DOI: 10.13203/j.whugis2001.06.007
第26卷 第6期　　武汉大学学报·信息科学版　　Vol. 26 No. 6
2001年12月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　Dec. 2001

文章编号: 1000-050X(2001)06-0504-05　　文献标识码: A

形变反演模型的非线性平差

陶本藻[1]

(1　武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路129号, 430079)

摘　要: 阐述了反演问题参数估计的质量要求, 将反演理论中的分辨率和精度与平差中的良好统计性质作了对比分析, 为使反演参数得到良好估计, 提出平差处理对策。针对反演问题经常是非线性模型, 提出了非线性平差的几种方法, 最后给出参数筛选的原则和相应的统计检验方法。

关键词: 形变反演模型; 非线性平差; 系统权; 假设检验
中图法分类号: P207.2

1　形变数据反演的平差问题

随着高精度形变测量的开展, 对解算形变参数的精度要求愈来愈高, 以满足反演地球物理模式和工程变形机理的需要。

形变数据反演问题的主要工作是形变模型的建立、模型参数的解算以及物理解释。形变模型的建立是将大地测量数据表达成反演参数的某种函数或者说用一组参数去拟合形变数据, 建模是反演问题的核心。例如, 在地壳形变数据反演中, 常采用位错模型作为地震破裂模型; 在反演地球动力学的基本问题, 如板块运动、构造应力场等时, 则一般采用固体力学模型。

设形变观测向量为 $\boldsymbol{L}$, 反演参数为 $\boldsymbol{X}$, 则形变模型为:

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{f}(\underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}}) \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{L}$ 为地震位移场向量, $\boldsymbol{X}$ 为地震断层半长、宽度、倾角、震中位置等地震模式参数[1]。$\boldsymbol{L}$ 是由GPS获得的地壳水平运动速率数据, 用来反演块体旋转运动参数 $\boldsymbol{X}$[2]。

反演参数的解算有其特点: ①形变模型一般是非线性的, 属非线性反演, 由于一般难以取得参数的充分近似值, 用线性化模型解算将会含有较大的模型误差; ②形变模型一般是确定型模型和拟合型模型的结合, 存在参数的优化选取和筛选问题; ③形变模型有时是秩亏的或者是病态的, 因此观测向量 $\boldsymbol{L}$ 的方差阵也经常是奇异的, 即存在 $|\boldsymbol{D_L}|=0$等情况。

物理解释的核心问题, 是如何根据测量获得的数据信号, 推测形变体内部与信号有关部位的物理状态。其关键是需要较精确的反演参数。

除了反演物理解释外, 实际上是结合反演专业知识的一个测量平差系统, 包括观测数据和参数的先验信息、函数模型和随机模型的建立和调整、参数的估计和假设检验、参数的精度和置信区域等。形变模型的不断调整, 决定了平差过程的循环性。

2　反演参数估计的质量要求和平差对策

2.1　反演参数的估计应与观测数据拟合得很好

最小二乘法是一种最佳拟合方法, 所以应采用最小二乘平差估计反演参数。

对于模型(1), 其原则为:

$$[f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{L}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}[f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{L}] = \min$$

对于线性反演模型:

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{l}} = \underset{n\times t}{\boldsymbol{A}}\ \underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}} \tag{2}$$

其原则为:

$$(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{l})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{l}) = \min$$

设 $\boldsymbol{l}$ 的方差 $\boldsymbol{D_l}=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}$, 则 $|\boldsymbol{D_l}|\neq 0$ 时 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$; $|\boldsymbol{D_l}|=0$, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{+}$。

此处要求 $n>t$, 多余观测数大一些好。当

收稿日期: 2001-09-20。
项目来源: 测绘遥感信息工程国家重点实验室开放基金资助项目(000204)。

$n=t$ 时,表面上完全拟合,实际上是按无测量误差处理,反演并不可靠; $n<t$,则反演一般是无效的,必须采用特定方法谨慎处理。以下仅讨论 $n>t$ 情形。

2.2　反演参数的解应是惟一的

当式(2)中系数阵列满秩时, $R(\boldsymbol{A})=t$,其最小二乘解惟一。

如果在式(2)中, $\boldsymbol{A}$ 列亏, $R(\boldsymbol{A})=r<t$,产生秩亏 $d=t-r$,其最小二乘解满足法方程:

$$\boldsymbol{N X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P l} \qquad R(\underset{t \times t}{\boldsymbol{N}})=r<t \tag{3}$$

