

文章编号: 1000-050X(2001)06-0549-06

文献标识码: A

航空重力测量中水平加速度改正的 计算与频域分析

石 磐¹ 孙中苗¹ 肖 云¹

(1 西安测绘研究所, 西安市雁塔路中段1号, 710054)

摘要: 基于扰动水平加速度的正弦运动模型, 对平台失准角和水平加速度改正的频谱特性进行了分析。利用某航空重力测量试验的实测数据, 计算了平台失准角和水平加速度改正。

关键词: 航空重力测量; 航空重力仪; 水平加速度改正; 平台失准角; GPS

中图法分类号: P223.4; P244

传统的航空重力测量系统中, 通常将航空重力仪安装在稳定平台上, 以使其传感器保持稳定的垂直指向。如果稳定平台确实保持当地水平, 即重力仪具有正确的指向(指向当地垂线方向), 则飞机运动产生的水平加速度对重力测量没有影响。但是, 受飞行环境及平台自身稳定性能等因素之制约, 尤其是在飞机转弯飞行期间及转弯飞行后的一段时间内, 稳定平台不可能真正保持水平, 因此当飞机具有水平加速度时, 重力仪除探测到重力场信息及飞机的垂直加速度之外, 还探测到水平加速度的垂直分量, 该垂直分量即所谓的水平加速度改正(HACC)。

研究和试验表明^[1], 该项误差是进一步提高航空重力测量精度的主要受限因素之一。减少该项误差的技术途径是: ①尽量使飞机保持匀速直线飞行; ②尽可能使平台保持水平。前者取决于飞机的性能, 对于小型飞机有一定困难; 后者则主要反映在平台的性能改进上, 如采用 Schuler 调谐稳定平台^[1]或在平台校平环路中输入由 GPS 导出的实时加速度辅助平台保持水平^[2]等。但这种改进系统不能随处提供, 因此对于使用常规海/空重力仪的用户而言, 在重力仪输出值中顾及水平加速度改正还是可以考虑的技术途径之一。

1 水平加速度改正的一般计算公式

假设重力仪平台偏离水平面某一方向(另一

方向类似)的小角度为 θ (称为失准角), 则其在重力仪读数中引起两种误差。一是重力传感器只测得重力矢量的一部分, 即

$$g_c = g \cdot \cos \theta \quad (1)$$

式中, g_c 为测得的部分重力; g 为真实重力值。另一种误差是水平加速度的垂直分量的影响, 其大小为:

$$g_x = a_x \cdot \sin \theta \quad (2)$$

式中, g_x 表示水平加速度引起的重力误差; a_x 为重力仪的水平加速度。

上述两种误差的总影响习惯上称为水平加速度改正。因此, 水平加速度改正 g_0 的一般计算公式为:

$$g_0 = g \cdot \cos \theta - a_x \cdot \sin \theta - g \approx -a_x \cdot \theta - \frac{g}{2} \theta^2 \quad (3)$$

式(3)中, a_x 可由 GPS 观测数据导出, 因此只要求出失准角 θ , 即可算出水平加速度改正 g_0 。

2 平台失准角 θ 的频域分析

重力仪稳定平台的作用是使重力传感器的敏感轴始终保持垂直指向。L & R 重力仪采用两轴阻尼平台系统, 该系统通过两个稳定环境使平台保持水平。第一个环路将陀螺探测到的角速度反馈至力矩马达, 从而驱动平台水平, 但因陀螺漂移误差的影响, 平台很快就会偏离水平。第二个环

路的作用是对加速度计探测到的倾斜信息进行处理并将信息反馈到陀螺输入端。该反馈信号由与加速度计信号成正比的信号及与加速度计信号积分值成正比的信号两部分组成。这种反馈环路的运动方程为^[3]：

$$\theta + 2f\omega_0(\theta + \frac{a_x}{g}) + \omega_0^2 \int (\theta + \frac{a_s}{g}) dt = 0 \quad (4)$$

即 $\ddot{\theta} + 2f\omega_0(\theta + \frac{a_x}{g}) + \omega_0^2(\theta + \frac{a_s}{g}) = 0 \quad (5)$

