

文章编号: 1000-050X(2000)06-0505-05

# Chandler 摆动轨迹的非线性螺旋线拟合及机制的研究

王文均<sup>1</sup>

(1 中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学开放研究室, 武汉市徐东路 174 号, 430077)

**摘要** 依照非线性动力学原理, 从摆动的不稳定性出发, 推出 Chandler 摆动的非线性动力学螺旋运动轨迹模型。给出 Chandler 摆动的非线性动力学螺旋轨迹解法, 由 IERS 实测数据中的 Chandler 摆动位移坐标值, 可以得到每两个数据间的螺线插值参数。这对于以往的线性插值的折线拟合是一个改进, 也为 Chandler 摆动的螺旋运动轨迹给出了理论解释。计算得到, Chandler 摆动平均每年螺旋的螺距有 6.75mas。

**关键词** Chandler 摆动; 螺旋运动轨迹; 非线性动力学

**分类号** P222 文献标识码 A

Chandler 摆动(CW)的经典动力学方程是线性的, 求出来的结果应是一个椭圆。但是, 实际的运动积分总是螺旋, 实际结果也是这样, 如图 1 所示。以往关于这一点的讨论很少, 一般都未给出解释。很早就有学者估计运动椭圆的椭率, 如 Larmor(1896)计算得到的椭率为 0.016, 高布锡(1999)又根据现有的观测资料检测出运动椭圆椭率为 0.011, 长轴方向约为东经 9°。但是, 由于 CW 运动轨迹并非椭圆, 在激发和阻尼并非平衡的情况下, 运动应为螺线。在螺线轨迹下, 椭率的精度是否能够达到, 椭率是否还有意义, 都值得讨论。对于 CW 的不稳定运动可以有两种解释: ① CW 本身由于激发和阻尼不平衡而不稳定; ②由于 CW 上叠加有其他的长周期运动, 如 Markowitz 摆动。不过, 现在一般还是认为长周期运动是 CW 固有的, 是其激发和衰减不平衡造成的, 否则, CW 是十分稳定的自由摆动。

近 20 年来, 非线性动力学发展十分迅速, 早就能精确地分析螺旋运动。弄清了 Chandler 摆动的螺旋运动轨迹, 可以更好地研究 CW 的激发和衰减动力机制。本文从摆动的运动合成出发, 讨论摆动速度与激发和衰减因素的关系, 得到了摆动的螺旋运动方程。对螺旋运动方程求解, 容易发现 CW 运动轨迹应是对数螺线, 螺距是解的关键参数。运用 IERS 极移数据中的 CW 结果,

可以估计出 CW 每步运动的螺距, 从而得到 CW 的螺线轨迹方程。应用此方程插值、拟合会更精确, 寻找激发和衰减的动力机制也能换一个角度。本文得到的螺距每一步都能表示出来, 结果发现, 每一周期的 CW 都不是封闭的椭圆, 都有一个螺距。螺距的平均值为零, 只表明螺旋向外与向内是平衡的。运用 IERS 数据中比较可信的 1945~1997 年的 CW 实测结果, 计算得到向外与向内分别有平均每 CW 周期 6.75mas 的螺距, 实际扩张最大可达 25.42mas, 收缩最快时每周期 -31.27mas。显然, 这应该是激发的不稳定造成的, 值得研究。而且, 正因为从这里能够提取出 CW 的不稳定性, 得到的不稳定序列恰好是研究 CW 激发机制的基础之一。实际上, 只要 Chandler 摆动的激发和衰减不能达到平衡, 大气和海洋的激发存在, 运动轨迹就是螺线, 因此, 螺旋轨迹的讨论也为研究 Chandler 摆动的激发和衰减提供了一个新的计算方法。本文首先推出不稳定的动力学螺旋运动方程, 接着计算实测序列的不稳定参数, 最后讨论螺旋轨迹拟合的长期趋势。

