阵列代数及其在测量上的应用

罗玉芳　李作发　胡永旭

摘　要

本文系统地介绍了阵列代数的基本原理，阐述了阵列代数方程与矩阵方程的变换关系以及借助这些关系用阵列代数解最小二乘问题。最后给出了阵列代数在测量上的应用并对该法在应用上的限制和效率作了说明。

一、前　言

阵列代数是五十年代中期发展起来的一种新的数学理论和方法，它起源于测量上具有网格状大规模数据块的快速处理，例如数字地面模型、卫星象片、快速富立叶变换等的数字计算。

阵列代数是矩阵代数的一个推广，是处理网格数据的快速多重线性代数。用阵列代数方法解决问题的速度比用普通的解线性方程的方法解决问题的速度快得多，阵列的维数越高时，提高的效率越显著，并且大量地减少计算机的储存。

二、阵列的概念、矩阵与阵列的乘积

1、阵列的定义

大家知道，矩阵是一个（二维空间的）长方形的数表，类似的，阵列是 i 维空间的一个 i 维长方体数表，阵列的定义如下：

所谓阵列就是由 $n_1 n_2 \cdots n_i$ 个元素 $a_{j_1 j_2 \cdots j_i}$ （$j_1=1,2,\cdots n_1$；$j_2=1,2,\cdots n_2$；表…，$j_i=1,2,\cdots n_i$），在 i 维空间中排列成的 i 维长方体的数表。这个数表用 $\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{A}$ 示，称表之为 i—阵列，记为

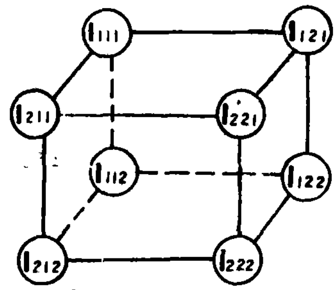
$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{A} = \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{(a_{j_1 j_2\cdots j_i})}$$

按定义，向量是 1 —阵列，矩阵是 2 —阵列。有了这个定义，许多不易用向量或矩阵表示的问题，就可以用 i—阵列表示出来。例如空间格网点的温度，用向量或矩阵不易表示，而用 3 —阵列表示却是方便的。设每个格网点的温度为 $l_{j_1 j_2 j_3}$（$j_1=1,2,\cdots,n_1$；$j_2=1,2,\cdots n_2$；$j_3=1,2,\cdots n_3$），则空间的温度可用 3 —阵列表示为

$$\underset{n_1\times n_2\times n_3}{L} = \underset{n_1\times n_2\times n_3}{(l_{j_1 j_2 j_3})}$$

本文1984年9月收到

当 $n_1=n_2=n_3=2$ 时，用一个空间图形来表示。如图一。



图一

2、阵列的和、差、数乘

设阵列 $\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_t}{X}=(x_{j_1j_2\cdots j_t})$ 和

$\underset{m_1\times m_2\times\cdots m_i}{Y}=(y_{j_1j_2\cdots j_i})$ 及常数 α。

如果两个阵列的维数相等（$i=t$，）且 $m_k=n_k$（$k=1,2,\cdots i$）则称

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}\pm\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{Y}=\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{(x_{j_1j_2\cdots j_i}\pm y_{j_1j_2\cdots j_i})}$$

为阵列 X 与 Y 和（差）。

称

$$\underset{n_1\times\cdots\times n_t}{\alpha X}=\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_t}{(\alpha x_{j_1j_2\cdots j_t})}$$

为数 α 与阵列 X 的数乘。

3、矩阵与阵列的相乘法则

设矩阵 $\underset{m_k\times n_k}{A_k}=\underset{m_k\times n_k}{\left(a_{ij}^{(k)}\right)}$（$k=1,2,\cdots i$），i—阵列 $\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}=(x_{j_1j_2\cdots j_i})$，

矩阵 $\underset{m_k\times n_k}{A}$ 与阵列 $\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}$ 的乘积定义是：

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times r_k\times\cdots\times n_i}{L}=(l_{j_1j_2\cdots r_k\cdots j_i})=\underset{m_k\times n_k}{(A_k)}^{k}\ \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_k\times\cdots\times n_i}{X}$$

其中

$$l_{j_1j_2\cdots r_k\cdots j_i}=\sum_{j_k=1}^{n_k}a_{r_kj_k}x_{j_1j_2\cdots j_k\cdots j_i}\qquad \begin{array}{l} j_1=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1\\ j_2=1,\ 2,\ \cdots,\ n_2\\ \cdots\cdots\\ r_k=1,\ 2,\ \cdots,\ m_k\\ \cdots\cdots\\ j_i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_i\end{array}$$

矩阵 $(A_k)^k$ 的右上标 k 表示矩阵 A_k 与阵列的第 k"面"相乘。因此，只有当矩阵 $\underset{m_k\times n_k}{A_k}$ 的列数 n_k 与阵列 $\underset{n_1\times\cdots\times n_k\times\cdots\times n_i}{X}$ 的第 k 个下标数 n_k 相同时，$\underset{m_k\times n_k}{(A_k)}^k\ \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_k\times\cdots\times n_i}{X}$

才有意义，也就是 $\underset{m_k\times n_k}{A_k}$ 才能与 $\underset{n_1\times\cdots\times n_k\times\cdots\times n_i}{X}$ 的第 k“面”相乘。这里，A_k的下标 k 与 $(A_k)^k$ 的右上标 k 相同。

一般地，矩阵与阵列的乘法定义为：

$$\underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{Z} = \underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{(z_{r_1r_2\cdots r_i})} = \underset{m_1\times n_1}{(A_1)^1}\ \underset{m_2\times n_2}{(A_2)^2}\cdots\underset{m_i\times n_i}{(A_i)^i}\ \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X} \tag{1}$$

