DOI:10.13203/j.whugis1985.02.005

阵列代数与拉直变换

李作发　罗玉芳　胡永旭

摘　要

本文从数学的角度对阵列代数理论进行初步探讨，引进了阵列空间，定义了阵列空间到向量空间的同构映射（称之为拉直变换）及同构逆变换（称之为拉直逆变换），并研究了这种变换的性质。

一、引　言

阵列代数理论是近十几年才发展起来的，它是向量、矩阵和张量代数的一个推广，它扩充了信息科学和计算机科学中的快速变换技术，构成了处理网格数据的快速多重线性代数。这个理论已经在科学技术领域，如航空摄影测量，快速信号的图象处理等方面，得到了广泛的应用。

目前，我们所看到有关阵列代数的文章，尚缺乏对其数学本质的研究，因此，我们将从数学的角度对阵列代数理论进行一些探讨，首先引进阵列空间，然后定义阵列空间到向量空间的同构映射（称之为拉直变换）及同构逆变换（称之为拉直逆变换），最后讨论这种变换的性质。

二、阵列空间和拉直变换

为了讨论的需要，我们先给出大家所熟知的矩阵的直积（Kronecker 乘积）的定义及本文要用到直积的两个性质。

设 $\underset{n\times m}{A}$ 和 $\underset{p\times q}{B}$ 为两个矩阵，$\underset{n\times m}{A}=\underset{n\times m}{(a_{ij})}$，$\underset{p\times q}{B}=\underset{p\times q}{(q_{ij})}$，称

$$A\otimes B\triangleq\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

为矩阵A与B的直积（或 Kronecker 乘积）。

性质1° $(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)(B_1\otimes B_2\otimes\cdots\otimes B_i)=(A_1B_1)\otimes(A_2B_2)\otimes\cdots\otimes(A_iB_i)$。

性质2° $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)=A\otimes B\otimes C$。

下面引入阵列的概念。

设P是一个数域，$n_k(k=1,2,\cdots,i)$ 为 i 个给定的自然数。以后的讨论除特别声明外皆对给定的数域P 而言。

本文1984年9月收到。

我们把阵列看作矩阵的扩充，而矩阵是一个二维空间的数表，因此，阵列可以看成 i 维空间的一个数表，叙述如下：

定义 1．设有 $n_1n_2\cdots n_i$ 个数 $a_{j_1j_2\cdots j_i}$ ($j_1=1, 2, \cdots, n_1$, $j_2=1, 2, \cdots, n_2$, $\cdots$, $j_i=1, 2, \cdots, n_i$) 排列成 i 维空间的 i 维"长方体"表，这个 i 维"长方体"表用 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{A}$ 表示，称之为 i—阵列，记为

$$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{A}=(a_{j_1j_2\cdots j_i})$$

称 $a_{j_1j_2\cdots j_i}$ 为 i——阵列 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{A}$ 的元素。

按照定义 1，矩阵是 2——阵列，向量是 1——阵列。

为了方便起见，我们简称 i——阵列为阵列。

定义 2．设 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i})}$ 和 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(y_{j_1j_2\cdots j_i})}$ 为两个阵列，若当 $j_k=q_k$ ($k=1, 2, \cdots, i$) 时，皆有

$$x_{j_1j_2\cdots j_i}=y_{q_1q_1\cdots q_i},$$

则称阵列 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$ 与 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}$ 相等，记为 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}$。

下面引入线性空间。

设 $S_{n_1,n_2,\cdots,\times n_i}=\left\{\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}\ \middle|\ \underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i})},\ x_{j_1j_2\cdots j_i}\in P\right.$

$\left.1\leqslant j_k\leqslant n_k,\ 1\leqslant k\leqslant i\right\}$ 即 $S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$ 是由数域 P 上的阵列 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$ 的全体构成的集合。