## 1 激发和衰减

CW 频率的时间序列可以从 IERS 极移数据中计算得到, 如图 2 所示。从这一结果可以看出,

频率长期稳定在一个平均水平上, 平均频率为 0.842 893 9, 对应的周期为 433. 32d, 但短期看, 频率很不稳定, 振荡剧烈, 永不停留在平均水平上。为此, 可以将长期频率视作固有频率, 在此平均水平上讨论摆动的不稳定性。以往研究 CW 的激发时, 往往只注意大气等因素对其运动切线方向的角动量交换, 忽略其对摆动向心以及离心方向的角动量交换。CW 运动切线方向分量的激发是维持 CW 的频率在固有频率上的因素。然而频率的实际结果与固有频率有差异, 表明了激发的不稳定。为了得到激发不稳定部分的影响, 根据 CW 频率的长期平均十分平稳, 可以认为长期结果的频率是切线方向的分量, 不稳定部分是短期的频率变化, 构成频率的径向分量。实际上, 这种径向的角动量交换与阻尼可能不平衡, 会形成一个径向的角速度。这个方向的角动量很小, 很难精确测量, CW 的固有频率与实际瞬时频率的差实际上表明了这种不平衡的结果。设 CW 的固有频率为  $\omega_c$ , 瞬时频率  $\omega$  是时间的函数, 频率差  $\beta = \omega - \omega_c$  可正可负, 为正表明有一个向心的角频率; 为负表明有一个激发的角频率。如果  $\beta$  为零, 则 CW 维持为椭圆轨迹。在摆动轨道上, 摆动角频率  $\omega$  由上述固有频率和正负频率差构成的矩形对角线表示。

设  $m$  为 CW 的角位移, 以  $\oplus$  表示向量和, 则有: 角位移=切向角位移  $\oplus$  径向角位移=切向角速度/角频率  $\oplus$  径向角速度/角频率=切向角速度/角频率  $\oplus$ (角位移  $\times$  径向角频率分量/角频率)。径向角频率分量就是上述频率差。于是, 固有的摆动轨迹角位移为  $(1/\omega_c)d\mathbf{m}/dt$ , 径向角位移为  $(1/\omega_c)\beta\mathbf{m}$ , 实际角位移  $i\mathbf{m}$  为二者的向量和, 乘以  $-i$  表示角位移从运动方向改变为运动的法向。得到具有径向激发的 CW 角位移方程为:

$$-i\mathbf{m} = \frac{1}{\omega_c} \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \frac{\beta}{\omega_c} \mathbf{m} \quad (1)$$

实际上, 式(1)与 Lambeck (1980) 中的式(3.2.9)类似, 只是表示的意义不同, 这里右边后一项代替了激发项。激发函数本来只是时间的函数, 不是角位移  $\mathbf{m}$  的函数, 然而在这里, 为了从 CW 角位移时间序列中反算出激发和衰减的作用结果, 推导出的激发项中出现了角位移的变化。注意到 CW 角位移  $\mathbf{m} = X - iY$ ,  $X$  和  $Y$  分别为 CW 位移在坐标轴方向的分量。式(1)容易变为齐次线性方程组:

$$\frac{dX}{dt} = -\beta X - \omega_c Y, \quad \frac{dY}{dt} = \omega_c X - \beta Y \quad (2)$$

式(2)类似于文献[1, 2, 3]引入的带滞弹性变阻尼方程组, 不过这里将激发项的作用归并到带  $\beta$  的阻尼项中去, 变成齐次的了。因此, 频率差  $\beta$  在这里是激发和衰减共同作用的结果。运用动力系统方法, 方程(2)可以离散为迭代齐次线性差分方程组:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= -\beta X_n - \omega_c Y_n \\ Y_{n+1} &= \omega_c X_n - \beta Y_n \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\beta, \omega$  都是时间的函数, 计算时都应该带脚标  $n$ 。此方程的优点是能用 IERS 实测数据的前项与后项互相推求, 应用起来十分方便。

## 2 螺旋轨迹模型

为求式(3)的解, 先将其写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta/\omega_c & -1 \\ 1 & -\beta/\omega_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_c X_n \\ \omega_c Y_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