其中

$$z_{r_1r_2\cdots r_i} = \sum_{j_1=1}^{n_1} a^{(1)}_{r_1j_1}\sum_{j_2=1}^{n_2} a^{(2)}_{r_2j_2}\cdots\sum_{j_i=1}^{n_i} a^{(i)}_{r_ij_i}x_{j_1j_2\cdots j_i} \tag{2}$$

$$(1\leqslant r_k\leqslant m_k\quad 1\leqslant k\leqslant i)$$

矩阵与阵列的乘法又叫 R—阵列乘法。

当 i = 2 且 $\underset{m_2\times n_2}{A_2} = \underset{n_2\times n_2}{E}$ （$m_2=n_2$，E—单位矩阵）时，阵列与矩阵的乘法就是通常的两个矩阵相乘

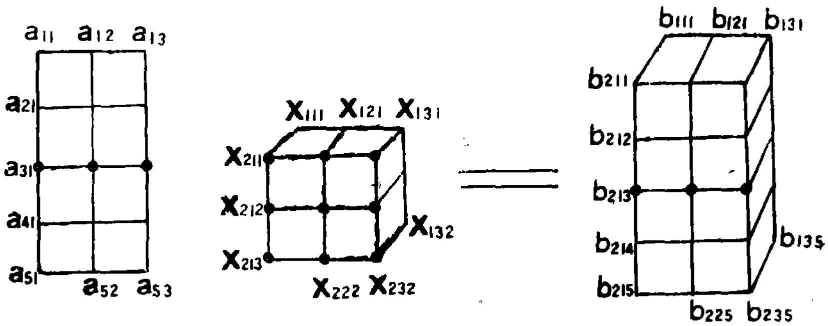
$$\underset{m_1\times n_1}{(A_1)^1}\ \underset{n_1\times n_2}{X} = \underset{m_1\times n_1}{A_1}\ \underset{n_1\times n_2}{X} \tag{3}$$

当 i = 2 时，矩阵与阵列的乘法为

$$\underset{m_1\times n_1}{(A_1)^1}\ \underset{m_2\times n_2}{(A_2)^2}\ \underset{n_1\times n_2}{X} = A_1XA_2^T \tag{4}$$

当 i＞2 时，矩阵与阵列的乘法和普通矩阵的乘法没有简单的关系。

下面，我们以 3 —阵列为例，将 $\underset{5\times 3}{A}$ 乘 $\underset{2\times 3\times 3}{X}$ 的第三“面”，用图形直观地表示出来，如图二。



图二

$$\underset{5\times 3}{(A)^3}\ \underset{2\times 3\times 3}{X} = \underset{2\times 3\times 5}{B}$$

$$b_{ijk} = \sum_{l=1}^{3} a_{kl}x_{ijl}$$

$$b_{213} = \sum_{l=1}^{3} a_{3l}x_{21l} = a_{31}x_{211} + a_{32}x_{312} + a_{33}x_{213}$$

$$b_{223}=\sum_{l=1}^{3}a_{3l}x_{22l}=a_{31}x_{221}+a_{32}x_{222}+a_{33}x_{223}$$

4、矩阵与阵列乘法的性质

i. 若 $Z=(A_{t+1})^{t+1}\cdots(A_k)^kY$

$$Y=(B_1)^1\cdots(B_t)^t(B_{t+1})^{t+1}\cdots(B_k)^k\cdots(B_l)^lT$$

则
$$Z=(B_1)^1\cdots(B_t)^t(A_{t+1}B_{t+1})^{t+1}\cdots(A_kB_k)^k\cdots(B_l)^lT$$

此性质容易由矩阵与阵列乘积的定义得出，在此略证（参加〔1〕）

ii. $$\underset{n_1\times n^1}{(E_1)^1}\underset{n_2\times n_2}{(E_2)^2}\cdots\underset{m_k\times n_k}{(A_k)^k}\cdots\underset{n_l\times n_l}{(E_l)^l}\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_l}{X}=\underset{m_k\times n_k}{(A_k)^k}\underset{n_1\times n_2\times\cdots n_l}{X}$$

其中 $\underset{n\times n}{E}$ 是单位矩阵

iii. 若 $Z=(B_1)^1\cdots(B_l)^lX$ 且 $B_k=b_k=\underset{1\times n_k}{(b^{(k)}_{j_k})}$　　$(k=1, 2, \cdots n)$

皆为行向量，则

$$\underset{1\times1\times\cdots\times1}{Z}=\underset{1\times1\times\cdots\times1}{(z_{11\cdots1})}=\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}b^{(1)}_{j_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}b^{(2)}_{j_2}\cdots\sum_{j_l=1}^{n_l}b^{(l)}_{j_l}x_{j_1j_2\cdots j_l}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

三、阵列方程与矩阵方程之间的变换公式

设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(6)$$

的矩阵形式是

$$\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times1}{x}=\underset{m\times1}{b}\qquad(7)$$

其中

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$ a_{ij} $(i=1, 2, \cdots m;\ j=1, 2, \cdots n)$ 是常数

$$\underset{n\times1}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$ x_i $(i=1, 2, \cdots n)$ 是未知数

$$\underset{m\times 1}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad b_i \text{ 是常数 } (i=1, 2, \cdots, m)$$

又设 $\underset{m\times n}{A} = \underset{m_1\times n_1}{A_1} \otimes \underset{m_2\times n_2}{A_2} \otimes \cdots \otimes \underset{m_i\times n_i}{A_i}$，$m=m_1m_2\cdots m_i$；$n=n_1n_2\cdots n_i$，其中符号 $\otimes$ 是矩阵的直积（或 Kronecker 积），我们将向量 $\underset{n\times 1}{x}$ 、$\underset{m\times 1}{b}$ 按照一定的规律，改排列为 阵 列 $\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}$ 、$\underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{B}$ 的形式。我们称

$$\underset{m_1\times n_1}{(A_1)}^{1} \underset{m_2\times n_2}{(A_2)}^{2} \cdots \underset{m_i\times n_i}{(A_i)}^{i} \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X} = \underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{B} \tag{8}$$

