定的网形是一致的。（观测值的类型，数量和精度则不一定是一致的），而且测量基准问题的处理也应是一致的。设 A_1 与 A_2 表示两期比较网的设计矩阵，则上述条件可以详细表示为（S{.}列空间）

$$\begin{aligned} S\{A_1^T\} &= S\{A_2^T\} = S\{A^T\} \\ S\{Q_{x_1}\} &= S\{Q_{x_2}\} = S\{Q_x\} \\ x_1 \in S\{Q_{x_1}\}, x_2 \in S\{Q_{x_2}\} &\Rightarrow x_1, x_2 \in S\{Q_x\} \end{aligned} \quad (1)$$

这里的出发点是，基于测量一几何上可以给予解释， Q_{x_1} 和 Q_{x_2} 应为设计矩阵 $A_1^TA_1$ 和 $A_2^TA_2$ 的广义最小二乘反射逆。对于正则矩阵的逆和迹最小或部分迹最小的逆均如此。

如果控制网中包含有不可比较的控制点，则须通过约化（对此现有各种不同的约化方法可供使用（BAHR, 1978）），或通过相应的基准配置来消除其影响。

当人们对两期控制网进行比较时，如前所述，可按两期平差后的坐标或平差后的观测值建立关系式。这里先组成坐标差

$$u = x_2 - x_1 = |-II| \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

在各期观测互相独立的情况下，其协因数矩阵为

$$Q_u = | -I \ I | \begin{vmatrix} Q_{x_1} & O \\ O & Q_{x_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -I \\ I \end{vmatrix} = Q_{x_1} + Q_{x_2} \quad (3)$$

顾及(1)式有

$$u \in \{Q_u\} \quad (4)$$

若 $E\{s_1\} = E\{s_2\}$ ，则由

$$s^2 = (s_1^2 f_1 + s_2^2) / f \quad (5)$$

可求出单位权方差，其中 $f = f_1 + f_2$ 。

因此，协方差矩阵为

$$C_u = s^2 Q_u \quad (6)$$

u 、 Q_u 和 s^2 即为按坐标法(x一方法)进行控制网比较的主要元素。

2.2 1—方法

根据平差后的观测值 l 进行控制网比较的前提条件在于，由平差后的坐标计算出与基准配置无关的函数；尤其是观测值本身就属于这样的函数，但也还有其他等价量，如任意的角度、距离或距离之比。设这些“观测值”的全体为

$$l_1 = Lx_1 \quad (7)$$

$$l_2 = Lx_2 \quad (8)$$

其变化量等于

$$dl = L(x_2 - x_1) = Lu \quad (9)$$

协因数矩阵为

$$Q_{d,l} = LQ_uL^T \quad (10)$$

协方差矩阵为

$$C_{d,l} = s^2 Q_{d,l} \quad (11)$$

为了对两期控制网进行比较，至少需要这样多的函数关系上互相独立的元素 l_i 和 dl_i ，即由这些元素可以将控制网的几何图形唯一地确定下来；这就意味着

$$S\{L^T\} = S\{A^T\} \quad (12)$$

dl 、 $Q_{d,l}$ 和 s^2 即为“平差后观测值”类型(1—方法)的主要元素，对于控制网的比较来说，它和按x一方法所用的元素是等价的。

3. 比较网的图形一致性

如果在一向相同的网形中，坐标差 u 可以仅仅通过单位权标准偏差 s 所代表的观测结果的离散性来解释的话，则可认为两期比较网的图形是一致的。

3.1 按x一方法图形一致性的检验

图形一致性的检验可以通过方差检验来实现。为了进行方差检验，必须由坐标差 u 组成方差($r\{.\}$ 秩)

$$s_u^2 = q_u/f_u \quad (13)$$

其中

$$q_u = u^T Q_u^- u \quad (14)$$

$$f_u = 2 \cdot u - d = r\{Q_u\} = r \quad (15)$$

此处 d 称为函数模型的基准秩亏。在满足条件(4)的情况下，二次型(14)是与逆 Q_u^- 的类型无关的。

如果坐标差仅仅是由于观测结果的离散性引起的话，则可提出如下零假设($E\{\cdot\}$ 期望值)

$$H_0 : E\{x_1\} = E\{x_2\} \quad (16)$$

或

$$E\{u\} = 0$$

因而还有

$$E\{s_u^2\} = E\{s^2\} \quad (17)$$

由于 s_u^2 和 s^2 统计上互相独立，且在零假设成立的情况下遵从中心 χ^2 分布

$$\begin{aligned} f_u s_u^2 / \delta^2 &\sim \chi^2(f_u) \\ fs^2 / \delta^2 &\sim \chi^2(f) \end{aligned} \quad (18)$$

因此，对于商 T_u^2 分布公式($F\{\cdot\}$ Fisher 分布)

$$H_0 : T_u^2 = \frac{s_u^2}{s^2} \leq F(f_u, f, \alpha) \quad (19)$$

是适用的。

由此可建立一个检验统计量，当它满足不等式时就表明在显著水平 α 下没有理由拒绝零假设。

如前所述，坐标差向量 u 和坐标系统以及测量基准有关。坐标系统的变化将影响到坐标差，但不影响点的(可看见的)线位移，而测量基准的变化还影响到点的(可看见的)位移，但不影响相对关系或相对位移的信息内容。这个结论可以通过证明二次型相对于参考系统的变化保持不变给予证实。

设 u_1 为相应于某一特殊测量基准的坐标差向量， Q_{u1} 为相应的协因数矩阵。通过相似变换(S—变换)则可给出所有解的全体

$$u = u_1 + H \cdot p, \quad Q_u \quad (20)$$

H 包含相似变换的系数， p 表示相似变换的参数，即

$$H = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 & 0 \\ -x_1 & y & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$p^T = \begin{vmatrix} \omega & m & t_x & t_y \end{vmatrix}$$

由解的全体(20)可以选出另一个特解，例如

$$u_2 = u_1 + Hp \quad (21)$$

为了将 u_2 唯一地确定下来，就必须提出某种条件，如

$$B^T u_2 - b = 0 \quad (22)$$

将(21)式代入(22)式，可得

$$B^T u_1 + B^T H p - b = 0 \quad (23)$$

因此， p 是这样一个变换向量，它在条件(22)之下通过相似变换将 u_1 变换到 u_2 。这里 $B^T H$ 必须是正则的，即在 B^T 里不能包含有 u 的可估函数 dl (比较(9)式)，对此有 $LH = 0$ 。因