矩阵的特征根为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\beta/\omega_c + i(1 - \beta/\omega_c) \\ \lambda_2 &= -\beta/\omega_c - i(1 - \beta/\omega_c) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)写成指数形式为:

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho e^{\pm \varphi} \\ \rho &= \sqrt{(-\beta/\omega_c)^2 + (1 - \beta/\omega_c)^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega_c - \beta}{-\beta} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

这样, 式(4)在极坐标变换下的解为:

$$r = r_0 \rho^{(\theta - \theta_0)/\varphi} = r_0 e^{\alpha(\theta - \theta_0)}, \quad \alpha = (\ln \rho)/\varphi \quad (7)$$

式中,  $r_0$  应视为前项振幅;  $\theta_0$  为前项相位;  $\alpha$  为对数螺距, 用  $\exp(2\pi\alpha)$  可算出每年振幅的放大率。显然, 式(7)给出了 CW 的对数螺线轨迹。只要后项相位与前项系数之差不为零, 就不会得出椭圆轨迹。 $\alpha$  为正时, 对数螺线轨迹向外扩张;  $\alpha$  为负时, 对数螺线轨迹向内收缩;  $\alpha$  时正时负, 正好表明运动不稳定, 有时激发大于阻尼, 有时阻尼大于激发。

## 3 实际计算结果

为验证对数螺线解的正确性, 本文采用 IERS 极移数据。考虑到 1945 年以前数据的不可靠性, 从中截取 1945 年以后的数据。图 1 给出了 1945 ~ 1997 年 CW 的位移时间序列, 连线展布在很开阔的空间, 表明 CW 并非椭圆, 而是螺线。

其计算步骤如下:

1) 用位置序列计算出瞬时频率, 得到的结果如图 2 所示。计算出平均频率为 0.842 893 9, 对应的周期为 433.32d。

2) 由式(5)计算线性差分方程的特征根的实部和虚部, 然后根据式(6)转换成极坐标参数。得到的相对振幅  $\rho$  全在 1 的周围, 有的稍大于 1, 有的稍小于 1。 $\varphi$  的符号与  $\rho$  对应,  $\rho$  大于 1 时,  $\varphi$  的符号为正, 反之则为负。由式(7)的第一式容易看出,  $\varphi$  实际是相对相位, 不论正负都有稳定的平均值 1.566 131 55。 $\rho$  的值不够稳定。按每年一个值计算,  $\alpha$  的值也不够稳定, 其平均值为  $\pm 0.029 877$ 。为区别指向中心焦点或向外, 分别对  $\alpha$  按  $\rho$  大于 1 时取正号, 反之取负号, 但是计算结果表明此平均值代表性不是很好, 明显带有调

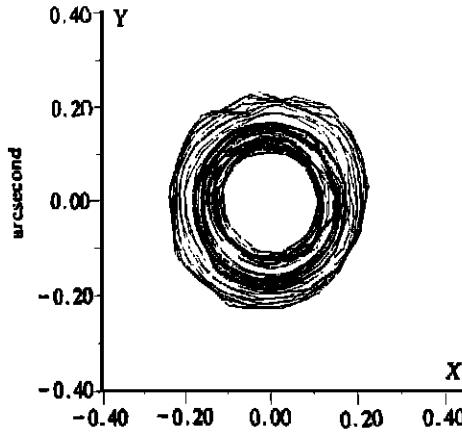


图 1 CW 位置螺线实测结果

Fig. 1 Observed Result of CW Position as Spiral

制作用, 不能用平均值来计算, 最好还是使用经验值序列。图 3 为对数螺距相对变化时间序列。这样, 对数螺线方程为:

$$r = r_0 e^{\alpha(\theta - \theta_0)} \quad (8)$$

式中,  $r_0$  为任一个观测振幅;  $\theta_0$  为相位延滞的起算值或初始值, 可根据瞬时频率算出, 其结果见图 4。实际计算时  $r$  取  $r_{n+1}$ ,  $r_0$  取  $r_n$ ,  $\alpha$  取  $\alpha_{n+1}$ ,  $\theta$  取  $\theta_{n+1}$ ,  $\theta_0$  取  $\theta_n$ 。这样可以用作迭代计算。