为阵列方程。方程（7）式与（8）式可以互相变换，下面将讨论这个问题。

1、阵列展开为列向量的形式【拉直变换】

设 $\underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{x} = \underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{(x_j)}$ 是由阵列 $\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}$ 改写成的列向量，则有

$$x_j = x_{j_1 j_2 \cdots j_i} \tag{9}$$

其中

$$j = (j_1-1)n_2n_3\cdots n_i + (j_2-1)n_3n_4\cdots n_i + \cdots + (j_{i-1}-1)n_i + j_i \tag{10}$$

$$1 \leqslant j_k \leqslant n_k \qquad 1 \leqslant k \leqslant i \quad j=1, 2, \cdots, n_1n_2\cdots n_i。$$

例如

$$\underset{m\times n}{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{3n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ x_{m1} & x_{m2}\cdots x_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$\underset{(mn)\times 1}{x} = (x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2n}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots x_{mn})^T$$

又如

$$\underset{2\times 3\times 2}{X} = \underset{2\times 3\times 2}{(x_{j_1j_2j_3})}$$

则

$$\underset{12\times 1}{x} = (x_{111}, x_{112}, x_{121}, x_{122}, x_{131}, x_{132}, x_{211}, x_{212}, x_{221}, x_{222}, x_{231}, x_{232})^T$$

反过来，给定了列向量 $\underset{(n_1n_2\cdots n_i\times 1}{x}$ 和 n_1、n_2、$\cdots n_i$，我们可以把它写为阵列

$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}$ 的形式（拉直逆变换）

所以有

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X} \Longleftrightarrow \underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{x}。$$

2、阵列方程与矩阵方程的变换公式

设矩阵方程

$$\underset{(m_1m_2\cdots m_i)\times(n_1n_2\cdots n_i)}{(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)}\ \underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{x}=\underset{(m_1m_2\cdots m_i)\times 1}{b},$$

又阵列方程(8)

$$\underset{m_1\times n_1}{(A_1)^1}\ \underset{m_2\times n_2}{(A^2)}\cdots\underset{m_i\times n_i}{(A_i)^i}\ \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}=\underset{m_1\times m_2\times\cdots m_i}{B},$$

其中矩阵A_k是$m_k\times n_k$阶的（$k=1，2，\cdots i$）。

下面我们讨论$(A_1\otimes\cdots\otimes A_i)x$的一个元素是$(A_1)^1\cdots(A_i)^iX$中的一个元素，反过来，$(A_1)^1\cdots(A_i)^2X$的一个元素是$(A\otimes\cdots\otimes A_i)x$中的一个元素。

假设矩阵$\underset{(m_1m_2\cdots m_i)\times(n_1n_2\cdots n_i)}{(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)}$的元素表示为$(A_1)_{r_1j_1}(A_2)_{r_2j_2}\cdots A_{r_ij_i}$，以下我们来找出它在矩阵$(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)$中的位置。

设$(A_1)_{r_1j_1}(A_2)_{r_2j_2}$在$A_{12}=A_1\otimes A_2$中的位置为$r_{12}j_{12}$，则由直积的定义知

$$r_{12}=(r_1-1)m_2+r_2$$

$$j_{12}=(j_1-1)n_2+j_2$$

类似地，若设矩阵$(A_1\otimes A_2)\otimes A_3=A_{12}\otimes A_3=A_{123}$的元素$(A_{12})_{r_{12}j_{12}}(A_3)_{r_3j_3}\equiv(A_1)_{r_1j_1}(A_2)_{r_2j_2}(A_3)_{r_3j_3}$在$A_{123}$中的位置为$r_{123}j_{123}$，则

$$r_{123}=(r_{12}-1)m_3+r_3=(r_1-1)m_2m_3+(r_2-1)m_3+r_3$$

$$j_{123}=(j_{12}-1)n_3+j_3=(j_1-1)n_2n_3+(j_2-1)n_3+j_3。$$

一般地，矩阵$A_{12\cdots i}=(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)$的元素$(A_1)_{r_1j_1}(A_2)_{r_2j_2}(A_i)_{r_ij_i}$在$A_{12\cdots i}$的位置为$r_{12\cdots i}$ $j_{12\cdots i}$，则

$$r_{12\cdots i}=(r_1-1)m_2m_3\cdots m_i+(r_2-1)m_3\cdots m_i+\cdots+(r_{j-i}-1)m_i+r_i。$$

$$j=j_{12\cdots i}=(j_1-1)n_2n_3\cdots n_i+(j_2-1)n_3\cdots n_i+\cdots+(j_{i-i}-1)n_i+j_i$$

因此，有

$$(A_1)_{r_1j_1}(A_2)_{r_2j_2}\cdots(A_i)_{r_ij_i}=(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)_{rj}$$

其中

$$r=r_{12\cdots i}=(r_1^{-1})m_2m_3\cdots m_i+(r_2^{-1})m_3\cdots m_i+\cdots+(r_{i-1}^{-1})m_i+r_i,$$

$$j=j_{12\cdots i}=(j_1^{-1})n_2n_3\cdots n_i+(j_2^{-1})n_3\cdots n_i+\cdots+(j_{i-1}^{-1})n_i+j_i,$$

$$1\leqslant r_k\leqslant m_k\qquad 1\leqslant j_k\leqslant n_k\qquad 1\leqslant k\leqslant i$$