现在我们来定义 $S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$ 中的阵列加法和数乘。

定义 3．设 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i})}$ 和 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(y_{j_1j_2\cdots j_i})}$ 为 $S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$ 中的任意两个阵列，$a\in P$。称阵列 $(x_{j_1j_2\cdots j_i}+y_{j_1j_2\cdots j_i})$ 为阵列 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$ 和 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}$ 的和，记为 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}+\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}$，即

$$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}+\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{Y}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i}+y_{j_1j_2\cdots j_i})}。$$

称阵列 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(ax_{j_1j_2\cdots j_i})}$ 为数 a 与阵列 $\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$ 的数乘，记为 $a\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$，即

$$a\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(ax_{j_1j_2\cdots j_i})}$$

引入一个记号：

$$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{E}(j_1j_2\cdots j_i)\triangleq\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(e_{r_1r_2\cdots r_i})}\qquad(1\leqslant j_k\leqslant n_k,\ 1\leqslant k\leqslant i,)$$

其中

$$e_{r_1r_2\cdots r_i}=\begin{cases}1 & r_1=j_1,\ r_2=j_2,\ \cdots,\ r_i=j_i\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

这样我们有以下定理：

定理1，按上述定义的阵列加法和数乘，$S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$构成数域P上的一个$n_1n_2\cdots n_i$维的线性空间，$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{E(j_1j_2\cdots j_i)}$是它的一组基，且对于$\forall \underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}\in S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$，$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i})}$，有

$$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_i=1}^{n_i}x_{j_1j_2\cdots j_i}\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{E(j_1j_2\cdots j_i)}。$$

此定理容易从上述定义及线性空间的定义得出，证明过程略去。

定义4．称定理1中的线性空间$S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$为数域P上的阵列空间。

现在我们来定义阵列空间到向量空间的同构映射。

任取$\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i})}\in S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$，定义$S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$到向量空间$\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$的映射R如下：

$$R\left(\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}\right)=\underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{x},$$

其中$\underset{(n_1n_2\cdots n_n)\times 1}{x}=\underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{(x_j)}$是一个向量，

$$x_j=x_{j_1j_2\cdots j_i}$$

$$j=(j_1-1)n_2n_3\cdots n_i+(j_2-1)n_3\cdots n_i+\cdots+(j_{i-1}-1)n_i+j_i$$

$j=1,2,3,\cdots,n_1n_2\cdots n_i$，$j_1=1,2,\cdots,n_1$，$j_2=1,2,\cdots,n_2,\cdots,j_i=1,2,\cdots n_i$。

容易得到如下结论：

定理2，映射R是阵列空间$S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$到向量空间$\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$的同构映射。

定义5．称定理2中的同构映射R为阵列空间$S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$到向量空间$\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$的拉直变换，记为$\underset{n_1,n_2,\cdots n_i}{R}$。

定义6．设T为向量空间$\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$到阵列空间的一个映射，若T满足条件：对于$\forall \underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}\in S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$下式

$$T\underset{n_1,n_2,\cdots,n_i}{R}\left(\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}\right)=\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$$

成立，则称T为阵列空间$S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$到向量空间$\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$的拉直变换$\underset{n_1,n_2,\cdots,n_i}{R}$的逆变换，记为$\underset{n_1,n_2,\cdots n_i}{R^{-1}}$。

同样，可以证明 $\underset{n_1,n_2,\cdots,n_i}{R^{-1}}$ 是向量空间 $\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$ 到阵列空间 $S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$ 的同构映射。为了书写方便，我们把 $\underset{n_1,n_2,\cdots,n_i}{R}$ 和 $\underset{n_1,n_2,\cdots,n_i}{R^{-1}}$ 简写为R和R^{-1}。