式中, f 为平台的阻尼因子; ω_0 为稳定平台的固有频率。

对于角频率为 ω 的正弦水平加速度, 式(5)的稳态解为:

$$\theta = -\frac{\omega_0^2 + i2f\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2f\omega_0\omega} \cdot \frac{a_x}{g} = H_\theta(i\omega) \cdot \frac{a_x}{g} \quad (6)$$

式中, $H_\theta(i\omega) = H_\theta(s)$ 系稳定平台系统的传递函数:

$$H_\theta(s) = -\frac{\omega_0^2 + 2f\omega_0 s}{\omega_0^2 + s^2 + 2f\omega_0 s} \quad (7)$$

$H_\theta(i\omega)$ 可以表示成幅度和相位角的形式, 即

$H_\theta(i\omega) = A \cdot e^{i\varphi}$, 易得:

$$A = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4f^2\omega_0^2\omega^2}{\omega_0^4 + 2\omega_0^2\omega^2(2f^2 - 1) + \omega^4}} \quad (8)$$

$$\varphi = \arctan \left[\frac{2f\omega_0\omega^3}{-(\omega_0^4 + 2\omega_0^2\omega^2(2f^2 - 1) + \omega_0^2\omega^2)} \right] \quad (9)$$

利用 L & R 重力仪给定的阻尼因子 $f = 1/\sqrt{2}$, 可以绘出传递函数 $H_\theta(s)$ 的幅频响应和相频响应, 如图 1 所示(图中频率以 ω_0 为单位)。

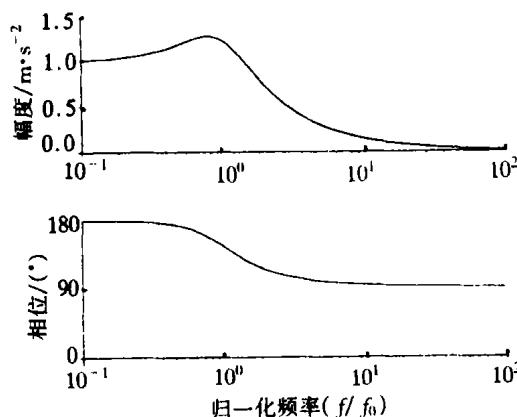


图 1 稳定平台的幅频响应和相频响应

Fig. 1 Amplitude Response and Phase Response of the Stable Platform

从图中可以看出, 当扰动水平加速度的频率 ω 小于 ω_0 时, 失准角的大小与 a_x/g 相当。此时, 若正弦加速度的幅度为 $100 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 则失准角将大于 5° 。若平台周期为 2min, 加速度周期为

17s, 则 $\omega/\omega_0 = 120/17 = 7.06$, 从图中估算出的失准角约为 1° 。对于 $100 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的加速度, 将引起近 $100 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的误差。幸好, 加速度与失准角不在同一相位, 它们约有 90° 的相位差, 从而可降低误差。此外, 部分水平加速度改正呈现周期性变化, 若其变化频率与重力信号的频率不同, 则可用滤波方法将其消去。

3 水平加速度改正的频域分析

3.1 平均水平加速度改正

设扰动水平加速度为时间的余弦函数: $a_x = a_0 \cos \omega t$, 由式(6)可知, 失准角为 $\theta = A^\circ (a_0/g) \cos(\omega t + \varphi)$, 代入式(3)得:

$$g_\theta = \frac{a_0^2}{2g} [-2A \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) - A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)] \quad (10)$$

由三角恒等变换得:

$$g_\theta = \frac{a_0^2}{2g} [(-2A \cos \varphi - A^2) \cos^2(\omega t + \varphi) - A \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\varphi)] \quad (11)$$

故平均水平加速度改正为:

$$\langle g_\theta \rangle = (-2A \cos \varphi - A^2) \cdot \langle \frac{a_x^2}{2g} \rangle = C \cdot \langle \frac{a_x^2}{2g} \rangle \quad (12)$$