3) 计算对数螺线轨迹的放大率。首先可由  $\exp(2\pi\alpha)$  得到振幅逐年放大率, 大于 1 为扩张, 小于 1 为收缩。再乘以 433.3/365.24 折算成每 CW 周期的振幅放大率, 得到平均螺距以 mas 为单位, 不论正负, 每年都有 6.75mas, 振幅扩张最大为 25.42mas, 振幅收缩最大为 -31.37mas。

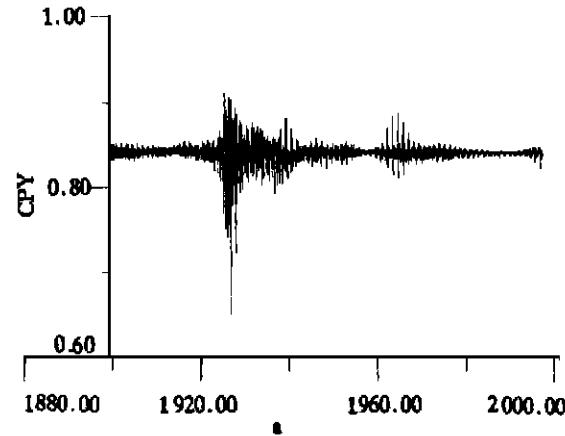


图 2 CW 瞬时频率时间序列

Fig. 2 Time Series of CW Frequency in Variation

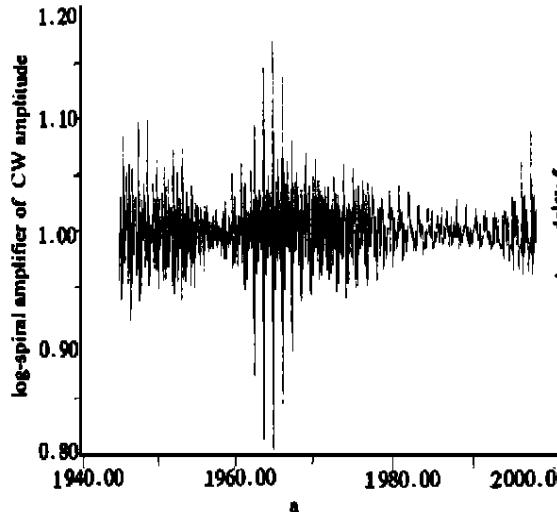


图 3 螺距相对变化时间序列

Fig. 3 Time Series of Log-spiral-displacement in 0.05a Lag

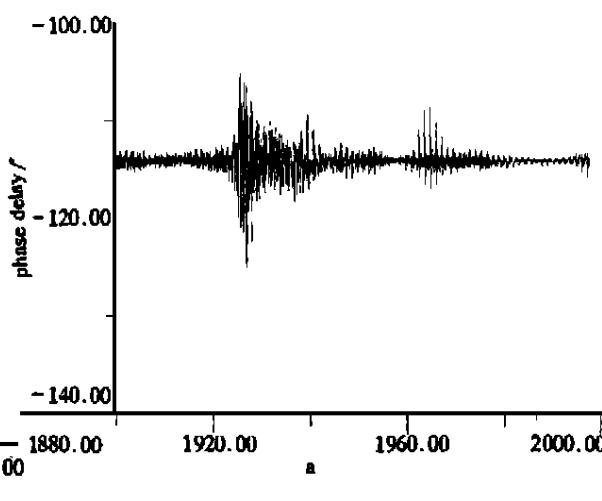


图 4 相位延滞变化序列

Fig. 4 Time Series of Phase Delay of CW

图 5 为 CW 振幅每周期放大率的时间序列, 表明振幅的变化相当剧烈, 也能从中看出哪些年变化大, 哪些年变化小。图 6 给出按年累计的螺距变

化曲线, 其中看不出按年累计的螺距变化有明显规律。

也可以用计算得到的振幅放大率直接取初值

经验地得出 CW 的振幅序列, 结果与实际振幅图形完全重合。CW 的振幅经验值与实际振幅的平方误差仅为 0.027 5mas。虽然分析不能得到一个一成不变的螺线方程, 但是用实测数据得出的

