第 26 卷 第 1 期 武汉大学学报·信息科学版 Vol. 26 No. 1
2001 年 2 月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Feb. 2001
文章编号:1000-050X(2001)01-0070-05 文献标识码:A

坐标转换模型尺度参数的假设检验

徐天河[1] 杨元喜[2]

(1 郑州信息工程大学测绘学院,郑州市陇海中路 66 号,450054)
(2 西安测绘研究所,西安市雁塔路中段 1 号,710054)

摘 要:介绍了基于空间尺度为各向异性的三尺度参数坐标转换模型及其转化形式,从理论上分析了坐标转换中如何对尺度参数进行选择,给出了坐标转换模型中尺度参数假设检验模型的统一表达形式,构造了相应的检验统计量。该检验模型能对三尺度坐标转换模型、双尺度模型和单尺度模型间的相互转化及尺度参数的显著性等情况进行假设检验。通过该假设检验方法对两算例进行了解算,得出了一些有益的结论。

关键词:坐标转换;三尺度坐标转换模型;线性约束;假设检验
中图法分类号:P226.3;P207.1

坐标转换中,广泛使用七参数 Bursa-Wolf 转换模型,该模型假设尺度空间为各向同性,故只需解算一个尺度参数。这种尺度参数转换模型解算的尺度参数实质是各个轴向尺度的综合平均,倘若一个轴向坐标精度与其他轴向相差较大,则该轴向尺度误差必将影响其他轴向的尺度参数,造成参数解算的精度下降,用此时求得的转换参数再进行大地网的转换,必然使大地网产生区域性的变形。文献[1]从函数模型出发,通过应变分析法进行了网的转换与变形研究,为分区计算坐标转换参数、网点取舍以及转换模型的选择与改化提供了理论依据[1]。近年来,不少学者从随机模型方面对大地基准转换进行了研究。Kutterer 采用加权法有效地控制了高程分量的低精度对整个参数解算的影响[2];杨元喜采用抗差估计方法对大地基准转换进行了研究,它能有效地控制异常误差对转换参数解算结果的影响[3],但对于高程分量低精度的约束力有限[3]。三尺度参数坐标转换模型协调了各轴向尺度不一致造成的影响,在一定程度上避免了由于单个轴向尺度差异较大而造成的整个空间尺度的压缩或拉伸,最终可望提高整个参数解算的可靠性,尤其可望提高平移参数解算的精度。

然而,若各轴向尺度并无差别或差别非常小,用三尺度坐标转换模型则增加了不必要的参数,会在一定程度上降低参数解算的精度。因此,在具体实践中,不得不在单尺度转换模型、三尺度模型或双尺度模型之间作出选择。从内外符合精度的比较中,可以进行尺度参数的选择与分析,但这种方法未给出一个客观的判别与评价。基于此,本文引入了带约束的线性回归模型的假设检验理论,给出了坐标转换模型尺度参数的统一假设检验模型,构造了相应的检验统计量。它不仅能对尺度参数的显著性进行检验,还能对三尺度坐标转换模型、双尺度模型及单尺度模型间的相互转化进行假设检验。

1 坐标转换模型简介

1.1 单尺度参数坐标转换模型

假定坐标点 i 在新坐标系中的坐标为 $(X_i, Y_i, Z_i)_N$,在旧坐标系中的坐标为 $(X_i, Y_i, Z_i)_O$,3 个平移参数分别为 ΔX、ΔY、ΔZ,3 个旋转参数分别为 Ω_X、Ω_Y、Ω_Z,尺度参数为 f,则单尺度参数坐标转换模型可表示为:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & \Omega_Z & -\Omega_Y \\ -\Omega_Z & f & \Omega_X \\ \Omega_Y & -\Omega_X & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O \tag{1}$$

收稿日期:2000-09-10。
项目来源:国家杰出青年科学基金资助项目(49825107)。

1.2　双尺度参数坐标转换模型

若 X 坐标与 Y 坐标尺度相等, 或 X 坐标(或 Y 坐标)与 Z 坐标尺度相等, 则为双尺度参数坐标转换模型。下面仅给出 X 坐标与 Y 坐标尺度相等的双尺度模型(其他情况类似)。设尺度参数分别为 f_1、f_2, 则双尺度模型可表示为:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & \Omega_Z & -\Omega_Y \\ -\Omega_Z & f_1 & \Omega_X \\ \Omega_Y & -\Omega_X & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O \tag{2}$$