式中, $\langle \cdot \rangle$ 为平均算子。由式(8)、式(9)可得:

$$C = \frac{\omega_0^4 + 2\omega_0^2\omega^2(2f^2 - 1)}{\omega_0^4 + \omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2(2f^2 - 1)} = 1 - \frac{\omega^4}{\omega_0^4 + \omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2(2f^2 - 1)} \quad (13)$$

欲使平均水平加速度改正为最小, C 应该取最小, 由此可得满足条件的 $f = 1/\sqrt{2}$, 此时,

$$C \left\{ f = 1/\sqrt{2} \right\} = \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \omega^4} \quad (14)$$

$$\langle g_\theta \rangle = \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \omega^4} \cdot \langle \frac{a_x^2}{2g} \rangle \quad (15)$$

上式通常用于估算水平加速度改正的量级^[3], 它给出了平均水平加速度改正与平台固有周期及水平加速度变化周期之间的关系。当水平加速度周期较长或平台固有周期较短时, 水平加速度改正的均值较大, 图 2 示出了这种变化关系。

3.2 瞬时水平加速度改正

将式(10)重写为:

$$g_\theta = \frac{a_0^2}{4g} C - \frac{a_0^2 A}{4g} [2 \cos \varphi + A \cos(2\omega t + 2\varphi) + 2 \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\varphi)] \quad (16)$$

定义 $\sin \alpha = \frac{2\cos \varphi + A}{D}$, $\cos \alpha = \frac{2\sin \varphi}{D}$ 。式中,
 $D^2 = (2\cos \varphi + A)^2 + 4\sin^2 \varphi = 4 + 4A\cos \varphi + A^2$ (17)

则 $g_0 = \frac{a_0^2}{4g} [C - AD\sin(2\omega t + 2\varphi + \alpha)]$ (18)

可见, $\langle g_0 \rangle = \frac{a_0^2}{4g} \cdot C = \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \omega^4} \cdot \frac{a_0^2}{4g}$ (19)

略去推导, 可得瞬时水平加速度改正为^[4]:

$$g_0 = \frac{a_0^2}{4g} \cdot \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \omega^4} - \frac{a_0^2}{4g} \cdot \frac{\sqrt{\omega_0^8 + 8\omega_0^2\omega^6}}{\omega_0^4 + \omega^4} \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi + \alpha) = \langle g_0 \rangle \cdot [1 - k \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi + \alpha)] \quad (20)$$

式中, $k \left\{ f = 1/\sqrt{2} \right\} = \sqrt{1 + 8 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^6}$ (21)

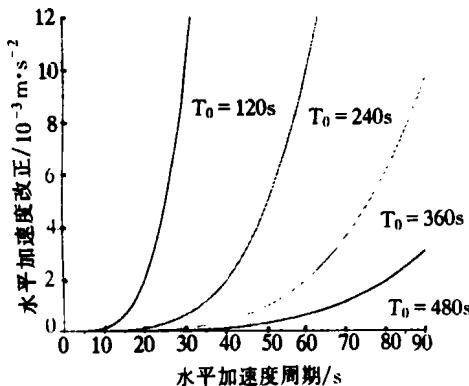


图2 $\langle g_0 \rangle$ 与 ω 的关系

Fig. 2 The Relationship between $\langle g_0 \rangle$ and ω

由于 $k > 1$, 因此瞬时水平加速度改正 g_0 的振幅 $k \cdot \langle g_0 \rangle$ 比其平均值 $\langle g_0 \rangle$ 要大, g_0 的最大值为:

$$g_{0, \max} = (1 + k) \cdot \langle g_0 \rangle \quad (22)$$

为进一步比较 $\langle g_0 \rangle$ 、 g_0 的振幅及 $g_{0, \max}$ 的变化, 令其系数分别为:

$$\left. \begin{aligned} G_a &= \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \omega^4} \\ G_0 &= k \cdot G_a \\ G_i &= (1 + k) \cdot G_a \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

G_a 、 G_0 及 G_i 随频率的变化分别如图3(a)、(b)、(c)所示。从图中可以看出, 平均水平加速度改正随频率的增加而急剧下降。假设水平加速度的幅度为 $a_0 = 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 则当 $\omega \geq \omega_0$ 时, 均值将小于 $1 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; 当 $\omega = \omega_0$ 时, 均值已低于 $0.5 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。瞬时水平加速度改正的振幅在 $\omega < 3\omega_0$ 时基本上无衰减, 之后的衰减也十分缓慢。水平加速度改正的最大值是前两者之和,