三、拉直变换及其逆变换的性质

性质1，（线性性），设a，b∈P，$\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}$，$\underset{n_1\cdots\times n_i}{Y}\in S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$，$\underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{x}$，$\underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{y}\in\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$，则

$$R\left(a\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}+b\underset{n_1\cdots\times n_i}{Y}\right)=aR\left(\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\right)+bR\left(\underset{n_1\cdots\times n_i}{Y}\right),$$

$$R^{-1}\left(a\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{x}+b\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{y}\right)=aR^{-1}\left(\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{x}\right)+bR^{-1}\left(\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{y}\right)。$$

为了给出性质2，我们先介绍以下的定义及引理。

定义7．给定一阵列 $\underset{n_1\cdots\times n_i}{Y}=\underset{n_1\cdots\times n_i}{(y_{j_1j_2\cdots j_i})}$ 和 i 个矩阵 $\underset{m_k\times n_k}{A}=\underset{m_k\times n_k}{(a^{(k)}_{st})}$，$(k=1,2,\cdots,i)$，定义矩阵与阵列的乘积为

$$\underset{m_1\cdots\times m_i}{Z}=\underset{m_1\cdots\times m_i}{(z_{q_1q_2\cdots q_i})}=(\underset{m_1\times n_1}{A_1})^1(\underset{m_2\times n_2}{A_2})^2\cdots(\underset{m_i\times n_i}{A_i})^i\underset{n_1\cdots\times n_i}{Y}$$

其中

$$z_{q_1q_2\cdots q_i}=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_i=1}^{n_i}a^{(1)}_{q_1j_1}a^{(2)}_{q_2j_2}\cdots a^{(i)}_{q_ij_i}y_{j_1j_2\cdots j_i},$$

$$1\leqslant j_k\leqslant n_k,\quad 1\leqslant k\leqslant i,$$

上述k(k＝1，2，…,i)表示矩阵 $\underset{m_k\times n_k}{A_k}$ 的第二个下标n_k与阵列的第k个指标相同。

引入一个记号如下；

设$\overline{A}_k=A_k\otimes\underset{(m_{k+1}\cdots m_i)\times(m_{k+1}\cdots m_i)}{I}$ 记

$$B_k=\begin{pmatrix}\overline{A}_k & & & 0\\ & \overline{A}_k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overline{A}_k\end{pmatrix}$$

其中对角线上有$n_1\cdots n_{k-1}$个$\overline{A}_k$，其它的地方皆为0。

引理1，设

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts}\end{pmatrix}$$

为$\underset{m\times n}{A}$的分块矩阵，则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} A_{11}\otimes B & A_{12}\otimes B & \cdots & A_{1n}\otimes B \\ A_{21}\otimes B & A_{22}\otimes B & \cdots & A_{2n}\otimes B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1}\otimes B & A_{t2}\otimes B & \cdots & A_{ts}\otimes B \end{pmatrix}$$

由直积的定义很容易证得此引理。

引理2，$\underset{n_1\times n_1}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{n_{k-1}n_{k-1}}{I}\otimes A_k\otimes\underset{m_{k+1}\times m_{k+1}}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{m_i\times m_i}{I}=B_k$。

引理3，设 $\underset{m_k\times n_k}{A_k}=\underset{m_k\times n_k}{(a_{st}^{(k)})}$ $(k=1,2,\cdots i)$，$\underset{n_1\cdots n_k\times m_{k+1}\cdots\times m_i}{Y}=\underset{n_1\cdots\times n_k\times m_{k+1}\times m_i}{(y_{j_1j_2\cdots j_i})}$

且设 $\underset{n_1\cdots\times n_{k-1}\times m_k\cdots\times m_i}{Z}=\underset{m_k\times n_k}{(A_k)^k}\underset{n_1\cdots\times n_k\times m_{k+1}\cdots\times m_i}{Y}$。则

$$R\left(\underset{n_1\cdots\times n_{k-1}\times m_k\cdots\times m_i}{Z}\right)=\left(\underset{n_1\times n_1}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{n_{k-1}\times n_{k-1}}{I}\otimes A_k\otimes\underset{m_{k+1}\times m_{k+1}}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{m_i\times m_i}{I}\right.$$

$$\left.R\left(\underset{n_1\cdots\times n_k\times m_{k+1}\cdots\times m_i}{Y}\right)\right) \qquad (1)$$