1.3　零尺度参数坐标转换模型

若不考虑尺度参数, 即为零尺度参数坐标转换模型, 其模型为:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_Z & -\Omega_Y \\ -\Omega_Z & 0 & \Omega_X \\ \Omega_Y & -\Omega_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O \tag{3}$$

1.4　三尺度参数坐标转换模型

设 3 个尺度参数分别为 f_1、f_2、f_3, 三尺度参数转换模型可表示为[1]:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & \Omega_Z & -\Omega_Y \\ -\Omega_Z & f_2 & \Omega_X \\ \Omega_Y & -\Omega_X & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O \tag{4}$$

若令式(4)中 $f_1=f_2=f_3=f$, 则三尺度坐标转换模型便转化为通常的单尺度七参数 Bursa 模型; 若 $f_1=f_2$, 或 $f_2=f_3$, 或 $f_1=f_3$, 三尺度坐标转换模型转化为双尺度模型; 若 $f_1=f_2=f_3=0$, 三尺度模型便转化为零尺度模型。由此可见, 三尺度坐标转换模型是单尺度模型、双尺度和零尺度模型的推广, 而单尺度、双尺度或零尺度坐标转换模型是三尺度模型的特例。尺度参数选择的不同会影响整个坐标转换参数的解算结果, 对平移参数解算可靠性的影响尤甚。若仅从解算结果的内外符合精度的比较中对尺度参数进行选择, 由于内外符合精度有时并不能协调一致, 因而给尺度参数的选择带来了一定的困难。

2　坐标转换模型尺度参数的假设检验

2.1　尺度参数假设检验模型

关于坐标转换模型中参数的假设检验, 吕志平等人在将相似变换表示为具有约束的回归模型的前提下, 总结性地提出了把众多的相似变换模型和非相似变换模型均统一为回归模型, 将模型的检验问题统一于线性约束的回归检验[4~6]。本文将这种思想引入到坐标转换尺度参数的假设检验中, 可把三尺度参数坐标转换模型表示为线性模型, 而将单尺度、双尺度和零尺度情况用线性约束的形式给出, 因而坐标转换尺度参数的假设检验便可采用线性约束的回归检验方法。

将式(2)改成线性模型的形式为:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}\beta + \boldsymbol{e} \tag{5}$$

式中, $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{X}_N-\boldsymbol{X}_O$; $\boldsymbol{e}$ 为随机误差; β 为转换参数; $\boldsymbol{A}$ 为设计矩阵。$\boldsymbol{A}$ 阵及 β 的表达式如下:

$$\beta = [\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z, f_1, f_2, f_3]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{X}_{1O} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{S}_i & \boldsymbol{X}_{iO} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{S}_n & \boldsymbol{X}_{nO} \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中, $\boldsymbol{I}_3$ 为单位阵; $\boldsymbol{S}_i$ 及 $\boldsymbol{X}_{iO}$ 的表达式分别为:

$$\boldsymbol{S}_i = \begin{bmatrix} 0 & -Z_i & Y_i \\ Z_i & 0 & -X_i \\ -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix}_O \tag{8}$$

$$\boldsymbol{X}_{iO} = \begin{bmatrix} X_i & 0 & 0 \\ 0 & Y_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_i \end{bmatrix} \tag{9}$$

式(5)是基于三尺度参数坐标转换模型的, 它考虑到了尺度参数选择的各种可能(单尺度、双尺度、三尺度或零尺度), 这些可能性可通过线性约束来表达。假设这些线性约束表示为:

$$H_0: \boldsymbol{H}\beta = 0 \tag{10}$$

设两坐标系统公共点的个数为 n, 线性约束条件的个数为 q, 则由式(5)和式(10)便构成了坐标转换中尺度参数假设检验的统一模型:

$$\begin{aligned} \underset{3n\times 1}{\boldsymbol{W}} &= \underset{3n\times 9}{\boldsymbol{A}}\ \underset{9\times 1}{\beta} + \boldsymbol{e} \\ H_0: \underset{q\times 9}{\boldsymbol{H}}\ \underset{9\times 1}{\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