此只须考虑其他有关的条件，如参考系统的配置。于是有

$$p = (B^T H)^{-1} (b - B^T u_1) \quad (24)$$

和

$$u_2 = u_1 + H(B^T H)^{-1} (b - B^T u_1) \quad (25)$$

由于 b 为确定性的配置，它不影响随机性，因此 u_2 的协因素矩阵为

$$Q_{u_2} = (I - H(B^T H)^{-1} B^T) Q_{u_1} (I - H(B^T H)^{-1} B^T)^T \quad (26)$$

实用上一般选取

$$b = 0 \quad (27)$$

B 的一种表达式

$$B = I_s H \quad (28)$$

(I_s 为选择单位矩阵，其中包括任意选择的若干个但至少为 d 个 1 的对角线元素) 一方面可以保证作保持网形不变的相似变换，另一方面又使得测量基准的配置十分灵活，这是因为通过 I_s 中占有元素的选择可将任意一个解转换成任意一个别的解。按照矩阵 I_s 中元素的数目与排列即可将控制网无缝隙地拟合到一个唯一确定的测量基准上，或以间隙平方和为最小的方式拟合到一个超定的测量基准上。在 I_s 为部分占据时对于 Q_{u_2} 就意味着部分迹最小，而在完全占据的矩阵 $I_s = I$ 的情况下则表示 Moore—Penrose 逆的“内部解”。

由 (27) 式和 (28) 式最后可将参考系统的变换公式写为

$$p = -(H^T I_s H)^{-1} H^T I_s u_1 \quad (29)$$

$$u_2 = D_2 u_1 \quad (30)$$

$$Q_{u_2} = D_2 Q_{u_1} D_2^T \quad (31)$$

其中

$$D_2 = I - H(H^T I_s H)^{-1} H^T I_s \quad (32)$$

对于特殊的目的，甚至可以将矩阵 H 修改 (PRESCOTT, 1981)。

现在设

$$q_{u_1} = u_1^T Q_{u_1}^- u_1 \quad (33)$$

为相应于参考系统作某一种特殊配置的坐标差 u_1 的二次型。借助于关系式 (30) 和 (31) 可以求得相应于另一个解 u_2 的二次型 q_{u_2} :

$$\begin{aligned} q_{u_2} &= u_2^T Q_{u_2}^- u_2 = u_1^T D_2^T (D_2 Q_{u_1}^- D_2^T)^{-1} D_2 u_1 \\ &= u_1^T Q_{u_1}^- u_1 = q_{u_1} = q_u \end{aligned} \quad (34)$$

因为 $D_2^T (D_2 Q_{u_1}^- D_2^T)^{-1} D_2$ 由于 $r\{Q_{u_2}\} = r\{Q_{u_1}\}$ 的缘故而成为 Q_{u_1} 的一个 g 逆 (RAO 和 MITRA, 1971, 第22页)。

因此这就证明了，参考系统的配置，或换个方式表达，即刚体运动是不会影响到两个比较网图形一致性的检验的。

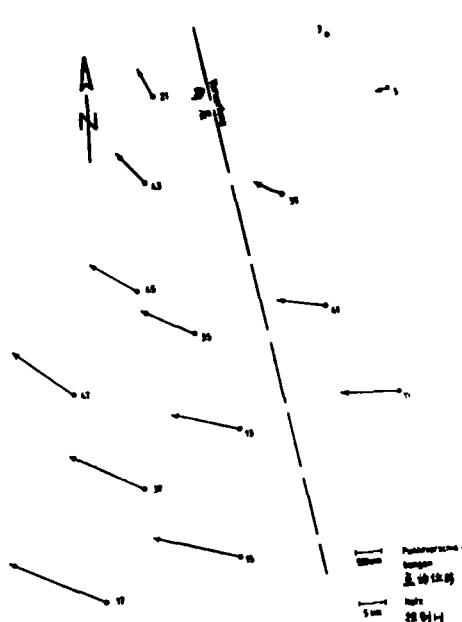


图2a: S变换的依据: 第3点(x_3, y_3)和第11点(x_{11})

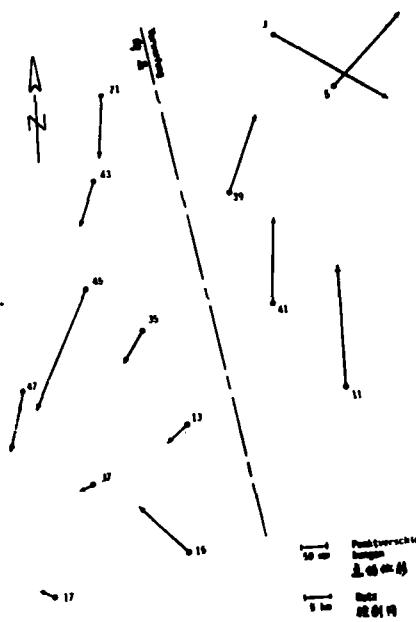


图2b: S变换的依据: 全部控制点

图2 变形场的与基准有关但等价的描述: $q_{v1} = q_{v2}$

3.2 按l—方法图形一致性的检验

如果人们想用l—方法进行网的比较，则可摆脱x—方法中参考系统随意选择的麻烦，因为量 dl (9) 和 Q_{41} (10) 是与基准无关的。

这类函数一般为距离与角度 (WELSCH, 1982)。首先设 p_i 与 p_j 点之间的距离为 s

$$s = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (35)$$

其变形量为 $dl = ds$

$$ds = s_2 - s_1 \quad (36)$$

于是 (9) 式中的函数矩阵 L 包含微商 $\frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial y_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2}, \frac{\partial s}{\partial y_2}$

$$L_{d1} = [-\cos t_{11}, -\sin t_{11}, \cos t_{11}, \sin t_{11}] \quad (37)$$

其中 t_{ij} 为 p_i 点至 p_j 点这条边的方向角。对于公式推导，可将由于网的变形而引起的方向角的变化略去不计。

边的线伸长可以定义为

$$e = \frac{s_2 - s_1}{s_1} = \frac{s_2}{s_1} - 1 \quad (38)$$

令 $dl = e$ ，则 $L = L_e$

$$L_e = \frac{1}{s} L_{d1} \quad (39)$$

若函数为 p_1 点至 p_j 与 p_k 点之间的角度 α

$$\alpha = t_{ik} - t_{ij} = \arctan \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} - \arctan \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad (40)$$