证明：设 $R\left(\underset{n_1\cdots\times n_k\times m_{k+1}\cdots\times m_i}{Y}\right)=\begin{pmatrix} Y_1\\ \vdots \\ Y_{n_1\cdots n_k}\end{pmatrix}$

其中 $Y_l=\underset{(m_{k+1}\cdots m_i)\times 1}{(y_{r_l})}$ $\quad(1\leqslant\leqslant n_1\cdots n_k)$

$y_{r_l}=y_{j_1j_2\cdots j_i}$ $\quad l=(j_1-1)n_2n_3\cdots n_k+(j_2-1)n_3\cdots n_k+\cdots+(j_{k-1}-1)n_k+j_k$，

$r_l=(j_1-1)n_2\cdots n_km_{k+1}\cdots m_i+(j_2-1)n_3\cdots n_km_{k+1}\cdots m_i+\cdots+(j_{i-1}-1)m_i+j_i$。

显然有 $(l-1)m_{k+1}\cdots m_i<r_l\leqslant lm_{k+1}\cdots m_i$

于是由引理2，（1）的右边为

$$\text{右边}=\begin{pmatrix}\overline{A}_k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{A}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1\\ \vdots\\ Y_{n_1\cdots n_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{A}_kY_1\\ \vdots\\ \overline{A}_kY_{n_1\cdots n_k}\end{pmatrix}$$

记

$$\begin{pmatrix}\overline{A}_kY_1\\ \vdots\\ \overline{A}_kY_{n_1\cdots n_k}\end{pmatrix}=\underset{(n_1\cdots n_{k-1}m_k\cdots m_i)\times 1}{\left(u_r^{(k)}\right)}$$

则

$$u_r^{(k)}=\sum_{j_k=1}^{n_k}a_{r_kj_k}^{(k)}y_{j_1\cdots j_j} \qquad (2)$$

其中

$r=(j_1-1)n_2\cdots n_{k-1}m_k\cdots m_i+\cdots+(j_{k+1}-1)m_k\cdots m_i+\cdots+j_k$

$j_i=1,\ 2,\ \cdots,\ m_i,\ \cdots,\ j_{k+1}=1,\ 2,\ \cdots,\ m_{k+1},\ r_k=1,\ 2,\ \cdots,\ m_k$；

$j_{k-1}=1,\ 2,\ \cdots,\ n_{k-1}$；$\cdots,\ j_1=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1,\ 1\leqslant k\leqslant i$。

另一方面，若记 $R\left(\underset{n_1\cdots\times n_{k-1}\times m_k\cdots\times m_k}{Z}\right)=\underset{(n_1\cdots n_{k-1}m_k\cdots m_k\cdots m_i)\times 1}{\left(x_r^{(k)}\right)}$，

则由矩阵与阵列的乘积的定义及拉直变换R的定义，得

$$x_r^{(k)}=\sum_{j_k=1}^{n_k}a_{r_kj_k}^{(k)}\,y_{j_1j_2\cdots j_i}\tag{3}$$

其中

$$r=(j_1-1)n_2\cdots n_{k-1}m_k\cdots m_i+\cdots+(j_{k-1}-1)m_k\cdots m_i+\cdots+j_i+(r_k-1)m_{k+1}\cdots m_i+\cdots+j_i$$

$j_i=1,2,\cdots,m_i$，$\cdots j_{k+1}=1,2,\cdots,m_{k+1}$，$r_k=1,2,\cdots,m_k$，$j_{k-1}=1,2,\cdots,n_{k-1}$ $\cdots$，$j_1=1,2,\cdots,n_1$，$1\leqslant k\leqslant i$。