频段 $0 \sim \omega_0$ 间的幅度是均值的两倍, ω_0 以上频段之幅度的衰减率与振幅衰减率相当, $\omega = 3\omega_0$ 时的最大值仍高达 $2 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 以上。显然, 瞬时水平加速度改正要比式(15)估算的均值大得多, 且其在 $\omega \geq \omega_0$ 的频段仍有很大的数值。不过, 因瞬时水平加速度改正呈现周期性变化, 因而可通过滤波方法予以消除。

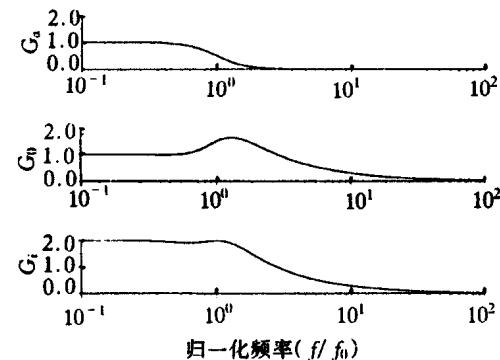


图3 水平加速度改正均值、振幅及最大值的系数

Fig. 3 The Coefficients for Average Value, Amplitude and the Maximum Value of the HACC

3.3 实测数据分析

试验中采用了新型的 L & R 航空重力仪, 重力仪数据采样率为 1Hz, 阻尼因子 $f = 1/\sqrt{2}$, 稳定平台的固有周期为 4min。总计飞了 9 条测线, 其中东西测线 5 条, 南北测线 4 条, 飞行高度约 3.4km, 飞行速度约 400km/h。笔者仅选择测线 1(东西测线)进行分析和比较。测线 1 的南北和东西方向的水平加速度示于图 4(a)、图 4(b), 相应的幅度谱示于图 5(a)、图 5(b)。由于南北向水平加速度的变化较东西向大得多, 故仅以南北向水平加速度产生的水平加速度改正为例。从图 5(a)易见, 在周期约 100s 和 60s 处出现了两个明显的峰值, 其大小分别为 $0.04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 和 $0.05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 且频谱的大部分能量集中于此处附近。

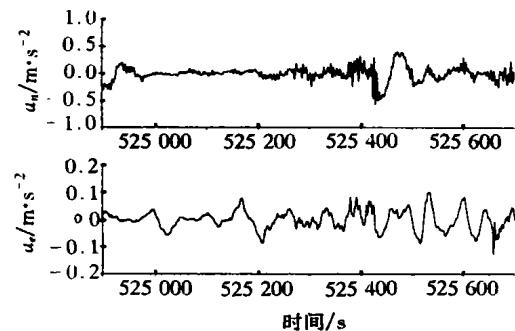


图4 测线 1 的南北和东西向的水平加速度

Fig. 4 The N-S and W-E Horizontal Acceleration for Line 1

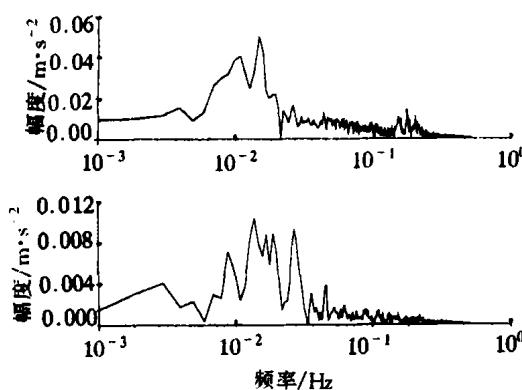


图 5 南北和东西向水平加速度的幅度谱

Fig. 5 The Amplitude Spectrum for the N-S and W-E Horizontal Acceleration

按式(20), 将图 5(a)所示的幅度取平方后除以 $4g$, 再乘上 G_0 , 即可得到瞬时水平加速度改正振幅的幅度谱, 如图 7 所示, $\omega_0 = 2\pi/240s$ 时的 G_0 随频率的变化示于图 6。