显然 $r=1，2，\cdots，m_1m_2\cdots m_i$，$j=1，2，\cdots，n_1n_2\cdots n_i$。

（由8）式可得

$$b_{r_1 r_2 \cdots r_i} = \sum_{j_1=1}^{n_1} (A_1)_{r_1 j_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} (A_2)_{r_2 j_2} \cdots \sum_{j_i=1}^{n_i} (A_i)_{r_i j_i} x_{j_1 j_2 \cdots j_i}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} = \sum_{j_i=1}^{n_i} (A_1)_{r_1 j_1} (A_2)_{r_2 j_2} \cdots (A_i)_{r_i j_i} x_{j_1 j_2 \cdots j_i}$$

$$(1 \leqslant r_k \leqslant m_k,\ 1 \leqslant k \leqslant i)$$

即 $$b_r = \sum_{j=1}^{n_1 n_2 \cdots n_i} (A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_i)_{rj} x_j$$

$$(r = 1, 2, \cdots, m_1 m_2 \cdots m_i)$$

上式写成向量形式，即为

$$\underset{(m_1 m_2 \cdots m_i) \times 1}{b} = (A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_i) \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{x}$$

由此得到阵列方程与矩阵方程的变换公式，即

$$\underset{(m_1 m_2 \cdots m_i) \times 1}{b} = \underset{(m_1 m_2 \cdots m_i) \times (n_1 n_2 \cdots n_i)}{(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_i)} \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{x} \Longleftrightarrow \underset{m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_i}{B}$$

$$= \underset{m_1 \times n_1}{(A_1)}^{1} \underset{m_2 \times n_2}{(A_2)}^{2} \cdots \underset{m_i \times n_i}{(A_i)}^{i} \underset{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i}{X}。$$

（参见〔1〕）

四、解 阵 列 方 程

1、设阵列方程

$$\underset{m_1 \times n_1}{(A_1)}^{1} \underset{m_2 \times n_2}{(A_2)}^{2} \cdots \underset{m_i \times n_i}{(A_i)}^{i} \underset{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i}{X} = \underset{m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_i}{B}$$

中 $m_k = n_k$，且 A_k 满秩（$k = 1, 2, \cdots i$），则

$$\underset{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i}{X} = \underset{n_1 \times n_1}{(A_1^{-1})}^{1} \underset{n_2 \times n_2}{(A_2^{-1})}^{2} \cdots \underset{n_i \times n}{(A_i^{-1})}^{i} = \underset{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i}{B}$$

这是因为（8）式所对应的矩阵方程是

$$\underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times (n_1 \times n_2 \cdots n_i)}{(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots A_i)} \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{x} = \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{b}$$

上式的解为

$$\underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{x} = \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times (n_1 n_2 \cdots n_i)}{(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_i)^{-1}} \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{b}$$

$$= \underset{(n_1 n_2 \cdots n_i) \times (n_1 n_2 \cdots n_i) \times 1}{(A_1^{-1} \otimes A_2^{-1} \otimes \cdots \otimes A_i^{-1})\, b} \qquad (11)$$

（11）式对应的阵列形式为

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_1}{(A_1^{-1})}{}^1\underset{n_2\times n_2}{(A_2^{-1})}{}^2\cdots\underset{n_i\times n_i}{(A_i^{-1})}{}^i\underset{n_1\times n_2\cdots\times n_i}{B}。$$

这就是阵列方程式的解

如果$m_k\neq n_k$ $(k=1,2,\cdots,i)$则

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}=(A_1^{+})^1(A_2^{+})^2\cdots(A_i^{+})^i\underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{B}$$

其中A_k^+表示A_k的广义逆“+”逆。

2、设观测阵列方程为

$$\underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{V}=\underset{m_1\times n_1}{(A_1)}{}^1\underset{m_2\times n_2}{(A_2)}{}^2\cdots\underset{m_i\times n_i}{(A_i)}{}^i\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}-\underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{L}\tag{12}$$

它对应的矩阵方程为

$$\underset{(m_1m_2\cdots m_i)\times 1}{v}=\underset{(m_1m_2\cdots m_i)\times n_1n_2\cdots n_i)}{(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)}\underset{(n_1n_2\cdots n_i)\times 1}{x}-\underset{(m_1m_2\cdots m_i)\times 1}{L}\tag{13}$$

$$\underset{m\times 1}{v}=\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{x}-\underset{m\times 1}{l}$$

其中 $\underset{m\times n}{A}=\underset{m_1\times n_1}{A_1}\otimes\underset{m_2\times n_2}{A_2}\otimes\cdots\otimes\underset{m_i\times n_i}{A_i}$，$m=m_1m_2\cdots m_i$，$n=n_1n_2\cdots n_i$。

(13) 式的最小二乘解是

$$\underset{n\times 1}{\hat{x}}=(A^TA)^{-1}A_T l$$

$$\underset{n\times 1}{\hat{x}}=[(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)^T(A_1\otimes A_2\otimes\cdots A_i)]^{-1}(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_i)^T\underset{m\times 1}{l}$$

$$=[(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T]\otimes[(A_2^TA_2)^{-1}A_2^T]\otimes\cdots\otimes[(A_i^TA_i)^{-1}A_i^T]\underset{m\times 1}{l}$$

由此可得到 (12) 式的最小二乘解为

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{\hat{X}}=[(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T]^1[A_2^TA_2)^{-1}A_2^T]^2\cdots[(A_i^TA_i)^{-1}A_i^T]^i\underset{m_1\times m_2\times\cdots\times m_i}{L}\tag{14}$$

若加权时，(13) 式的最小二乘解为

$$\underset{n\times 1}{\hat{x}}=(A^TPA)^{-1}A^TP\underset{m\times 1}{l}$$

$$=[(A_1^TP_1A_1)^{-1}A_1^TP_1]\otimes[(A_2^TP_2A_2)^{-1}A_2^TP_2]^2\otimes\cdots\otimes$$

$$[(A_i^TP_iA_i)^{-1}A_i^TP_i]\underset{m\times 1}{l}$$

其中P为权，且 $\underset{n\times n}{P}=\underset{n_1\times n_1}{P_1}\otimes\underset{n_2\times n_2}{P_2}\otimes\cdots\otimes\underset{n_i\times n_i}{P_i}$，由此可以得到 (12) 式加权的最小二乘解