由（2）和（3），即知 $x_r^{(k)}=u_r^{(k)}$　$r=1,2,\cdots,n_1\cdots n_{k-1}m_k\cdots m_i$，从而（1）式成立。证毕。

性质2，设 $\underset{m_1\cdots\times m_i}{Z}=(\underset{m_1\times n_1}{A_1})^1(\underset{m_2\times n_2}{A_2})^2\cdots(\underset{m_i\times n_i}{A_i})^i\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}$，其中 $\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\in S_{n_1,n_2,\cdots,n_i}$，$\underset{m_1\times\cdots\times m_i}{Z}\in S_{m_1,m_2\cdots m_i}$。又设 $\underset{(m_1\cdots m_i)\times 1}{y}=\underset{(m_1\cdots m_i)\times(n_1\cdots n_i)}{(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)}\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{x}$，其中 $\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{x}\in\nabla_{n_1n_2\cdots n_i}$，$\underset{(m_1\cdots m_i)\times 1}{y}\in\nabla_{m_1m_2\cdots m_i}$，$A_k$ 为 $m_k\times n_k$ 阶矩阵，$k=1,2,\cdots,i$，则

$$R\left(\underset{m_1\cdots\times m_i}{Z}\right)=\underset{(m_1\cdots m_i)\times(n_1\cdots n_i)}{(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)}R\left(\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\right)\tag{4}$$

$$R^{-1}\left(\underset{(m_1\cdots m_i\times 1)}{y}\right)=(\underset{m_1\times n_1}{A_1})^1(\underset{m_2\times n_2}{A_2})^2\cdots(\underset{m_i\times n_i}{A_i})^iR^{-1}\left(\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{X}\right)\tag{5}$$

证明：记 $\underset{n_1\times m_2\cdots\times m_i}{W}=(\underset{m_2\times n_2}{A_2})^2\cdots(\underset{m_i\times n_i}{A_i})^i\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}$　则

$$\underset{m_1\cdots\times m_i}{Z}=(\underset{m_1\times n_1}{A_1})^1\underset{n_1\times m_2\cdots\times m_i}{W},$$

于是由引理3得

$$R\left(\underset{m_1\cdots\times m_i}{Z}\right)=R\left((\underset{m_1\times n_1}{A_1})^1\underset{n_1\times m_2\cdots\times m_i}{W}\right)$$

$$=\left(\underset{m_1\times n_1}{A_1}\otimes\underset{m_2\times m_2}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{m_i\times m_i}{I}\right)R\left(\underset{n_1\times m_2\cdots\times m_i}{W}\right)$$

对于 $R\left(\underset{n_1\times m_2\cdots\times m_i}{W}\right)$，同样可按上述方法依次做下去，最后得到

$$R\left(\underset{m_1\cdots\otimes m_i}{Z}\right)=\left(\underset{m_1\times n_1}{A_1}\otimes\underset{m_2\times m_2}{I}\cdots\otimes\underset{m_i\times m_i}{I}\right)\left(\underset{n_1\times n_1}{I}\otimes\underset{m_2\times n_2}{A_2}\otimes\underset{m_3\times m_3}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{m_i\times m_i}{I}\right)$$

$$\cdots\left(\underset{n_1\times n_1}{I}\otimes\cdots\otimes\underset{n_{i-1}\times n_{i-1}}{I}\otimes\underset{m_i\times n_i}{A}\right)R\left(\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{X}\right)$$

$$=A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)R(\underset{n_1\cdots\times n_i}{X})$$