其解不惟一。原因是所选反演参数间存在某种约束,或者尚未顾及参数的基准和边界条件。在模型中引入这种约束和条件,可以消除秩亏现象,或者利用秩亏平差理论,找出符合实际需要的惟一最优解。

在反演模型中,式(3)有时出现病态现象,即虽然 $\boldsymbol{N}$ 非奇异,但其行列式 $|\boldsymbol{N}|$ 接近于零。此时,理论上认为其解惟一,但当法方程系数有微小变动时,对其解影响极大,实际上具有多解,这将会严重影响反演质量。造成这种问题的原因主要是所选参数间存在严重相关,因此,所选参数间应进行相关性检验,剔除相关参数,消除病态,使其实际上获得惟一解。

2.3　反演参数解要有较高的分辨率

设式(2)的任意解为:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{H l} \tag{4}$$

$\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆, $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{A}^{-}$,分辨矩阵的定义为:

$$\underset{t \times t}{\boldsymbol{R}}=\underset{t \times n}{\boldsymbol{H}} \underset{n \times t}{\boldsymbol{A}} \tag{5}$$

如果分辨矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$,即

$$\boldsymbol{H A}=\boldsymbol{I} \tag{6}$$

时,称为完全分辨。

对式(4)取期望,得:

$$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{H A X}$$

可见,当式(6)成立时, $E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的无偏估计。可见完全分辨与无偏估计是同一概念。如果 $\boldsymbol{H A} \neq \boldsymbol{I}$,参数解有偏,要求分辨率较高,就是要求有偏度较小。

当 $\boldsymbol{A}$ 列满秩时,存在广义逆 $\boldsymbol{H}$ 满足式(6),此时 $\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的左逆 $\boldsymbol{A}_L$,矛盾方程式(2)的最小二乘解为:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P l} \tag{7}$$

与式(4)对比,此时 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}$,满足式(6)。式(7)的 $\boldsymbol{X}$ 是无偏估计,参数解完全分辨,具有最高的分辨率。

当 $\boldsymbol{A}$ 列秩亏时,矛盾方程式(2)的最小二乘解为:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{N}^{-} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P l} \tag{8}$$

此时 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{N}^{-} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}^{-}$ 不惟一。取 $\boldsymbol{N}$ 的任何广义逆 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{N}^{-}$(除 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{N}^{-1}$外),其分辨矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{H A}$ 总不能等于单位阵,即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{H A}=\boldsymbol{N}^{-} \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{I}$。事实上,式(8)的解是 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) \neq \boldsymbol{X}$ 的有偏估计。

已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\underset{n \times t}{\boldsymbol{A}})=r<t$,则式(6)左边的秩为:

$$R(\boldsymbol{H A}) \leqslant R(\boldsymbol{A})=r<t$$

而式(6)右边的单位阵 $\boldsymbol{I}$ 的秩 $R(\boldsymbol{I})=\boldsymbol{t}$,两边秩不等,说明在 $\boldsymbol{A}$ 列亏时,式(6)不可能成立,亦即 $\boldsymbol{A}$ 的这个广义逆 $\boldsymbol{H}$ 此时不存在。

$\boldsymbol{A}$ 列秩亏,完全分辨的估值 $\boldsymbol{X}$ 不存在,此时应尽可能寻求分辨率较高的解,秩亏法方程式(3)的最小范数解或部分参数最小范数解就是分辨率较高的,或者说有偏度较小的估计方法。在反演平差时,可令近似值较为精确的那些参数的范数为最小,即对式(3)附加最小范数条件:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W X}=\min$$

其参数解为:

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{N}_m^{-})_{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P l} \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{W}$ 为基准权; $(\boldsymbol{N}_m^{-})_{\boldsymbol{W}}$ 为带权 $\boldsymbol{W}$ 的最小范数逆。

2.4　反演参数解的精度要高

由式(4)的反演参数任意解 $\boldsymbol{X}$ 的方差为:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{H D}_{l} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\sigma_0^2 \boldsymbol{H Q H}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

要求各参数的估计方差要小。

满秩平差问题的参数估计式(7),秩亏平差参数的最小二乘最小范数解式(9)也具有方差最小性,即解的精度最高。

综上所述,对于线性反演问题,质量最高要求与平差参数估计是一致的,即解惟一、最小二乘平差、参数最优线性无偏估计。当无偏与方差最小不能同时满足时,应采用平差中一贯原则,反演参数保持方差最小性,有偏但有偏度要小;而单位权方差、参数精度估计则保持无偏性,方差最小性不能满足。