为

$$\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{\hat{X}} = [(A_1^TP_1A_1)^{-1}A_1^TP_1]^{1}\,[(A_2^TP_2A_2)^{-1}A_2^TP_2]^{2}\cdots$$

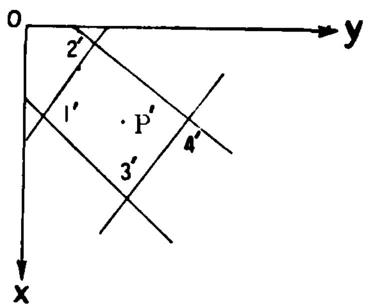
$$[(A_i^TP_iA_i)^{-1}A_i^TP_i]\underset{m_1\times m_1\times\cdots\times m_i}{L} \tag{15}$$

（参见〔1〕）

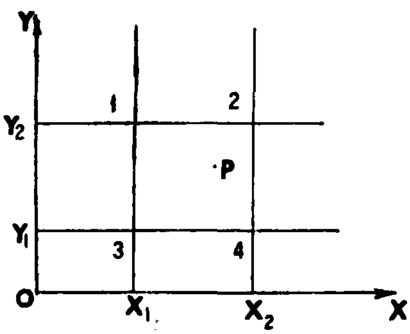
五、应用举例

例1 、遥感影象数字纠正

把被纠正影象划分为较小的影象片，如图三所示，



图三（a）原始影象



图三（b）纠正后影象

对于一小片中的任意象元素 P 纠正变换后的坐标，按下双线性插值公式：

$$\left.\begin{aligned} x_P &= A_1 + A_2X_P + A_3Y_P + A_4X_PY_P \\ y_P &= B_1 + B_2X_P + B_3Y_P + B_4X_PY_P \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

计算，其中 A_i、B_i（i= 1 ，2 ，3 ，4 ）是待定参数，它们是通过该小片四个角点的已知坐标（x_j，y_j）和（X_j，Y_j）(j= 1 ，2 ，3 ，4 ）求得。每个角点的坐标满足方程(16)，即满足矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & X_1Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_1 & X_2Y_1 \\ 1 & X_1 & Y_2 & X_1Y_2 \\ 1 & X_2 & Y_2 & X_2Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & y_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & X_1Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_1 & X_2Y_1 \\ 1 & X_1 & Y_2 & X_1Y_2 \\ 1 & X_2 & Y_2 & X_2Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_1 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}$$

矩阵方程所对应的阵列方程为：

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{bmatrix}^{2} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{bmatrix}^{2} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

解阵列方程得：

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \end{bmatrix}^{-1}\right)^{1} \left(\begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{bmatrix}^{-1}\right)^{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \end{bmatrix}^{-1}\right)^{1} \left(\begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{bmatrix}^{-1}\right)^{2} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix},$$

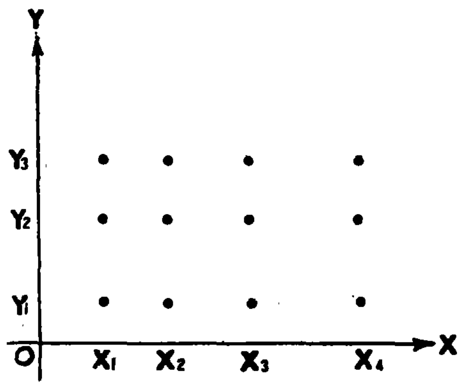
（参见〔6〕），在此例题中，将 4×4 阶矩阵求逆转化为二个 2×2 阶矩阵求逆。我们知道，$m\times m$ 级矩阵求逆阵需要乘法运算次数是 $\frac{1}{6}m(4m^2+3m-1)$，加法运算次数是 $\frac{1}{6}m(4m^2-3m-1)$。4×4 阶矩阵求逆阵需50次乘法运算，34次加法运算；二个 2×2 阶矩阵求逆阵需14次乘法运算，12次加法运算。从这些数字中可以看出，解阵列方程比解矩阵方程节约时间和计算机的储存。

例 2、数字地面模型

地形模拟方法有五个步骤：数据获取、镶嵌子程序、初步最小二乘法拟合、内插、终端多项式的计算，第三、五步骤能应用阵列代数。

如图四所示的XOY平面上的矩形网格，每点 (x_i, y_j) $(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3)$ 的高程观测值 z_{ij}，是未知函数 $z=f(x, y)$ 在这点的值，即

$$z_{ij}=f(x_i, y_j)。$$



图四

通常可以用多项式

$$z=\sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} c_{pq}x^p y^q$$

来近似代替函数 $z=f(x, y)$，最小二乘法来估计多项式的系数 C_{00}，C_{01}，$C_{10}C_{11}$。观测方程可写为

$$\underset{12\times4}{A}\ \underset{4\times1}{C} = \underset{12\times1}{z} + \underset{12\times1}{v} \tag{17}$$

其中

$$\underset{4\times1}{C} = (c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}))^{T}$$

$$\underset{12\times1}{z} = (z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{31}, z_{32}, z_{33}, z_{41}, z_{42}, z_{43})^T$$

$$\underset{12\times1}{v} = (v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33}, v_{41}, v_{42}, v_{43})^T$$

$$\underset{12\times4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & x_1 & x_1y_1 \\ 1 & y_2 & x_1 & x_2y_2 \\ 1 & y_3 & x_1 & x_1y_3 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_2y_1 \\ 1 & y_2 & x_2 & x_2y_2 \\ 1 & y_3 & x_2 & x_2y_3 \\ 1 & y_1 & x_3 & x_3y_1 \\ 1 & y_2 & x_3 & x_3y_2 \\ 1 & y_3 & x_3 & x_3y_3 \\ 1 & y_1 & x_4 & x_4y_1 \\ 1 & y_2 & x_4 & x_4y_2 \\ 1 & y_3 & x_4 & x_4y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