角度变形为 $dl = g = \alpha_2 - \alpha_1$, 则 $L = L_g$ 也类似地含有导数 $\frac{\partial x}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial y_k}$

$$L_g = \begin{vmatrix} -\frac{\sin t_{ij}}{s_{ij}} + \frac{\sin t_{ik}}{s_{ik}} & \frac{\cos t_{ij}}{s_{ij}} - \frac{\cos t_{ik}}{s_{ik}} \\ \frac{\sin t_{ij}}{s_{ij}} & -\frac{\cos t_{ij}}{s_{ij}} - \frac{\sin t_{ik}}{s_{ik}} & \frac{\cos t_{ik}}{s_{ik}} \end{vmatrix} \quad (41)$$

作为检验统计量基础的与 (14) 式相应的二次型为

$$q_{dl} = dl^T Q_{dl}^{-1} dl \quad (42)$$

这是与基准无关的, 而且在满足条件 (12) 的前提下, 由于

$$\begin{aligned} q_{dl} &= dl^T Q_{dl}^{-1} dl = u^T L^T (LQ_u L^T)^{-1} Lu \\ &= u^T Q_u^{-1} u = q_u \end{aligned}$$

因而等于 q_u 。这是因为由 (12) 式可得

$$r\{Q_{dl}\} = r\{Q_u\} \quad (43)$$

它是定理 $L^T (LQ_u L^T)^{-1}$ 为 Q_u 的一个 g 逆的前提条件。

如果图形一致性的零假设被拒绝, 就必须找出它的原因, 这种原因可能在于整个网的均匀变形、部分网的变形或者还包括互不关联的单个点的运动。

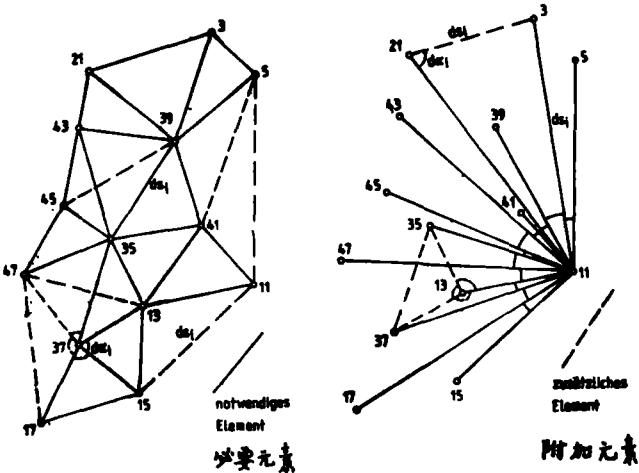


图 3 根据与基准无关的元素的变形 (l -方法) 研究控制网几何图形的与基准无关且等价的安排

4. 比较控制网的仿射性

如果在一向相同的网形中, 坐标差除了由于观测值的离散性引起的偶然偏差外, 还可用控制网图形的仿射变形来解释的话, 则称这两个比较网具有仿射关系。

4.1 按x—方法仿射性的研究

在这些研究中一般总是限定于比较网的坐标之间存在线性关系，因此有如下关系（WELSCH, 1981）

$$x_2 = Fx_1 + t \quad (44)$$

如果人们按（2）式坐标差 u 进行分析，则有

$$u = (F - I)x_1 + t = dFx_1 + t \quad (45)$$

t 包括平移参数

$$t^T = | t_x \ t_y | \quad (46)$$

dF 称为变形梯度。在变形很小的情况下，即各个变形量的乘积与平方可以略去不计，则 F 作为二级张量可以分解成正交旋转矩阵 $R = I + dR$ 和对称变形矩阵 E （又称应变张量）的和。于是有

$$u = (dR + E)x_1 + t \quad (47)$$

以及

$$dR = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{vmatrix} \quad (48)$$

式中 ω 为旋转角，且 $e_{xy} = e_{yx}$ 。（40）式的明晰的表达式为

$$\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} + \omega \\ e_{yx} - \omega & e_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_x \\ t_y \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{aligned} u_x &= e_{xx} \cdot x_1 + e_{xy} \cdot y_1 + \omega \cdot y_1 + t_x \\ t_y &= e_{yx} \cdot x_1 + e_{yy} \cdot y_1 - \omega \cdot x_1 + t_y \end{aligned} \quad (49)$$

或

$$u = H_1 \cdot p_1 \quad (49a)$$

其中

$$H_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & y_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & -x_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (49b)$$

$$p_1^T = | e_{xx} \ e_{xy} \ e_{yy} \ \omega \ t_x \ t_y | \quad (49c)$$

当存在 3 个以上 ($n > 3$) 的比较点时，则 $n_p = 6$ 个变形参数 p_1 可由平差计算求得，因此有

$$u + v_u = H_1 \cdot p_1, \quad p_u \quad (50)$$

其中

$$p_u = Q_u^+ \quad (51)$$

参数 p_1 的协方差矩阵为

$$C_{p_1} = s^2 (H_1^T p_u H_1)^+ = s^2 \cdot Q_{p_1} \quad (52)$$

参数 p_1 可以作这样解释，即旋转角 ω 和平移 t_x 与 t_y 表示待考察控制网的刚体运动，而应变参数

$$e_x^T = | e_{xx} \ e_{xy} \ e_{yy} | \quad (53)$$

则表示控制网本身的变形。值得注意的是，所有这些量都与参考系统的选则有关，因此还不

能够唯一地描述所出现的变形。在介绍并研究这种唯一的参量之前，还应当对变型模型作统计上的显著性检验。与(13) — (19)式相类似，可利用(43)式求得的剩余间隙 U_u 进行方差检验。由剩余间隙可以组成方差

$$s_p^2 = q_{v_u}/f_p = \frac{v_u^T p_u v_u}{f_p} \quad (54)$$

其中

$$f_p = f_u - R\{Q_{p1}\} \quad (55)$$

并相对于方差 s^2 进行检验。

若检验统计量

$$T_p^2 = \frac{s_p^2}{s^2} \quad (56)$$

没有超过 Fisher 分布的分位值

$$T_p^2 \leq F(f_p, f, \alpha) \quad (57)$$

就不能拒绝零假设

$$H_0 : E\{u - H_1 p_1\} = 0 \quad (58)$$

如果原先为显著性的检验统计量 T_u^2 ，通过按(50)式引入变形模型后减小到新的检验统计量 T_p^2 不再是显著的话，则可认为这个变形模型是合适的，否则就认为是不合适的。