所以（4）式成立。证毕。

利用性质2，可以得到如下性质：

性质3，$R\left((\underset{p_1\times m_1}{B_1})^1\cdots(\underset{P_i\times m_i}{B_i})^i(\underset{m_1\times n_1}{A_1})^1\cdots(\underset{m_i\times n_i}{A_i})^i\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\right)$

$$=\underset{(p_1\cdots p_i)\times(n_1\cdots n_i)}{((B_1A_1)\otimes\cdots\otimes(B_iA_i))}R\left(\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\right)\tag{6}$$

$$R^{-1}\left(\underset{(p_1\cdots p_i)\times(n_1\cdots n_i)}{(B_1A_1)\otimes\cdots\otimes(B_iA_i)}\ \underset{n_1\cdots n_1\times 1}{x}\right)=\underset{p_i\times m_i}{(B_1)^1}\cdots\underset{p_i\times m_i}{(B_i)^i}\underset{m_1\times n_1}{(A_1)^1}\cdots\underset{m_i\times n_i}{(A_i)^i}R^{-1}\left(\underset{(n_1\cdots n_i)\times 1}{x}\right)\qquad(7)$$

证明：设 $\underset{m_1\cdots\times m_i}{Y}=\underset{m_1\times m_1}{(A_1)^1}\cdots\underset{m_i\times n_i}{(A_i)^i}\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}$，则（6）式的左边变为

$$左边=R\left(\underset{p_1\times m_1}{(B_1)^1}\cdots\underset{p_i\times m_i}{(B_i)^i}\underset{m_1\cdots\times m_i}{Y}\right)$$

由性质2得

$$左边=\underset{(p_1\cdots p_i)\times(m_1\cdots m_i)}{(B_1\otimes\cdots\otimes B_i)}R\left(\underset{m_1\cdots\times m_i}{Y}\right)$$

$$=\underset{(p_1\cdots p_i)\times(m_1\cdots m_i)}{(B_1\otimes\cdots\otimes B_i)}\underset{(m_1\cdots m_i)\times(n_1\cdots n_i)}{(A_1\otimes\cdots\otimes A_i)}R\left(\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\right)$$

$$=\underset{(p_1\cdots p_i)\times(n_1\cdots n_i)}{((B_1A_1)\otimes\cdots\otimes(B_iA_i))}R\left(\underset{n_1\cdots\times n_i}{X}\right)=右边$$

故（6）式成立。证毕。

推论：设 $A_k^{(t)}$ 为 $m_k^{(t)}\times n_k^{(t+1)}$ 阶矩阵 $(t=1,2,\cdots,r-1,\ k=1,2,\cdots,i)$，$\underset{m_1^{(r)}\cdots\times m_i^{(r)}}{X}\in S_{m_1^{(r)}\cdots m_i^{(r)}}$，$\underset{(m_1^{(r)}\cdots m_i^{(r)})\times 1}{x}\in V_{m_1^{(r)}\cdots m_i^{(r)}}$，则

$$R\left[\underset{m_1^{(1)}\times m_1^{(2)}}{(A_1^{(1)})^1}\cdots\underset{m_i^{(1)}\times m_i^{(2)}}{(A_i^{(1)})^i}\cdots\underset{m_1^{(r-1)}\times m_1^{(r)}}{(A_1^{(r-1)})^1}\cdots\underset{m_i^{(r-1)}\times m_i^{(r)}}{(A_i^{(r-1)})^i}\underset{m_1^{(r)}\cdots\times m_i^{(r)}}{X}\right]$$

$$=\underset{(m_1^{(1)}\cdots m_i^{(1)})\times(m_i^{(r)})}{((A_1^{(1)}\cdots A_1^{(r-1)})\otimes\cdots\otimes(A_i^{(1)}\cdots A_i^{(r-1)}))}R\left(\underset{m_1^{(r)}\cdots\times m_i^{(r)}}{X}\right)\qquad(8)$$

$$R^{-1}\left[((A_1^{(1)}\cdots A_1^{(r-1)})\otimes\cdots\otimes(A_i^{(1)}\cdots A_i^{(r-1)}))\underset{(m_1^{(r)}\cdots m_i^{(r)})\times 1}{x}\right]$$

$$=\underset{m_1^{(1)}\times m_1^{(2)}}{(A_1^{(1)})^1}\cdots\underset{m_i^{(1)}\times m_i^{(2)}}{(A_i^{(1)})^i}\cdots\underset{m_1^{(r-1)}\times m_1^{(r)}}{(A_1^{(r-1)})^1}\cdots\underset{m_i^{(r-1)}\times m_i^{(r)}}{(A_i^{(r-1)})^i}R^{-1}\left(\underset{(m_1^{(r)}\cdots m_i^{(r)})\times 1}{x}\right)\qquad(9)$$