观测方程的阵列形式为

$$\underset{4\times2}{(A_x)^1} \ \underset{3\times2}{(A_y)^2} \ \underset{2\times2}{C} = \underset{4\times3}{z} + \underset{4\times3}{V} \qquad (18)$$

其中

$$\underset{2\times2}{C} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}, \quad \underset{4\times2}{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} \end{pmatrix} \quad \underset{4\times3}{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{11} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} \end{pmatrix},$$

$$\underset{4\times2}{A_x} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times2}{A_y} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{pmatrix}。$$

（18）式的最小二乘解为

$$\underset{2\times2}{\hat{c}} = [(A_x^TA_x)^{-1}A_x^T]^1[(A_y^TA_y)^{-1}A_y^T]^2 \underset{4\times3}{Z}$$

这种方法可以推广到网格数据点为N＝mn个，拟合的多项式是高次的情形。一般地，用多项式

$$z = \sum_{P=1}^{a-1} \sum_{q=1}^{a-1} c_{pq} x^P y^q$$

$$= (1, x, x^2, \cdots x^{a-1}) \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0\ b-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1\ b-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{a-1\ 1} & c_{a-1\ 2} & \cdots & c_{a-1\ b-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^{b-1} \end{pmatrix}$$

近似代替 z＝f（x，y），观测方程的阵列形式为

$$\left(\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{a-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x^{a-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{a-1}\end{pmatrix}\right)^1\left(\begin{pmatrix}1 & y_1 & y_1^2 & \cdots & y_1^{b-1}\\ 1 & y_2 & y_2^2 & \cdots & y_2^{b-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & y_n & y_n^2 & \cdots & y_n^{b-1}\end{pmatrix}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix}c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0\;b-1}\\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1\;b-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{a-1\;1} & c_{a-2\;1} & \cdots & c_{a-1\;b-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n}\\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n}\\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn}\end{pmatrix}$$

即

$$(\underset{m\times a}{A_x})^1(\underset{n\times b}{A_X})^2\underset{a\times b}{C}=\underset{m\times n}{z}+\underset{m\times n}{\triangle} \tag{19}$$

最小二乘法来估计多项式的常数 $\underset{a\times b}{C}$，得

$$\underset{a\times b}{\hat{C}}\left[\left(A_x^T A_x\right)^{-1}A_x^T\right]^1\left[\left(A_y^T A_y\right)^{-1}A_y^T\right]^2\underset{m\times n}{Z}$$

（参见〔2〕〔5〕）。

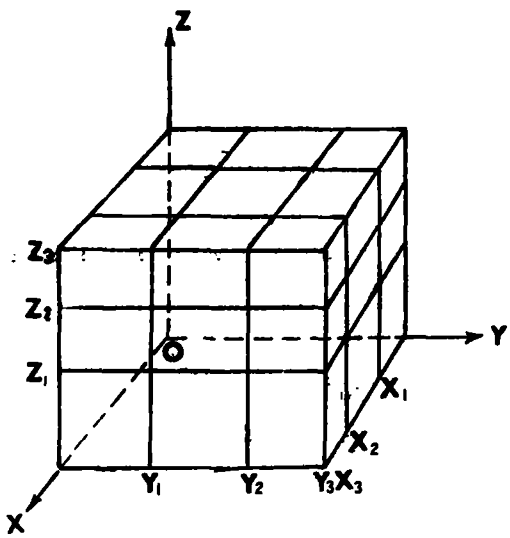
例 3、以三线性多项式

$$w=\sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}C_{pqr}\,x^py^qz^r$$

近似代替函数 $w=f(x,y,z)$，用最小乘法估计多项式的系数 C_{pqr} $(p=0,1,$ $q=0,1,\ r=0,1)$

已知网格数据点 (x_i,y_j,z_k) $(i=1,2,3,\ j=1,2,3,\ k=1,2,3)$，（见图五），在数据点 (x_i,y_j,z_k) 上的观测值 w_{ijk}，$(i,j,k=1,2,3)$，观测方程为

$$\underset{27\times 8}{A}\ \underset{8\times 1}{C}=\underset{27\times 1}{W}+\underset{27\times 1}{V} \tag{20}$$



图五

其中

$$\underset{27\times 8}{A}=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ 1 & x_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & y_1\\ 1 & y_2\\ 1 & y_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & z_1\\ 1 & z_2\\ 1 & z_3\end{pmatrix}=A_x\otimes A_y\otimes A_z$$

$$\underset{8\times 1}{C}=(c_{000},\ c_{001},\ c_{010},\ c_{011},\ c_{100},\ c_{101},\ c_{110},\ c_{111})^T,$$

$$\underset{27\times 1}{W}=(w_{111},\ w_{112},\ \cdots w_{333})^T$$

$$\underset{27\times 1}{V}=(v_{111},\ v_{112},\ \cdots v_{333})^T$$

（20）式的阵列形式为

$$(\underset{3\times 2}{A_x})^1(\underset{3\times 2}{A_y})^2(\underset{3\times 2}{A_z})^3\underset{2\times 2\times 2}{C}=\underset{3\times 3\times 3}{W}+\underset{3\times 3\times 3}{V} \tag{21}$$

其中 $\underset{2\times3\times2}{C}$ 、$\underset{3\times3\times3}{W}$、 $\underset{3\times3\times3}{V}$ 分别是列向量 $\underset{8\times1}{C}$、 $\underset{27\times1}{w}$ 、 $\underset{27\times1}{v}$ 的阵列形式。(21) 式的最小二乘估计为

$$\underset{2\times2\times m}{\hat{C}} = [(A_x^TA_x)^{-1}A_x^T]^1[(A_y^TA_y)^{-1}A_y^T]^2[(A_z^TA_z)^{-1}A_z^T]^3 \underset{3\times3\times3}{W}$$