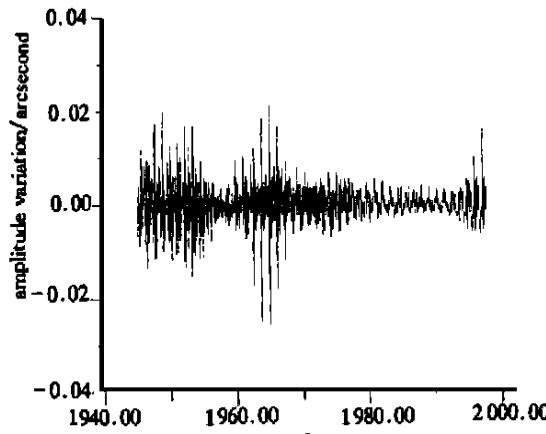


图 5 振幅每周期放大率序列

Fig. 5 Amplifier Time Series of CW Amplitude Per Period

## 4 结 论

1) 如果认为 CW 在固有频率情形有不稳定的激发和衰减, 而且激发和衰减不平衡, 那么其运动轨迹一定是一条螺线。激发大于衰减时, 螺线向外扩张, 激发小于衰减时, 螺线向内收缩。平均计算, CW 每周期扩张或收缩 6.75mas, 扩张最大可达 25.42mas, 收缩最大为-31.37mas。

2) CW 运动轨迹的对数螺线方程的主要参数, 即振幅的相对变幅平均为  $\pm 5.4\%$ , 负号表示指向焦点的螺线。但是参数很不稳定, 只能用经验值序列来对每一段轨迹做拟合, 拟合误差仅为 0.027 5mas。这表明螺线拟合运动轨迹精度很高。

3) 研究 CW 的激发和阻尼的共同作用, 结果未发现每年的振幅变化有明显规律, 但也可能不是随机的, 其中应该含有激发的不稳定因素。研究此序列, 可以找出激发与哪些因素有关, 比直接使用 CW 振幅序列要好一些。