为同二次型(14)一样，二次型 q_{v_u} 也是与刚体运动(旋转 dR 与平移 t)无关的。

这里所介绍的研究比较网仿射关系的方法是以坐标差 u 为依据的，因此它又涉及到坐标法(x—方法)。

4.2 按 l —方法仿射性的研究

如同图形一致性研究一样，在应变分析时也可以应用与基准无关的坐标函数的变形量(9)式和(10)式(l —方法)。

为此可以应用线伸长 e (38)和角变形 g (40)同应变参数(53)之间的函数关系(WELSCH, 1981)。此函数关系式为

$$e = e_{xx} \cos^2 t_{1j} + e_{xy} \sin 2t_{1j} + e_{yy} \sin^2 t_{1j} \quad (59)$$

和

$$g = e_{xy} (\cos 2t_{1k} - \cos 2t_{1j}) + \frac{1}{2} (e_{yy} - e_{xx}) (\sin 2t_{1k} - \sin 2t_{1j}) \quad (60)$$

变形量 e 和 g 可统一用 dl 表示并视为“观测值” $dl + v_{dl}$ ，其权矩阵为 $p_{dl} = Q_{dl}^+$ ，因此应变张量 E 及其协方差矩阵 C_E 可通过平差计算求得。

利用二次型

$$q_{v_{dl}} = v_{dl}^T Q_{dl}^+ v_{dl} \quad (61)$$

即可按(54)式到(58)式对变形模型的零假设与显著性进行检验，因为按照第3节所提到的有关二次型不变性的考虑有 $q_{v_{dl}} = q_{v_u}$ 。

4.3 两种方法的等价性

根据关系式(49)和(9)进行比较可以看出，对于应变参数 e_x 而言上述两种方法给出完全相同的结果。现有

$$u = H_1 \cdot p_1 \quad (49a)$$

和

$$dl = Lu \quad (9)$$

将(49a)式代入(9)式可得

$$dl = LH_1 \cdot p_1 \quad (62)$$

利用 $L = \frac{1}{s} L_d$, 及(37)与(39)式, 通过简单的化算即可得到

$$\frac{1}{s} L_d \cdot H_1 = |\cos^2 t_{11} \quad \sin 2t_{11} \quad \sin^2 t_{11} \quad 0 \quad 0 \quad 0|$$

顾及 p_1 则可将(62)式右端直接转换成关系式(59):

$$dl = e = e_{xx} \cos^2 t_{11} + e_{xz} \sin 2t_{11} + e_{yy} \sin^2 t_{11} \quad (59)$$

对于角度变形也有类似的情况。

BRUNNER (1981) 曾经指出过这两种方法的等价性。

4.4 其他应变参数的推导

由应变张量的元素 e_{xx} 及其协方差矩阵 C_E 还可以导出其他应变参数

$$p_2^T = | r_1 \quad r_2 \quad \Delta | \quad (63)$$

即

$$\begin{aligned} r_1 &= e_{yy} - e_{xx} && \text{纯剪应变} \\ r_2 &= 2e_{xz}, && \text{“工程剪应变”} \\ \Delta &= e_{xx} + e_{yy}, && \text{伸长系数} \end{aligned} \quad (64)$$

利用

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \Delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{yy} \end{vmatrix} \quad (64a)$$

(63)式可概括为

$$p_2 = H_2 e_x \quad (64b)$$

其协方差矩阵为

$$C_{p_2} = s^2 Q_{p_2} = H_2 C_E H_2^T \quad (65)$$

在伸长系数 Δ 中必须确定, 它是否涉及到真正的伸长, 也就是区域的扩大或缩小, 或者它是否给出由于在控制网观测时比例尺不同而引起的这个参数值。在后一种情况下因子 Δ 可被解释为比例尺因子。

对于非线性关系

$$p_3^T = | r \quad e_1 \quad e_2 \quad \theta \quad \psi | \quad (66)$$

其中

$$r = (r_1^2 + r_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{总剪应变}$$

$$e_1 = \frac{1}{2} (\Delta + r) \quad \text{变形长半轴}$$

$$e_2 = -\frac{1}{2} (\Delta - r) \quad \text{变形短半轴} \quad (67)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan (-r_2/r_1) \quad e_1 \text{的方向角}$$

$$\psi = \theta + 45^\circ \quad \text{最大剪应变的方向角}$$

在线性化后可求得其协方差为:

$$C_{p_3} = s^2 Q_{p_3} = H_3 C_{p_2} H_3^T \quad (68)$$

其中

$$H_3 = \begin{vmatrix} r_1/r & r_2/r & 0 \\ r_1/2r & r_2/2r & \frac{1}{2} \\ -r_1/2r & -r_2/2r & \frac{1}{2} \\ r_2/2r^2 & -r_1/2r^2 & 0 \\ r_2/2r^2 & -r_1/2r^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (69)$$

应变参数 p_2 和 p_3 及其协方差矩阵 C_{p_2} 与 C_{p_3} 代表严格描述比较网之间的仿射关系所需要的所有量。根据地壳运动来解释, 这些量是用以分析无限小均匀应变的参数。特别有意义的是变形主轴参数 e_1 和 e_2 , 它与 θ 一起构成了应变椭圆的参数。

4.5 位移向量基准变换的影响

一个重要问题是, 所求的参数是否能唯一地描述仿射关系。同所选择的测量基准无关的参数才是唯一的。这里必须考虑下述情况:

按 (29) — (32) 式作 S 变换将使坐标位移 u 的参考系统, 同时也使向量 u 本身发生变化。为了研究它对变形参数 p_1 的影响, 我们先不考虑描述刚体运动的参数 ω 、 t_x 和 t_y , 因为这些参数显然是直接和间接地受到影响。有趣的是对于应变参数 e_x (53) 的影响。为此我们来考察关系式 (59) 与 (60)。

(59) 式可简写为

$$e = K_1 \cdot e_x \quad (59a)$$

由此可得 (对于一个三角形而言)

$$e_x = K_1^{-1} e \quad (70)$$

比较 (9) 式及 (37) — (39) 式, 有

$$e = L_* \cdot u \quad (71)$$

若将 u 变换到另一个基准系统, 则有

$$u_1 = u + H \cdot p \quad (21a)$$

e_x 将不受这个变换的影响, 如果在下式中

$$e_x = K_1^{-1} L_* (u + H \cdot p) = K_1^{-1} L_* u + K_1^{-1} L_* H \cdot p \quad (72)$$

$$\text{使得 } K_1^{-1} L_s H = 0 \quad (73)$$

作为与基准无关的不变量条件被满足的话。经过一些计算后可得

$$K_1^{-1} L_s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (74)$$

这就表明，法向应变参数 e_x 与 e_y 与比例尺因子的变化有关，而切向应变参数 e_{xy} 却无关，因而人们不想将这个影响作为伸长参数 Δ 来解释（比较（63）式）。这个结果通过考察（59）式即可明了。