以上三个例子，是在二、三维空间讨论的，我们可以推广到 i 维空间，网格数据点 $n_1n_2 \cdots n_i$ 个，拟合函数式为

$$W = \sum_{j_1=0}^{a_1}\sum_{j_2=0}^{a_2}\cdots\sum_{j_i=0}^{a_i} C_{j_1j_2\cdots j_i}\, f_{j_1}(x_1)f_{j_2}(x_2)\cdots f_{j_i}(x_i)。$$

例4 、已知数点是柱面网格，如图六所示。用函数

$$w = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} C_{ijk}\, f_i(r)g_j(\theta)h_k(z)$$

来逼近函数 $w = w(r, \theta, z)$ 。用最小二乘法来估计 C_{ijk} 。观测方程为

$$\begin{pmatrix} f_0(r_1) & f_1(r_1) & f_2(r_1) \\ f_0(r_2) & f_1(r_2) & f_2(r_2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} g_0(\theta_1) & g_1(\theta_1) \\ g_0(\theta_2) & g_1(\theta_2) \\ g_0(\theta_3) & g_1(\theta_3) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} h_0(z_1) & h_1(z_1) \\ h_0(z_2) & h_1(z_2) \\ h_0(z_3) & h_1(z_3) \end{pmatrix} \underset{12\times1}{\begin{pmatrix} c_{000} \\ \vdots \\ c_{211} \end{pmatrix}} =$$

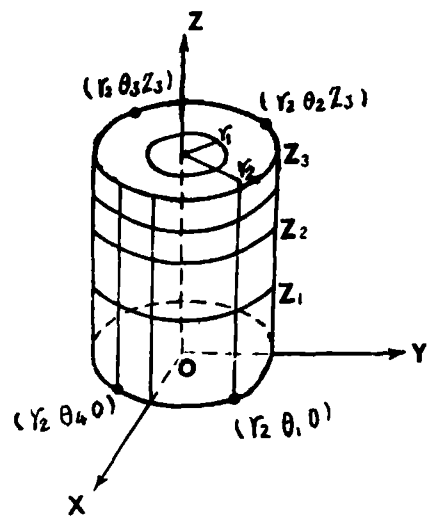
$$\underset{18\times1}{\begin{pmatrix} w_{111} \\ \vdots \\ w_{233} \end{pmatrix}} + \underset{18\times1}{\begin{pmatrix} v_{111} \\ \vdots \\ v_{233} \end{pmatrix}}$$

阵列形式为

$$\underset{2\times3}{(A_f)^1}\ \underset{3\times2}{(A_g)^2}\underset{3\times2}{(A_h)^3}\ \underset{3\times2\times2}{C} = \underset{2\times3\times3}{W} + \underset{2\times3\times3}{V}$$

因此，$\underset{3\times2\times2}{C}$ 的最小二乘估计为

$$\underset{3\times2\times2}{\hat{C}} = [(A_f^TA_f)^{-1}A_f^T]^1[(A_g^TA_g)^{-1}A_g^T]^2[(A_k^TA_k)^{-1}A_k^T]^3 \underset{2\times3\times3}{W} 。$$

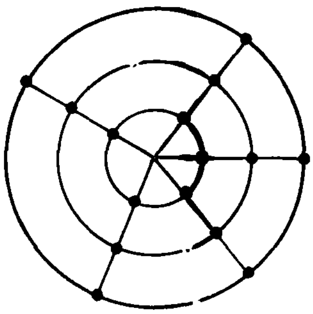


图六

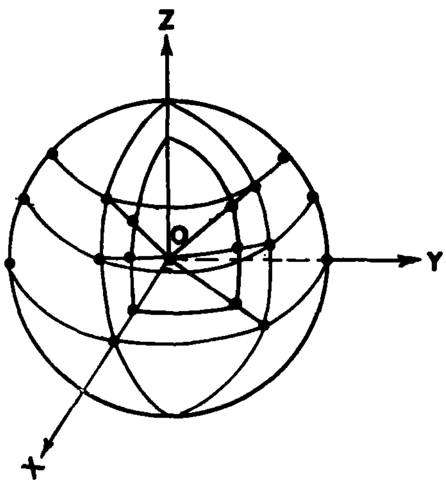
六、应用阵列代数的条件限制

阵列代数仅描述一类特殊的线性方程组，是一种特定的代数运算方法。因此，它只能限于处理格网数据，要求逼近的函数满足一定的形式，且阵权能分解。

为了把设计矩阵分解为矩阵的直积形式，要求所给的数据必须是格网数据，这些格网的空间位置可以任意。如在平面上，在直角坐标系内，平行于两坐标轴的直线的相交点构成平面直角坐标格网；在极坐标系内，园与射线的相交点构成极坐标格网。如图七所示。在空间中，空间直角坐标系内，平行于坐标平面的平面的相交点构成空间直角坐标格网；柱面坐标系内，平行于XOY平面的平面、园柱面和过z轴的半平面的相交点构成柱面坐标网，球面坐标系内，球面锥面和过Z轴的半平面的相交点构成球面坐标格网。如图八所示。