由图 7 可见, 水平加速度改正的频谱在 100s 和 60s 处的幅度约为 $5 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 且其形状与水平加速度的频谱形状基本保持一致, 这是因为 G_0 只衰减了周期短于 100s 的频谱分量。由此可

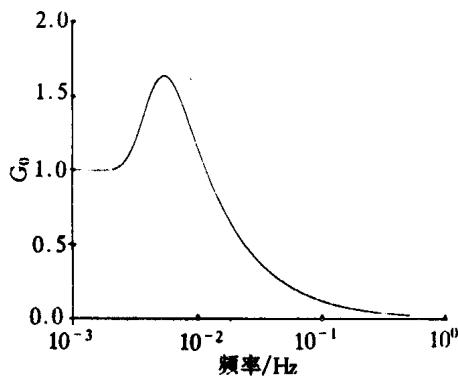
图 6 $\omega_0 = 2\pi/240s$ 时的 G_0

Fig. 6 The Coefficient G_0 for $\omega_0 = 2\pi/240s$

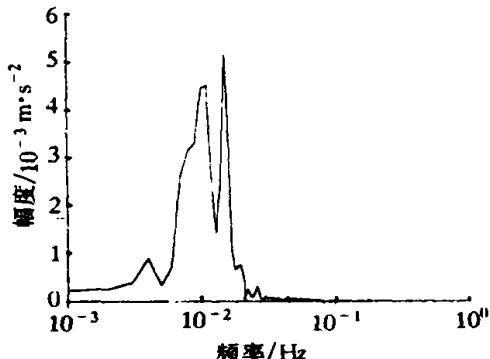


图 7 HACC' 振幅随频率的变化

Fig. 7 HACC' Amplitude in the Frequency Domain

以认为, 要完全用滤波方法消除水平加速度改正, 滤波器的滤波周期需大于 100s, 但这显然会降低航空重力测量的分辨率。

4 水平加速度改正的计算

4.1 失准角 θ 的计算

从水平加速度改正的一般计算公式可以看出, 只要求出失准角 θ , 就可按式(3)计算水平加速度改正。如式(6)所示, 若设计一个传递函数为 $H_\theta(i\omega)$ 的数字滤波器对 (a_x/g) 进行滤波, 则滤波器的输出即为失准角 θ 。利用双线性变换法设计的一个二阶递归滤波器如下^[5]。

第 j 个输出 q_j 可由第 j 个输入 p_j 及第 $(j-1)$ 、 $(j-2)$ 个输入和输出算出:

$$q_j = c_0 p_j + c_1 p_{j-1} + c_2 p_{j-2} + d_1 q_{j-1} + d_2 q_{j-2} \quad (24)$$

式中, $c_0 = (a+b)/(4+a+b)$; $c_1 = (2b)/(4+a+b)$; $c_2 = (b-a)/(4+a+b)$; $d_1 = (8-2b)/(4+a+b)$; $d_2 = (a-b-4)/(4+a+b)$; $a = 4f\omega_0\Delta t$, $b = (\omega_0\Delta t)^2$; Δt 为采样间隔。

对于上述航空重力测量试验, $\omega_0 = 2\pi/240s$, $\Delta t = 1s$, 利用图 4(a)、图 4(b) 所示水平加速度数据算得的失准角示于图 8。可见, 最大失准角可达 0.5° 以上。比较图 4(a) 和图 8 不难发现, 水平加速度变化剧烈处, 失准角的变化也较大。在 525 400s 附近, 由于大气湍流的影响, 飞机出现了较大的横滚, 致使之后南北向出现了较大的失准角(东西向飞行)。为清晰起见, 图 9 示出了南北方向失准角的直方图。统计表明, 整条测线南北向失准角的均值约为 $8'$, 失准角小于 $12'$ 的占 70% 以上, 小于 $20'$ 的占 95% 以上, 平稳飞行段(525 400s 前)失准角的均值约为 $5'$; 东西向的失