## 参 考 文 献

1 王文均. Chandler 摆动的非线性阻尼衰减. 非线性动力

螺距参数序列能够使得拟合较为精确。要得出理论螺线方程, 必须弄清激发和衰减的详细情况, 不过, 由于激发和衰减很可能都不稳定, 螺距参数应该不会有一个稳定的值。

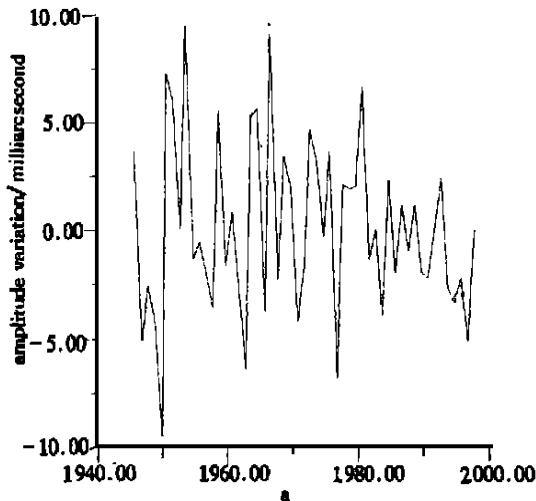


图 6 逐年振幅变化曲线

Fig. 6 Yearly Amplitude Variation Curve in Log-spiral

学学报, 1999, 6(1): 64~68

- 2 王文均. 用 IERS 极移数据直接测算 Chandler 摆动  $Q$  值. 武汉测绘科技大学学报, 1999, 24(4): 351~354
- 3 Wang W J. Nonlinear Dynamics Method for Excitation and Attenuation of Chandler Wobble. In: Dick S, McC D, Lucum B, eds. IAU Colloquium 178: Historical and Scientific Problem. U. S. Naval Observatory Washington D. C USA: Astronomical Society of the Pacific, 1999
- 4 高布锡. 对钱德勒摆动椭率及长轴方向的检测. 天文学报, 1999, 40(2): 139~141
- 5 王文均. 地极移动的非线性动力学机制. 天文学报, 1998, 39(3): 287~297
- 6 王文均. Chandler 摆动的非线性分岔耗散. 天文学报, 1999, 40(1): 94~100
- 7 刘式达, 刘式适. 非线性动力学和复杂现象. 北京: 气象出版社, 1989

王文均, 男, 53岁, 副教授。现从事应用数学、理论物理、水文水资源、地质地震、地球动力学等方面的研究。代表成果: Chandler 摆动周期和  $Q$  的理论值; Chandler 摆动的非线性分岔耗散; Chandler 摆动的非线性阻尼衰减; 用 IERS 极移数据直接测算 Chandler 摆动  $Q$  等。

E-mail: wwj@asch.wmrig.ac.cn

# Nonlinear Spiral Simulation of Chandler Wobble Orbit

WANG Wenjun<sup>1</sup>

(1 Laboratory of Geodynamics, Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences,  
174 Xudong Road, Wuhan, China 430077)

**Abstract** The classical dynamics model of polar motion is linear and its solution is of elliptic orbit. But there are excitations and damping in Chandler wobble, since the excitation function is not very stable. The damping and excitation cannot be made both ends meet in each period, too. So Chandler wobble may not follow elliptic orbit, instead its orbit should be spiral. The real position of CW shows rotating in a broad area. Of course, maybe Chandler wobble reserves energy lossless in long time. However, at least in limited observations, Chandler wobble does not possess close elliptic orbit. No other than the damping and excitation are balanceable, the orbit may be elliptic. In this paper, spiral motion equation of Chandler wobble is deduced from combination of displacement in tangent and radial directions. In fact, the frequency series of CW is not stable on the inherent frequency. There is difference between the real frequency and the inherent frequency. The difference must be caused by the in-stable excitation. Considering that the CW complex amplitude may be represented by the vector sum of the tangent and radial components, the complex amplitude is written as the vector sum of two terms, one is the free sway and the other is the common action of excitation and damping. Spiral orbit of Chandler wobble is better solved and coefficients of logarithm spiral equation are attracted empirically. The amplitude of CW logarithm spiral equation is provided as  $\pm 5.4\%$  per period, here the plus represents spiraling-out and the minus spiraling-in. The average spiral displacement amplitude of each Chandler period is given 6.75 milliarcsecond (mas), meanwhile 20 mas to -30 mas in maximum. Since the logarithm spiral parameter is instable one, it can be used empirically. Applying the empirical logarithm spiral equations to deduce Chandler amplitude, the square error with respect to the observation amplitude is only 0.027 5 mas. On the other hand, the time series of the spiral displacement of each Chandler period shows an irregular process. By this time series, the inherent free sway has been moved away and remain signal should be from the excitation function. The action of excitation may be attracted more easily from the spiral amplitude moving away the average ellipse of the ideal orbit of Chandler wobble.

**Key words** Chandler wobble, spiral orbit, nonlinear dynamics

---

WANG Wenjun male, 53, associate professor. His research orientations are applied mathematics, probability and statistics, nonlinear dynamics, water resources earthquake earth rotation dynamics etc. His typical achievements include nonlinear dynamics mechanism of Chandler wobble; nonlinear bifurcation dissipation of Chandler wobble nonlinear damping attenuation of Chandler wobble; specification of  $Q$  for Chandler wobble directly from polar motion data; etc.

Email: [wwj@asch.whig.ac.cn](mailto:wwj@asch.whig.ac.cn)