对非线性反演问题,也可按上述要求尽可能地获得良好的参数解。对于非线性函数 $f(\boldsymbol{X})$,由于

$$E[f(\boldsymbol{X})] \neq f E([\boldsymbol{X}])$$

所以非线性的最小二乘估计将不可能是无偏的。然而,当非线性函数用台劳公式展开仅取至一次项时,其线性最小二乘估计是最优无偏的,自然可以通过迭代求得非线性函数的最小二乘估计,以

保持其良好的统计性质。

3 形变反演模型的非线性平差

非线性反演的函数和随机模型为:

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{f}(\underset{t\times1}{\boldsymbol{X}}) + \Delta \tag{11}$$

$$\boldsymbol{D}_L = \boldsymbol{D}_\Delta = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q} \tag{12}$$

设 $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的近似值, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{x}$, 将 $f_i(\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处用台劳公式展开得:

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{X}_0) + \boldsymbol{f}'_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{x}) \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{13}$$

$\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{x})$为二次和二次以上项。若仅考虑二次项可表示为:

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{x} \tag{14}$$

式中,

$$\boldsymbol{f}'_i = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_t)_i^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{f}_j = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}_j}\right|_{X_0}$$

$$\boldsymbol{f}''_i = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1t} \\ \cdots & & \cdots \\ f_{t1} & \cdots & f_{tt} \end{bmatrix}; \boldsymbol{f}_{jk} = \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}_j \partial \boldsymbol{X}_k}\right|_{X_0}$$

3.1 附加常数项的迭代平差

将式(13)代入式(11)后的误差方程为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{R}) \tag{15}$$

式中, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L} - f(\boldsymbol{X}_0)$, $\boldsymbol{A} = (f'_1, f'_2, \cdots, f'_n)^{\mathrm{T}}$, 并将 $\boldsymbol{R}$ 仅视为常数项予以补偿。在式(15)中不考虑 $\boldsymbol{R}$, 最小二乘估值为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{l}$$

代入式(13)中的 $\boldsymbol{R}_i(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, 一般可取至二次项, 即取 $\boldsymbol{R}_i = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}''_i\hat{\boldsymbol{x}}_1$。

将 $\boldsymbol{R}_i$ 代入式(15), 得最小二乘估值为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{R} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_1 + (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\boldsymbol{R} \tag{18}$$

完成一次计算, 将其结果 $\boldsymbol{X}_0 + \hat{\boldsymbol{x}}_2$ 再作为参数的近似值, 重新计算常数项 $\boldsymbol{l}$, 再用上述方法迭代计算, 迭代时仅改变常数 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{R}$, 最后结果记为 $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{V}$。

由于 $\boldsymbol{R}$ 值仅作为线性化平差的补偿, 虽是参数 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 近似地不顾及其误差, 则仍有:

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \boldsymbol{N}^{-1}, \boldsymbol{Q}_{VV} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{n - t}$$

此法实际上是对高斯-牛顿算法的改进, 反映在每次迭代计算的第二步, 即引入了 $\boldsymbol{R}$ 项, 算法与近代平差一致, 十分简便。

此法是将余项 $\boldsymbol{R}$ 视为常数项。下面提出的方法, 则是将 $\boldsymbol{R}$ 归入误差项。

3.2 附加系统权平差

误差方程为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}$$

将 $\boldsymbol{R}$ 归入误差项, 视为非线性函数线性化的系统模型误差, 此时 $\boldsymbol{l}$ 的误差为 $\Delta + \boldsymbol{R}$, Δ 与 $\boldsymbol{R}$ 独立, 则有:

$$\boldsymbol{D}_l = \boldsymbol{D}_{\Delta+R} = \boldsymbol{D}_\Delta + \boldsymbol{D}_R \tag{19}$$

$\boldsymbol{R}_i$ 仅设为二次项, 即由式(14)确定。按二次型方差和协方差公式[3]:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_y) + 4\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_y) + 4\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) \tag{21}$$

可得 $\boldsymbol{R}_i$(式(14))的方差-协方差为:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_i) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{D}_x) + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{R}_j) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}''_j\boldsymbol{D}_x) + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}''_i\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}''_j\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

用 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ 代 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{D}_{\hat{x}_1} = \sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{\hat{x}_1\hat{x}_1}$ 代 $\boldsymbol{D}_x$, 即得上两式的估值 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_i)$和 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{R}_j)$, 由此构成 $\boldsymbol{D}_R = \sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{RR}$。

此时平差的随机模型为:

$$\boldsymbol{D}_{\Delta+R} = \sigma_0^2(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_{RR}) = \sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1} \tag{24}$$

平差原则为:

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_{RR})^{-1}\boldsymbol{V} = \min$$