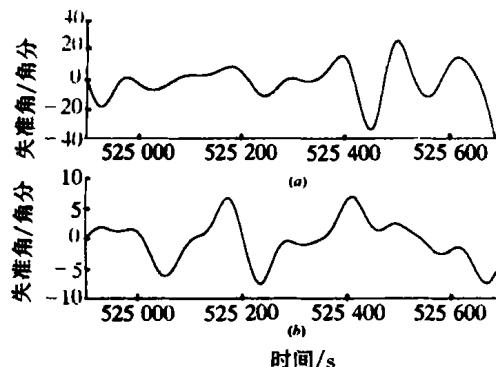


图 8 测线 1 平台的失准角

Fig. 8 The Misaligned Angle of the Platform for Line 1

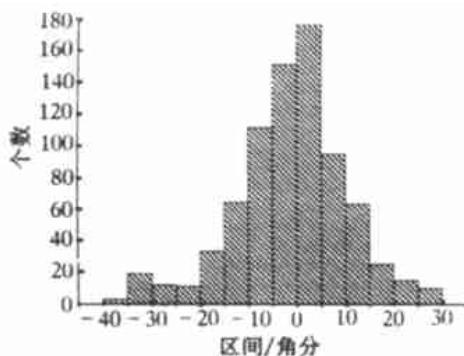


图9 平台失准角的直方图

Fig. 9 The Histogram of the Misaligned Angle of the Platform for Line 1

准角均值约为 $3'$ 。

由于该方法采用的递归滤波器与通常采用的FIR低通滤波器⁹之间有着较大的差异,因此,仅以此方法估算平台的失准角,而不予实际应用。实用中往往采用下述的直接计算法。

4.2 直接计算法

该方法最早见诸于 LaCoste (1981) 尚未发表的手稿中,文献[3, 7]将其公开化。假设重力仪平台的两根水平敏感轴互相严格垂直,并令 g_m 为重力仪测得的重力; a_x 为平台横轴探测到的横向水平加速度; a_l 为平台纵轴探测到的纵向水平加速度; a_e 为由GPS信息导出的东向水平加速度; a_n 为由GPS信息导出的北向水平加速度。

由于包括重力在内的所有加速度之矢量和对于两坐标系是相同的,故有:

$$G^2 + a_e^2 + a_n^2 = g_m^2 + a_x^2 + a_l^2 \quad (25)$$

式中, G 是重力和飞机垂直加速度之和。于是,

$$G = (g_m^2 + a_x^2 + a_l^2 - a_e^2 - a_n^2)^{1/2} \quad (26)$$

又因水平加速度远小于重力,因此有:

$$G = g_m + (a_x^2 + a_l^2 - a_e^2 - a_n^2)/2g_m \quad (27)$$

所以,水平加速度改正为:

$$g_0 = (a_x^2 + a_l^2 - a_e^2 - a_n^2)/2g_m \quad (28)$$

式中, g_m 可近似地用 g 代替。

利用式(28)计算前,各种水平加速度数据均需进行滤波处理。滤波器的设计和实现方法可详见文献[6]。图10示出了用此方法算得的测线1的水平加速度改正。与失准角情况相似,525 400s附近是临界处,之前水平加速度改正量级较小,之后数值较大。整段测线水平加速度改正绝对值的均值约为 $11 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,平稳段均值为 $3 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,绝对值小于 $40 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的占90%以上。

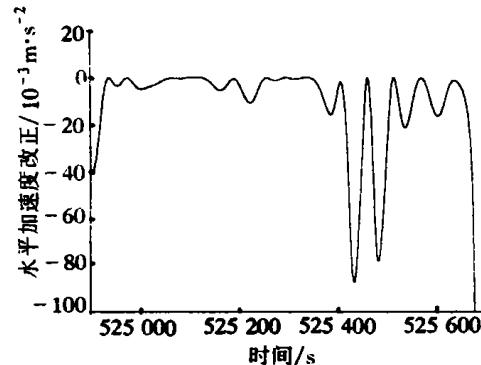


图10 测线1的水平加速度改正

Fig. 10 The Horizontal Acceleration Corrections for Line 1

5 结语

1) 平台失准角的大小与稳定平台系统的频谱特性及水平加速度的大小有关,当扰动水平加速度的变化频率小于平台的固有频率时,失准角约为 a_x/g 。

2) 采用传统平均水平加速度改正估算水平加速度改正的量级,这种估值比瞬时水平加速度的变化幅度要小,因而难以真实反映实际情况。

3) 水平加速度改正的频谱在周期约100s和60s处出现了两个明显的峰值,其大小分别为 $0.04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 和 $0.05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,且频谱的大部分能量集中于此处附近。因此,为完全消除其影响,所用滤波器的滤波周期需大于100s,为此必须选择一个合适的重力信号窗。