图七　极坐标格网



图八　球面坐标格网

关于数学模型的限制，我们以平面直角坐标格网来讨论。

观测方程　　$(A_x \otimes A_y)\ c = l + v$

对应的阵列方程 $(A_x)^1\ (A_y)^2 C = L + V$

要求 c 具有一定的对称性，l 的模型应该是以下形式：

$$l = \sum_i \sum_j c_{ij} f_i(x) g_j(y)$$

这个条件是充分的。例如，可用多项式来逼近或用三角函数来迫近某一函数，即

$$l = \sum_i \sum_j C_{ij} x^i y^j$$

或

$$l = \sum_r \sum_s a_{rs} x^r \cos y + \sum_r \sum_s b_{rs} x^r \sin^S y。$$

一般地有

$$l = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_k} a_{j_1 j_2 \cdots j_t} f_{j_1}(x_1) f_{j_2}(x_2) \cdots f_{j_i}(x_i) \tag{22}$$

关于权阵 P 的条件限制，P 必须能分解为两个矩阵的直积，即

$$P=P_1\otimes P_2$$

在独立观测的假定下，如果存在着与格网的行有关的数 r_1，r_2，$\cdots r_m$ 和与列有关的数 k_1，k_2，$\cdots k_n$，则把 P 分解为 $P_x\otimes P_y$ 是可能的，此时观测值 l_{ij} 具有权 $P_{ij}=r_ik_j$

$$\underset{(mn)\times(mn)}{P}=\underset{m\times m}{P_x}\otimes\underset{n\times n}{P_y}=\begin{pmatrix}r_1 & & & 0\\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_m\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}k_1 & & & 0\\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n\end{pmatrix}$$

一般地

$$\underset{(m_1\cdots m_i)\times(m_1\cdots m_i)}{P}=\underset{m_1\times m_1}{P_x}\otimes\underset{m_2\times m_2}{P_y}\otimes\cdots\otimes\underset{m_i\times m_i}{P}$$

在另外一种情况下，权矩阵也能分解，这时，观测值 $z_{ij}=f(x_i,y_j)$，$z_{hk}=f(x_k,y_k)$ 之间的协方差应满足

$$COV(ij,\ hk)=c^2\exp[-a^2(x_i-x_k)^2-b^2(y_j-y_k)^2],$$

其中 c、a、c 为固定参数，在这种情形下，观测值被排列的协方差$\sum$形如：

$$\sum=\sum_x\otimes\sum_y$$

这里$\sum_x$的（i, h）元素为 $c\exp[-a^2(x_i-x_h)^2]$，而$\sum_y$的（j, k）元素为 $c\exp[-b^2(y_j-y_k)^2]$，相应地

$$P=(\textstyle\sum_x\otimes\sum_y)^{-1}=\sum_x^{-1}\otimes\sum_y^{-1}。$$

（参见〔2〕）

七、阵列方法的效率

我们以解线性方程组为例，说明阵列方法的效率。

设线性方程组

$$\underset{N\times N}{A}\ \underset{N\times 1}{x}=\underset{N\times 1}{b}\tag{23}$$

其中 $|A|\neq 0$，且 $\underset{N\times N}{A}=\underset{n_1\otimes n_1}{A_1}\otimes\underset{n_2\times n_2}{A_2}\otimes\cdots\otimes\underset{n_i\times n_i}{A_i}$　$N=n_1n_2\cdots n_i$

$$\underset{n_1\times n_1}{A_1}\otimes\underset{n_2\times n_2}{A_1}\otimes\cdots\otimes\underset{n_i\times n_i}{A_i}\ \underset{N\times 1}{X}=\underset{N\times 1}{b}\tag{24}$$

对应的阵列形式：

$$\underset{n_1\times n_1}{(A_1)^1}\ \underset{n_2\times n_2}{(A_2)^2}\cdots\underset{n_i\times n_i}{(A_i)^i}\ \underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{X}=\underset{n_1\times n_2\times\cdots\times n_i}{B}\tag{25}$$

当 i = 3 时，解方程（23），计算 $\underset{N\times N}{A^{-1}}$ 的运算次数与N^3成正比；解方程（24），计算 $\underset{n_1\times n_1}{A_1^{-1}}\otimes\underset{n^2\times n_2}{A_2^{-1}}\otimes\cdots\times\underset{n_i\times n_i}{A^{-1}}$ 的运算次数与 N^2成正比；解方程（25），计算的运算次数与 N 成正比。关于存储空间，方程（23）需要 N^2 个地址，而方程（25）只需要 N 个地址。阵列的维数 i 越高，提高的效率越为显著。（参见〔3〕、〔4〕）。

关于计算矩阵 $\underset{n\times n}{A}$ 的逆阵 $\underset{n\times n}{A^{-1}}$ 所需乘法和加法运算次数，有下列计算公式：（用高斯方法）

乘法次数 $\frac{1}{6}n(4n^2+3n-1)$

加法次数 $\frac{1}{6}n(4n^2-3n-1)$

参 考 文 献

〔1〕 G.Blaha, A few basic principles and techniques of array algebra.Bulletin Géodésique, volume 51, N⁰ 3, Amee 1977.

〔2〕 Richarcl. A. Snay, Applicability of array algebra. National geodetic survey rockville, Md.February 1978.

〔3〕 Urho.A. Rauhala, Array algebra as general base of east transform. Procecdings—Symposium image Processing—GRAZIAUSTRIT—1977.

〔4〕 Urho.A.Rauhala : Introduction to array algebra. Photogrammetric engineering and Remote Sensing 1980.

〔5〕 Janes.R.Jancaitis and Ronald.L Magee, Inaestigation of do application of "Array algebra" to Tervain Madeling.ADAOO 54007 1978.（有译文，参见《国外测绘科技报导》1979年第31期）

〔6〕 杨凯等编著，遥感影象的几何纠正及计算方法，《资源遥感的方法与实践》第六章（待出版）

Array Algebra and Its Application to Surveying

Luo Yufang Li Zoufa Hu Yongxu

Abstract

The basic principle of array algebra is systematically introduced. The transformation relation between the array and matrix equations,and with the aid of this relation the solution to the least square problem by array algebra are expounded.The application of array algebra to surveying is presented.Finally,the Limitation and the efficiency of the method are explained.