其解为:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_{RR})^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_{RR})^{-1}\boldsymbol{l} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_{RR})^{-1}\boldsymbol{A})^{-1} \tag{26}$$

其平差步骤为: ①先不考虑 $\boldsymbol{R}$ 项作预平差, 求误差方程的最小二乘估值 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$, $\boldsymbol{Q}_{\hat{x}_1\hat{x}_1}$, σ_0^2; ②按式(22)、式(23)构成 $\boldsymbol{D}_R$、定权; 最后作一次性平差, 求出 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$。此法不必迭代, 称为附加系统权平差法。需要指出, 平差时一般可将 $\boldsymbol{D}_R$ 视为对角阵, 可以不必考虑 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_j$ 的协方差。

由于形变模型的建立, 参数设置、权的匹配、先验统计特性的正确性等一系列问题比较复杂, 无论采用何种平差方法, 验后必须进行平差模型正确性的检验。

4　反演参数筛选的统计检验

在形变模型中, 如果引入不必要的参数, 理论已经证明, 过度参数化将会影响模型中主参数的精度。为此, 需要对参数的显著性进行检验。

模型参数分为主参数和副参数两类, 主参数必须存在, 副参数可以筛选。

设副参数为 $\underset{u\times 1}{\boldsymbol{y}}$, 经平差求得估值 $\hat{\boldsymbol{y}}$, 协因数 $\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}$, 单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2 = \Omega/f$, 检验原假设为:

$$H_0: \underset{c\times u}{\boldsymbol{H}}\ \underset{u\times 1}{\boldsymbol{y}} = 0$$

当 $c=u$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}$ 时, 检验全部参数是否为零, 特别地当 $c=1$, 且 $\boldsymbol{H}=(0\ 0\ 1\ 0\ 0)$时, 即检验其中之一的显著性。检验统计量为:

$$F = \frac{(\boldsymbol{H}\hat{y})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{H\hat{y},\ H\hat{y}}^{-1} \boldsymbol{H}\hat{y}/c}{\Omega/f} \tag{27}$$

F 服从自由度为c, f 的F 分布。拒绝域为:

$$F > F_{(1-\alpha),\ c,\ f}$$

对于检验一个参数 $\boldsymbol{y}_i$ 情形, 其统计量为:

$$F = \frac{\hat{\boldsymbol{y}}_i \boldsymbol{Q}_{\hat{y}_i\hat{y}_i}^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}_i}{\Omega/f} = \frac{\hat{\boldsymbol{y}}_i^2}{\hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_{\hat{y}_i\hat{y}_i}} = \frac{\hat{\boldsymbol{y}}_i^2}{\hat{\sigma}_{\hat{y}_i}^2} \tag{28}$$

对于反演参数的引进的合理性要充分注意, 而验后检验筛选的要求可以适当放宽, 目的是不要轻易舍去所引进的参数, 但次要参数应通过检验清除。

在回归分析中, 一个比较合理的标准较宽的筛选准则[8] 在反演问题中可以应用。即当

$$\boldsymbol{D}_{\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}} \geqslant \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

时, 即使筛去的参数 $\boldsymbol{y}$ 的影响确实存在, 还是可以使余下的参数精度得到提高。

对式(29)两边左乘 $\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}$, 右乘 $\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\boldsymbol{y}$, 得:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\boldsymbol{y} \geqslant \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\boldsymbol{y}\right)2$$

即

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\boldsymbol{y}/\hat{\sigma}_0^2 \leqslant 1 \tag{30}$$

式中, $\boldsymbol{y}$ 与 σ_0^2 未知, 用 $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\sigma}_0^2$ 代替, 得:

$$\hat{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}/\hat{\sigma}_0^2 \leqslant 1 \tag{31}$$

这就是式(29)的具体化。于是,

$$F = \frac{\hat{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}}{u\hat{\sigma}_0^2} \leqslant \frac{1}{u} \tag{32}$$

u 为向量$\boldsymbol{y}$ 的维数, 这就是式(27)当 $\boldsymbol{H}$ 为u 阶单位阵的情况。式(32)说明, 当同时检验 u 个参数时, 由 $\boldsymbol{y}$ 估计的单位权方差$\frac{1}{u}\hat{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{y}\hat{y}}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}$ 要大于由观测残差估计的单位权方差$\hat{\sigma}_0^2$ 的 $1/u$ 就应保留这些参数。当 $u=1$ 时, 由式(32)可得:

$$t = \boldsymbol{F}^{\frac{1}{2}} = \hat{\boldsymbol{y}}_i \Big\backslash \hat{\sigma}_0 \sqrt{\boldsymbol{Q}_{\hat{y}_i\hat{y}_i}} \leqslant 1 \tag{33}$$

t 为服从自由度为f 的t 变量。式(33)表示, 如果 $\hat{\boldsymbol{y}}_i$ 的值小于其 1 倍中误差, 该参数应该筛去, 而通常的规则大约是 2～3 倍中误差。