为了研究根据（40）式与（41）式并顾及（60）式由角度变形所算得的参数，即 e_{xy} 和 $r_1 = e_{yy} - e_{xx}$ （比较（64）式），可类似得到：

$$g = K_2 \cdot \begin{vmatrix} e_{xy} \\ r_1 \end{vmatrix} \quad (59b)$$

$$\begin{vmatrix} e_{xy} \\ r_1 \end{vmatrix} = K_2^{-1} \cdot g \quad (70a)$$

$$g = L_g \cdot u$$

$$u_1 = u + H \cdot p \quad (21a)$$

$$\begin{vmatrix} e_{xy} \\ r_1 \end{vmatrix} = K_2^{-1} L_g (u + H \cdot p) = K_2^{-1} L_g u + K_2^{-1} L_g H \cdot p \quad (72a)$$

经过核算可得结果

$$K_2^{-1} L_g H = 0 \quad (73a)$$

这也可以直接由（74）式得出。因此纯剪应变 r_1 也与比例尺因子的变化无关。将此研究结果推广到（63）式与（66）式中的参数 p_2 与 p_3 ，则可作出如下综合的论断：

用以描述监测网仿射变形的全部参数（53）、（63）和（66），是与按（21）式进行坐标变化量 u 的基准变换无关的。由于不同的比较观测周期所用的测量工具尺度的不同而引起的比例尺变换，当然会影响到描述长度与面积变化的参数：即坐标系统方向上的法向应变参数 e_x 与 e_y ，变形主轴参数 e_1 与 e_2 以及伸长系数 Δ 。

5. 控制网中各个部分及单个点的研究

为了更清楚地了解控制网内出现的变形，作区域性的考察是十分有益的。为此人们将控制网分成若干个部分网，或者就分成一个个三角形，即所谓有限单元，以便对其变形状态作详细研究（图4）。所需要的计算方法基本上均已在前面提到了（WELSCH，1982，1983）。

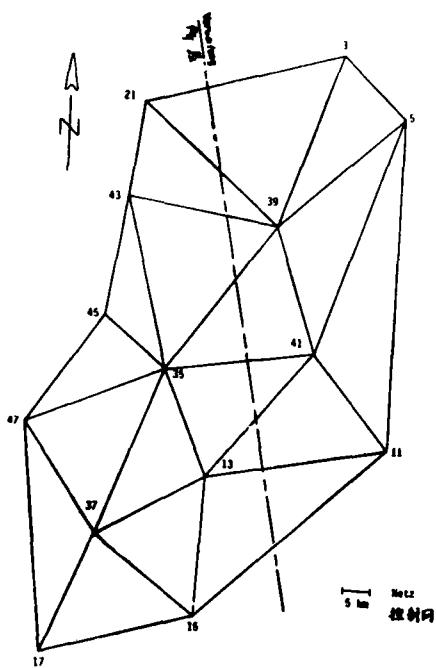


图 4 a 控制网划分成有限单元

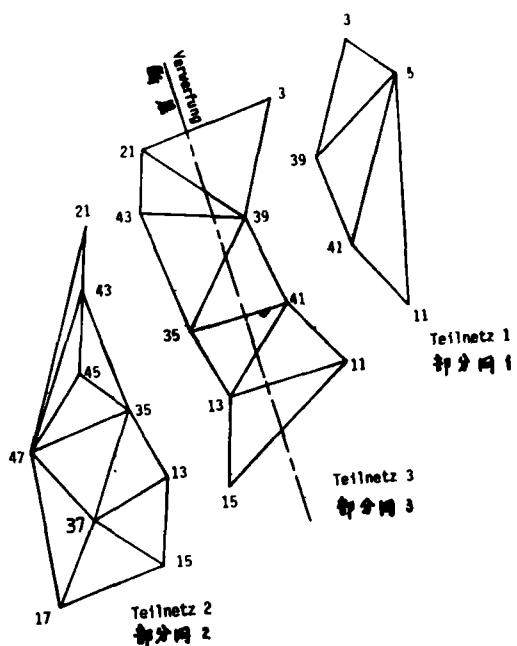


图 4 b 控制网划分成部分网

5.1 有限单元的研究

这项任务在于研究每一个三角形的变形。

如果人们首先应用 l 一方法，则可由一个三角形各边长的变形先对三角形变形的显著性进行检验（比较第4.2节），然后借助于（59）、（64）和（67）算出应变椭圆的元素 e_x 、 e_y 和 θ 。应变参数的显著性自然也就可以不再进行检验了。

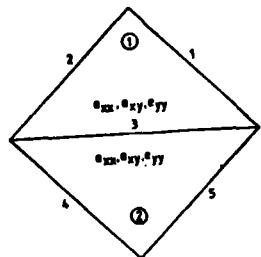
在由 n 个点构成的控制网中，可以算出 $f_u = 2n - d$ 个函数独立的边长变形，且由此顶多可以计算出同样多个互相独立的描述应变的元素。设控制网分解为 m 个三角形，则需要 $3 \cdot m$ 个应变椭圆元素，它总是大于 f_u 。因此用以描述所有各个三角形变形状态所需要的应变元素还须利用表示应变椭圆之间相互关系的条件方程式来解算。

在两个相邻三角形的情况下，公共边的变形影响着两个三角形的应变椭圆。

所要推导的条件方程式（“边条件方程式”）利用（59）式可得

$$\begin{aligned} e_{xx,2} \cos^2 t_{3,1} + e_{xy,1} \sin 2t_{3,1} + e_{yy,1} \sin^2 t_{3,1} - \\ - e_{xx,2} \cos^2 t_{3,1} - e_{xy,2} \sin 2t_{3,1} - e_{yy,2} \sin^2 t_{3,1} = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