4) 如果飞机作平稳直线飞行,平台失准角和水平加速度改正的平均量级约为 $5'$ 和 $3 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

参 考 文 献

- Schwarz K P, Wei M. Some Unsolved Problems in Airborne Gravimetry. In: Proceedings of International Association of Geodesy Symposium. Berlin: Springer Verlag 1994. 131~150
- Zhang J Q, Schwarz K P, Salychev O S. Accuracy of Inertial Platform Stabilization by GPS Velocity. IAG Symposium on Airborne Gravity Field Determination, IUGG General Assembly, Boulder, Colorado, 1995. 29~37
- Valliant H D. The LaCoste and Romberg Air/Sea Gravity Meter: an Overview. CRC Handbook of Geophysical Exploration at Sea, 2nd edition, 1991
- Czompo J. Airborne Scalar Gravimetry Systems in the Spectral Domain: [Ph. D Thesis]. Calgary, Canada: Department of Geomatics Engineering at the University of Calgary, 1994

- 5 Swain C J. Short Note: Horizontal Acceleration Corrections in Airborne Gravimetry. *Geophysics* 1996, 61(1): 273~276
- 6 孙中苗, 夏哲仁. FIR 低通差分器的设计及其在航空重力测量中的应用. *地球物理学报*, 2000, 43(6): 850~855
- 7 Peters M F, Brozena J M. Methods to Improve Existing

Shipboard Gravimeters for Airborne Gravimetry. IAG Symposium on Airborne Gravity Field determination, Boulder, Colorado, 1995. 39~45

作者简介: 石磐, 研究员. 现从事地球重力场模型、重力场对卫星轨道摄动的影响、精密大地水准面的确定以及航空和卫星重力测量等领域的研究。

E-mail: sunszm@263.net

Calculation and Spectra Analysis of Horizontal Acceleration Corrections (HACC) for Airborne Gravimetry

SHI Pan¹ SUN Zhongmiao¹ XIAO Yun¹

(1 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Mid-Yanta Road, Xi'an, China 710054)

Abstract: Based on assuming that the disturbing horizontal acceleration is a cosine function of time, the magnitudes of the misaligned angle, the average HACC and oscillating amplitude of the instantaneous HACC are estimated, respectively, and discussed in the frequency domain. Two methods of calculating the horizontal acceleration corrections are suggested in this paper. Finally the misaligned angle and the horizontal acceleration corrections for actual flight data are determined.

Key words: airborne gravimetry; airborne gravimeter; horizontal acceleration correction; the misaligned angle of the platform; GPS

About the author: SH Pan, researcher. His research area include gravity field model, perturbation of satellite orbit due to gravity, precise geoid determination airbome gravimetry and satellite gravimetry, etc.

E-mail: sunszm@263.net

(上接第 548 页)

The Estimation of the Gravity Value in Qomolangma Peak

ZHANG Chijun¹

(1 Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences 54 Xudong Road, Wuhan, China 430079)

Abstract: It is meaniful to estimate the gravity value in Qomolangma peak. When the wave length for the topographic load $\lambda \leq 50$ km, the crustal strength is strong enough to keep the crust not deformed. Therefore, it is improper to use Airy-Heiskanen or Pratt-Hayford local compensation model to estimate the gravity. On the basis of this idea, utilizing four kinds of formulas, we give the gravity of everest $(976.970 \pm 7) \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Key words: topography wave length; estimation; gravity value; Qomolangma peak

About the author: ZHANG Chijun researcher. His major research is on earth gravity. His published papers concerned geodesy and geophysics are almost 100.

E-mail: zhwm@asch.whig.ac.cn