此外, 在决定某些参数取舍时, 应考虑选择单位权方差估计最小的模型。这是由于残差平方和的值随着副参数的增加而减少, 为了防止选取过多的副参数不宜选择残差平方和最小的模型。当副参数增加时, 残差平方和减少, 单位权方差分母也减少, 总趋势使单位权方差估计值较小。当参数个数达到一定的时候, 单位权方差估计值会达到最小, 再增加参数个数, 其估计值会上升, 避免了参数过度化。

参　考　文　献

1　赵少荣, 陶本藻, 于正林. 论变形测量数据的反演. 测绘学报, 1992(3): 161～171

2　许才军, 刘经南, 晁定波, 等. 利用 GPS 复测资料研究华北地块旋转运动. 武汉测绘科技大学学报, 2000, 25(1): 74～77

3　崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差(新版). 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 2001. 102～103

4　Jackson D D, Matsuura M. A Bayesian Approach to Nonlinear Inversion. Geophys. Res., 1985, 90: 581～591

5　伍吉仓, 陈永奇. 形变数据反演的贝叶斯方法. 见: 陈俊勇编. 大地测量学论文专辑. 北京: 测绘出版社, 1999. 187～195

6　陶本藻. 测量数据统计分析. 北京: 测绘出版社, 1992. 61～63

7　Koch K R. Parameterschatzung und Hypothesentests in Linearen Modellen. Bonn: Dümmler, 1980. 243～246

8　陈希孺, 王松桂. 近代回归分析. 合肥: 安徽教育出版社, 1987

作者简介: 陶本藻, 教授, 博士生导师。现从事现代测量数据处理和地壳形变地球动力学解释的研究。代表成果: 青藏高原地壳运动监测及地球动力学机制研究; 测量平差模型和模型误差的理论《测量数据统计分析》,《自由网平差与变形分析》等。发表论文百余篇。

E-mail: tbz0204@yeah.net.cn

Non-linear Adjustment of Deformation Inversion Model

TAO Benzao[1]

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: In this paper, the non-linear adjustment of deformation models is studied. Two quality criterions, distinguishing rate and precision, are discussed, analyzed and compared with good statistic character required by adjustment. At the same time, the adjustment method of the practical problem is given according to its quality request.

Key words: deformation inversion model; non-linear adjustment; system weight; hypothesis testing

About the author: TAO Benzao, professor, Ph. D supervisor. His interested fields are theoretic research on data processing and geophysics interpretation of crustal deformation. His main achievements are the research project of monitoring the present-day crustal movements and studying its geodynamical mechanism in Qinghai-Tibet Plateau; the research project of the theory of adjustment model and its error; "The Monograph of Statistical Analysis of Surveying Data"; "The Monograph of Deformation Analysis of Free Net Adjustment", etc. His published papers are more than 100.

E-mail: tbz0204@yeah. net. cn

(上接第 503 页)

Hardy Function Interpolation and Its Applications to the Establishment of Crustal Movement Speed Field

LIU Jingnan[1] *SHI Chuang*[2] *YAO Yibin*[3] *TAO Benzao*[3]

(1 Presidential Secretariat, Wuhan University, Luojia Hill, Wuhan, China, 430072)

(2 Research Center of GPS, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(3 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: The Global Positioning System (GPS) has been widely used in survey and its relative areas in China since the end of 1980s. Several large-scale high precision GPS networks have been established since 1991. The integrating adjustment of these GPS networks has been finished. But the quantity of high precision GPS points is limited, so the crustal movement image of the surveyed GPS points is half-baked. For these reasons, for the first time we use hardy function interpolation to establish a largely-covered and valuable speed field model, with which the crustal movement imags are also obtained.

Key words: hardy function interpolation; speed field model; crustal movement image

About the author: LIU Jingnan, professor, Ph. D supervisor, member of the Chinese Academy of Engineering. His major research orientations include space geodesy and geodynamics. His typical achievements are the theory and scheme high precision GPS data processing in China; the comprehensive software of GPS satellite positioning processing; the software of WADGPS data processing; the crustal movement and deformation of Qinghai-Tibet Plateau using GPS, etc.

E-mail: jnliu@wtusm. edu. cn