应用方程式（75）作为附加条件方程式，即可由 5 个边长变形严密且唯一地算出两个三角形的 6 个应变参数。

图 5 按 l 一方法两个相邻三角形应变参数的关系

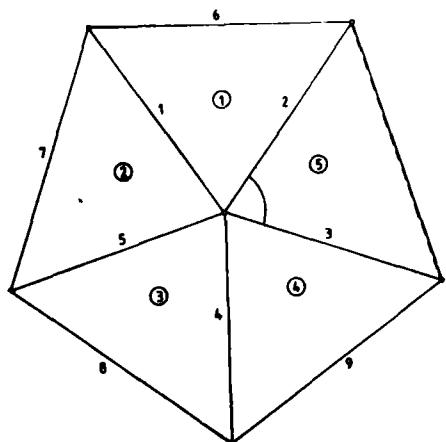


图 6 按 I 方法中点多边形中应变参数的关系

在中点多边形系统内的情况如下：

为了描述由6个点组成的中点多边形的几何形状，即其相互关系，在秩亏 $d = 3$ 时，9个（函数）独立的元素（边长或边长与角度）是必要而又充分的。但是为了描述5个三角形中每个三角形的变形却需要15个应变参数，其中9个可以直接由独立的距离或角度得到，5个由边条件方程式（75）给出；尚缺的最后一个条件可由水平闭合条件给出

$$g_5 + (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = 0$$

(76)

由(60)式可得其具体形式为

在同时应用距离时，参数 $(e_{yy..} - e_{xx..})$ 也可被拆开。

基于上述想法，对于图4a的划分法，为了算出所需要的17个应变椭圆及其51个元素的相关关系，除了原来25个“观测方程式”外还可对网内的每条边共列出21个边条件方程式(75)，对网内的中心点共列出5个水平闭合条件(77)。

整个观测方程式与条件方程式系统是相容且唯一的，因此考虑观测值的权矩阵 P_{44} 是多余的。

按x-方法研究有限单元可得出下图：

在应用点的位移来推导应变参数时，可以利用关系式(49)。然后需要确定6个变形元素，即3个应变参数 $e_z^T = |e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}|$ 和刚体运动的参数 ω, t_x 与 t_y 。为此在推导时一个三角形内利用其三角形顶点的6个坐来，这个问题就可得到唯一的解。位移向量的基准变换 t_z ，如第4.5节以及第4.3节所示那样，应变参数 e_z 仍

如图 7 所示, 如果两个三角形是相邻的, 则只需由第二个三角形新添上去的点 4 的位移再列出 2 个“观测方程式”, 还需要的 4 个方程式可类似于(75)式作为“坐标条件方程式”求得。例如, 点 1 的位移 u_{x1} 同时影响到两个三角形, 由此可导出如下条件方程式:

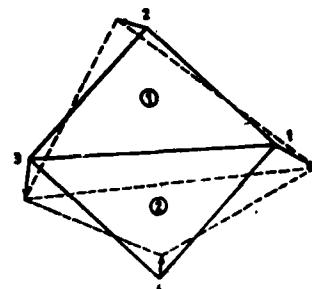


图 7 按 x 一方法相邻三角形应变参数的关系

$$\begin{aligned} & e_{x_{z+1}} x_1 + e_{y_{z+1}} y_1 - \omega_1 y_1 + t_{x_1} - \\ & - (e_{x_{z+2}} x_1 + e_{y_{z+2}} y_1 - \omega_2 y_1 + t_{x_2}) = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

其余连接上去的每个三角形，每个连接点可提供 2 个新的条件方程式。依此方式在图 6 的中点五边形中， $5 \times 6 = 30$ 个变形参数则可由 $2 \times 6 = 12$ 个观测方程式和 $2 \times 9 = 18$ 个坐标条件方程式来解算。

由于这个方程组不是超定的，因此不必考虑观测方程式的权矩阵 p_u 。

即使描述刚体运动的参数与基准有关，但是有关相对运动的信息，如平移或旋转角的差数仍可不受限制。

分析有限单元的好处在于，可以按现实情况对变形状态的位置分布有个很好的了解。但是，反过来由于它需要耗费较多的存储单元和计算时间，这是它的不足之处，这是因为即使是很小的网也会出现较大的方程组。因此必要时只好将就略去相关性，因为研究与其余部分控制网脱离关系的单个三角形是毫无困难的。

各个三角形局部变形状态的研究可导至将相同变形或应变模式的控制网部分概括为若干个部分控制网。

5.2 部分控制网的分析

根据图 4b 所示的断层发展过程与各个有限单元的应变模式（比较图 9 和图 10），可将这个控制网划分成三个部分控制网：部分网 I 与 II 位于断层的两边；它没有多少变形或没有显著变形，而跨在断层上的第三个部分网 v，在它的各个三角形单元上有着均匀一致的变形。这个应变模式就给变形模型的选择一个重要启示。如果没有其他信息可供参考的话，则从图 1 来看也许首先可以考虑图 1b 或图 1a 所示的变形模式。图 1b 表示，未跨过断层的控制网部分可看作图形保持不变，而跨过断层的控制网部分已出现均匀的仿射变形。按照图 1d 断层两边的控制网部分已到了互相错开的程度，它们本身都不出现变形，但相互之间已产生相对位移（按右侧位移的意义理解）；相对于断层的横向相对运动，或许还有相互间的旋转运动都是可能出现的。

为了表达这些模型我们约定如下： u_I 、 u_{II} 为控制网第 I 部分与第 II 部分（接合点 $u_{I,v}$ 和 $u_{II,v}$ 除外）的控制点坐标变化量，这些接合点将两边的控制网部分同跨断层的控制网部分连接起来。 u_v 为部分控制网 v（包括接合点在内）的控制点的坐标变化量， H_I 、 H_{II} 和 H_v 为相应于（49b）的模型矩阵， $H_{I,v}$ 与 $H_{II,v}$ 为与接合点有关的模型矩阵， p_I 、 p_{II} 与 p_v 为相应控制网部分的变形参数， p_u 为观测值 u 的权矩阵。

因此图 1 所示的这种完整的变形模型可表示为：

$$\begin{array}{c|ccc|c} u_I & H_I & 0 & 0 & p_I \\ u_{II} & 0 & H_v & 0 & p_v \\ \hline u_{III} & 0 & 0 & H_{II} & p_{II} \\ 0 & H_{I,v} & -H_{I,v} & 0 & \\ 0 & 0 & H_{II,v} & -H_{II,v} & \end{array}, \quad p_u \quad (79)$$

为了描述图 1b 的形式，这种完整的模型应作这样的更改，去掉 p_I 与 p_{II} 中描述应变的参数；模型矩阵 H_I 、 H_{II} 、 $H_{I,v}$ 和 $H_{II,v}$ 可作相应的简化。