有了拉直变换和拉直逆变换后，我们可以很容易地把阵列方程变为通常的线性方程组，也可以将一类线性方程组变成阵列方程，这是进一步揭示了阵列代数的数学本质，同时为其应用提供了理论基础，有利于进一步研究方程组。

阵列代数的方法为线性方程组的快速求解提供了一个新的途径。我们通常用最小二乘法以多项式曲面拟合一个一般曲面，最佳拟合必须使数据点到多项式所描述的曲面的距离平方和最小，这要计算一个 $m\times m$ 阶矩阵 A的逆阵 A^{-1}（m是多项式的项数），对于 $m\times m$ 阶矩阵求逆阵所需时间是随 m的增大按几何倍数增加。如用高斯消除法计算 $m\times m$ 阶矩阵的逆阵，所需的运算

乘法次数　$\frac{1}{6}m(4m^2+3m-1)$

加法次数　$\frac{1}{6}m(4m^2-3m-1)$

阵列代数只计算 $\underset{m_1\times m_1}{A_1}$、$\underset{m_2\times m_2}{A}$、…、$\underset{m_i\times m_i}{A}$ i 个低阶矩阵的逆阵（$\underset{m\times m}{A}=\underset{m_1\times m_1}{A_1}\otimes$

$\underset{m_2\times m_2}{A_2} \otimes\cdots\otimes \underset{m_i\times m_i}{A_i}$，$m_1m_2\cdots m_i=m$）。

例如，当 $m=9$，$i=2$，$m_1=m_2=3$ 时：

计算 $\underset{9\times1}{y}=\underset{9\times9}{A^{-1}}\underset{9\times1}{x}$ 所需乘法次数：$m^2+\frac{m}{6}(4m^2+3m-1)=606$，所需加法次数：

$(m-1)m+\frac{m}{6}(4m^2-3m-1)=519$

计算 $\underset{3\times3}{Z}=\underset{3\times3}{A_1^{-1}}\underset{3\times3}{X}(\underset{3\times3}{A_2^T})^{-1}$ 所需乘法次数：$2m_1^3+\frac{m_1}{6}(4m_1+3m_1-1)=76$，所需加法

次数：$2(m_1-1)m_1^2+\frac{m_1}{6}(4m_1-3m_1-1)=62$。

很明显，阵列代数可以减少复杂而费时的求逆阵运算，也可减少矩阵乘列向量$\left(\underset{m\times m}{A^{-1}}\ \underset{m\times1}{X}\right)$的运算。阵列代数比常规计算快，随着m和i的增大，阵列代数的快速性更能显示出来。

参考文献

〔1〕 G.Blaha, A few basic principles and technigues of array algebra. Bulletin Géodésique , Volume 51 N° 3 , Annee 1977.

〔2〕 Urho.A. Rauhala : Array algebra as general base of cast transforms . Proceeding-Symposium image processing -GRAZIAUSTRIA—1977.

Array Algebra and Stacking Transformation

Li Zoufa　Luo Yufang　Hu Yongxu

Abstract

A preliminary investigation on the theory of array algebra is presented in this paper from a mathematical point of view. The array space is introduced; the definitions of the isomorphic mapping from array space onto vector space (i. e. stacking transformation) and its isomorphic inverse transformation (i . e. stacking inverse transformation) are given, and the properties of the transformation are discussed .