为了表示出图1d的模型，所有与控制网部分 v 有关的式子均可去掉，因为第 I 部分与第 II 部分已到了互相错开的程度，这种被大大简化了的模型为

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_I & 0 \\ 0 & H_{II} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_I \\ p_{II} \end{vmatrix}, \quad (80)$$

其中，在 p_I 与 p_{II} 里均只包括刚体运动的参数 ω 、 t_x 与 t_y 。其相关性只是通过权阵 p_u 表示出来。

按 l 一方法的做法与此完全类似，不过这时把描述刚体运动的参数完全放弃掉。关于这些参数与基准之间的依赖关系已在前面指出了。控制网各部分之间的相对运动的信息可以由相应参数的差值求得。

在变形模型作统计检验时，了解各个参数的显著性有着特别重要的意义。为了找出最佳变形模型，就必须逐次剔除不显著的参数，直到留在模型中的所有参数均为显著为止。此时不应将应变参数 e_{xx} 、 e_{xy} 与 e_{yy} ，以及平移参数 t_x 与 t_y ，单独分开考虑，而是分别作为一组参数整体来考虑。

由于模型参数之间的相关性，因此这些参数不能互相独立地分别进行显著性检验。为了绕过这个困难，可以应用带有寻找特殊主元素的 Cholesky 分解法将相关的参数变换为互相无关且为等精度的变量（CASPERY 和 SCHWINTZER，1981）。

设参数向量为 p ，其协因数矩阵为 Q_p 。按 Choleky 分解法可将 Q_p^+ 分解为 $Q_p^+ = C^T C$ ，式中 C 为伪“三角形”矩阵（HöPCKE 和 KRÜGER，1981）。于是有

$$p^T Q_p^+ p = p^T C^T C p = k^T k = k_1^2 + k_2^2 + \dots \quad (81)$$

其中

$$k = Cp \quad (82)$$

利用误差传播定律可得

$$Q_k = C Q_p C^T = C(C^T C)^+ C^T = C C^T (C C^T)^{-1} (C C^T)^{-1} C C^T = I \quad (83)$$

因为 C 为行满秩矩阵。

现在可以分别对变量 k_i 进行零假设

$$H_0 : E\{k_i\} = 0 \quad (84)$$

的检验，由于 $k = Cp$ 因而可以由变量 k_i 的显著性推知参数向量 p_i 的显著性。

5.3 单个点的运动

研究单个点的必要性有着各种不同的原因，在工程技术领域里这常常正是变形分析的目的。在考察地壳运动时，一个点的奇异运动是使连续性的研究受到干扰并使研究结果受到歪曲的一种现象，因此必须予以发现。在控制网作各期图形一致性的比较时，比较网增添或删减一个点是计算技术上的一个困难。因此一般任务在于，找出影响图形一致性或仿射变换均匀性的一个或若干个可比较的点并使其影响不致于造成损害。

这里仅建议参考借助于 x 一方法的做法（例如，NIEMEIR，1976）。另外一个可导至同样结果的十分灵巧的方法是以 l 一方法为基础。

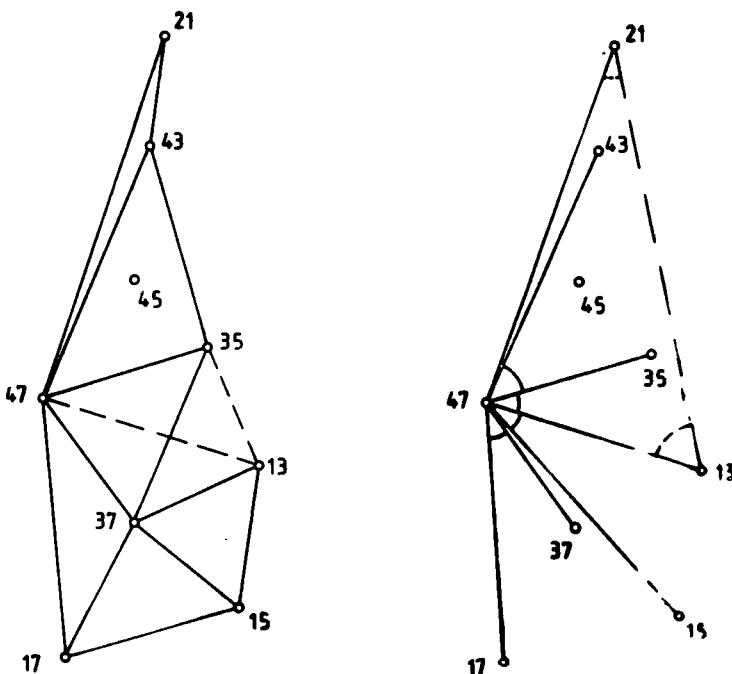


图 8 单个点运动的分析；剔除点45时的等价处理

根据由描述网形的元素（按顺序每次删减一个点）所组成的二次型（42）可进行整体检验，其中具有最小值的二次型表示刚刚删减的那个点正是变形最厉害的点。

图 8 和下面的表 1 可给予这个做法一些说明。

部分控制网 2 (共 9 个点) 的整体检验：

$q_9 = 3.1$ (显著)

删减后的部分控制网 2 (共 8 个点) 的检验

被删减的点	q_8	显著否？
13	3.4	是
15	3.0	是
17	3.5	是
21	3.5	是
35	2.5	是
37	3.5	是
43	3.4	是
45	1.0	否
47	3.5	是

表 1 单个点运动的分析：

删除点 45 后余下的部分控制网 2 就不再出现显著变形。

6. 示例

图4a为一个跨断层的监测网，该比较网系由14个各期一致的控制点组成。两期观测值均为边长与方向值，因此该比较网的基准秩亏等于3。

图2a表示变形场，图9为用每个三角形应变椭圆表示的有限单元(图4a)的变形模式。它表明，位于断层两边的大多数三角形无显著变形，除了直接跨断层的三角形外，只有和点3与45点有关的三角形才有显著变形。在剔除估计出现单个点运动的点3和点45后可得图10那样十分有规律的应变模式。

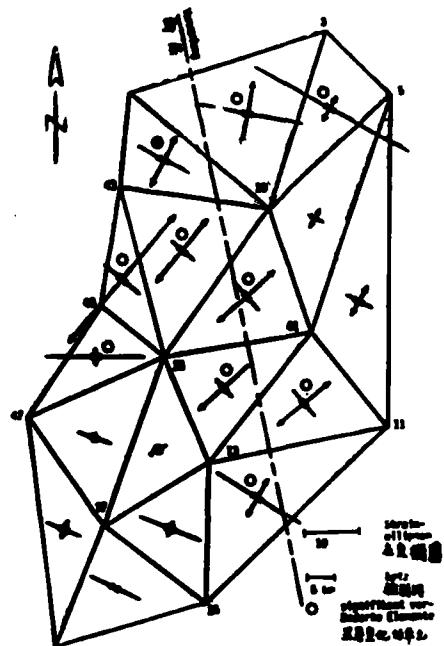


图9 整个控制网的有限单元应变分析。

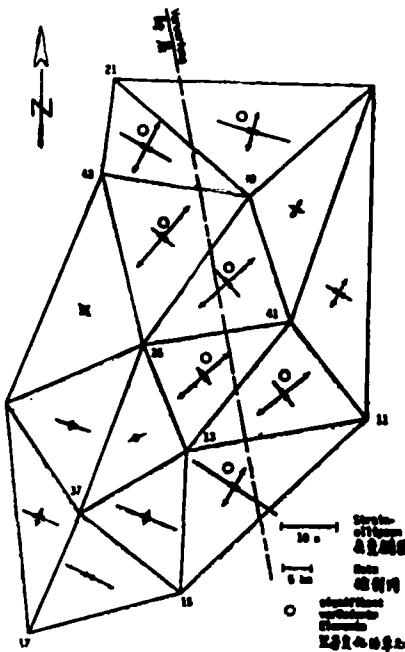


图10 剔除点3和点45之后控制网的有限单元应变分析

接着研究比较网及部分控制网的图形一致性，其结果列于表2(参阅图4b关于部分控制网的划分)。

由以上研究结果可以看出，该网变形相当于图1d的类型，即位于断层两边的这两个板块发生相对移动，但每一块内部一般都未出现变形。因此人们可以假定，这个变形模型是由两个板块及两个互不关联的单个点运动(点3和点45)构成的。变形参数的计算结果列在表3内。

表 2 图形一致性检验结果

比较周期	整个网或部分网	图形一致性的检验		
		方差比	分位值	显著否?
1	整个网	7.5	1.5	是
	部分网 1	8.0	2.0	是
	部分网 1 (点 3 除外)	1.0	2.2	否
	部分网 2	3.1	1.7	是
	部分网 2 (点 45 除外)	1.0	1.7	否
	部分网 3	7.9	1.7	是
2	部分网 3 (点 3 除外)	6.3	1.7	是

表 3 变形参数

整个网 或 部分网	变形模型检验			变 形 参 数						
	方差比	分位值	显著否?	对于部分网或点	e_1 (10^{-6})	e_2 (10^{-6})	θ (gon)	t_x (cm)	t_y (cm)	t (cm)
整个网	4.0	1.6	是	整个网	+	+	+	-	-	-
整个网	1.0	1.7	否	部分网 1 (点 3 除外)	-	-	-	0.0	0.0	0.0
				部分网 2 (点 45 除外)	-	-	-	-23.4	-7.5	24.6
				点 3	-	-	-	-25.8	9.3	27.4
				点 45	-	-	-	-36.7	-14.2	39.4
部分网 3 (点 3 除外)	1.4	1.9	否	部分网 3 (点 3 除外)	6.1	-3.5	46.2	-	-	-

- 未包括在模型中的参数

+ 已包括在模型中的参数

$$t = (t_x^2 + t_y^2)^{1/2}$$

参考文献

- [1] BÄHR, H.-G., 1978, Äquivalenzbeziehungen für die Auswertung geodätischer Messungen, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 242, München 1978
- [2] BRUNNER, F.K., COLEMAN, R., HIRSCH, B., 1981, A comparison of computation methods for crustal strains from geodetic measurements, Tectonophysics 71 (1981), pp. 281-298
- [3] CASPARY, W., SCHWINTZER, P., 1981, Bestimmung von Einzelpunktbewegungen und von Relativbewegungen zweier Netzteile in geodätischen Deformationsnetzen, Zeitschrift für Vermessungswesen 106 (1981)6, 277-288
- [4] HÖPCKE, W., KRÜGER, J., 1981, Zur Berechnung der Pseudoinversen, Zeitschrift für Vermessungswesen 106 (1981)10, S.543-553
- [5] NIEMEIER, W., 1976, Grundprinzip und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision, Proceedings, Darmstadt 1976, S.465-482
- [6] PRESCOTT, W.H., 1981, The determination of displacement fields from geodetic data along a strike slip fault, Journal of Geophysical Research, Vol.86, No.B 7, PP. 6067-6072, July 10, 1981
- [7] RAO, C.R., MITRA, S.K., 1971, Generalized Inverse of Matrices and its Applications, John Wiley, New York-London-Sydney-Toronto 1971
- [8] WELSCH, W., 1981, Description of homogeneous horizontal strains and some remarks to their analysis, IAG Symposium on Geodetic Networks and Computations, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 258/V, S.188-205
- [9] WELSCH, W., 1982, Finite element analysis of strain patterns geodetic observations across a plate margin, IAG Symposium on Recent Crustal Movements and Phenomena Associated with Earthquakes and Volcanism, Tokyo 1982
- [10] WELSCH, W., 1983, On the capability of finite element strain analysis as applied to deformation investigations, XVII. FIG International Congress, paper 608.5, Sofia 1983

Kongruenz und Affinität von geodätischen Netzen und Teilnetzen

W.M.Welsch

Zhang Yan

Zusammenfassung

Die Untersuchung mehr oder minder komplizierter Bewegungsmuster der Erdkruste oder anderer Objekte, die mit Hilfe geodätische Netze überwacht werden, ist eine wissenschaftliche Aufgabe, die nicht schematisch, sondern nur individuell ausgeführt werden kann. Ebenso wie in anderen Bereichen der Wissenschaft muß das Instrumentarium des Analytikers vielfältig und flexibel sein, um die Vielfalt der möglichen Erscheinungen erfassen zu können.

In der vorliegenden Arbeit wird es unternommen, allgemeine Methoden zur geometrischen und statistischen Untersuchung geodätischer Netze auf Konformität und Affinität darzustellen. Die gezeigten Methoden sind gut geeignet für interaktive Arbeit an graphischen Bildschirmen. Neben der Einzelpunktanalyse können finite Elemente, Teilnetze, Übergangszonen oder ganze Netze untersucht werden. Multivariates Design der Vergleichsnetze ist kein Hindernis. Sowohl homogene Verformungen als auch Unstetigkeitsstellen können erfaßt und quantitativ und qualitativ beschrieben werden. Besonderer Wert wird auf geometrische Strenge gelegt.