如果要在三尺度转换模型、单尺度、双尺度或

零尺度参数模型中作出选择,则只需对相应的线性约束进行显著性检验,此时 H_0 即为检验的原假设。下面给出尺度参数各种选择情况的检验假设(实为线性约束条件)。

2.1.1 三尺度转换模型与单尺度模型间的判别(单尺度检验)

当 $f_1=f_2=f_3=f$ 时即为单尺度模型,写成线性约束 H_0 的形式为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \beta = 0 \tag{12}$$

式中,β 的表达式同式(6)。

2.1.2 三尺度转换模型与双尺度模型间的判别(双尺度检验)

当满足 $f_1=f_2$ 或 $f_2=f_3$ 或 $f_1=f_3$ 时即为双尺度模型,其相应的线性约束 H_0 的形式为(仅给出线性约束矩阵 $\boldsymbol{H}$):

1) 当 $f_1=f_2$ 时,

$$\boldsymbol{H}=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -1\ 0) \tag{13}$$

2) 当 $f_2=f_3$ 时,

$$\boldsymbol{H}=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -1) \tag{14}$$

3) 当 $f_1=f_3$ 时,

$$\boldsymbol{H}=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -1) \tag{15}$$

2.1.3 尺度参数显著性检验(零尺度检验)

当 $f_1=f_2=f_3=0$ 时,线性约束 H_0 的形式为(仅给出线性约束矩阵):

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

有了检验假设后,接下来便是构造相应的检验统计量了。

2.2 检验统计量的构造及尺度参数假设检验的一般步骤

定理:考虑线性约束的显著性检验,检验的假设为 H_0: $\boldsymbol{H}\beta=0$。当假设 H_0 为真时,

$$F=\frac{(S_{H_{残}}-S_{残})/q}{S_{残}/(3n-m)} \sim F(q,3n-m) \tag{17}$$

式中,$S_{H_{残}}$ 是式(8)在 H_0 下的残差平方和;$S_{残}$ 是式(5)在无约束下相应的残差平方和,$m=9$;q 及 n 意义同前。定理及有关证明可见文献[7,8]。

对于给定的显著性水平 α,α 值的选择具有一定的相对性,但可根据具体问题选择较合适的值。若 $F>F_\alpha(q,3n-9)$,则拒绝假设 $\boldsymbol{H}\beta=0$,若 $F\leqslant F_\alpha(q,3n-9)$,则接受原假设 $\boldsymbol{H}\beta=0$。

坐标转换模型尺度参数假设检验的步骤为:

1) 列出线性约束方程,也即假设检验条件。

2) 计算 $S_{H_{残}}$ 及 $S_{残}$。

3) 将 $S_{H_{残}}$ 及 $S_{残}$ 代入式(17)求比值 F。

4) 给出显著性水平 α,计算 $F_\alpha(q,3n-9)$ 的值。

5) 若 $F>F_\alpha(q,3n-9)$,则拒绝假设 $\boldsymbol{H}\beta=0$;若 $F\leqslant F_\alpha(q,3n-9)$,则接受原假设 $\boldsymbol{H}\beta=0$。

3 实例计算与分析

实例 1:现以某地区 37 个 GPS 点的 WGS84 坐标系坐标与相应公共点上 1954 年北京坐标系坐标转换为例。用式(10)及式(17)提供的假设检验方法来对尺度参数的选择作出抉择。计算结果见表 1、表 2。

表 1 坐标转换模型尺度参数的假设检验

Tab.1 The Hypothesis Testing of Scale Parameter in Coordinate Transformation Model

抉择方案		$S_{H_{残}}/\mathrm{m}^2$	$S_{残}/\mathrm{m}^2$	自由度	F	最终抉择
单尺度检验		95.757	90.467	(2, 37)	2.982	三尺度
双尺度检验	$f_1=f_2$	91.743	90.467	(1, 37)	1.439	双尺度最佳选择 ($f_2=f_3$)
	$f_2=f_3$	90.499	90.467	(1, 37)	0.036	
	$f_1=f_3$	91.573	90.467	(1, 37)	1.247	
零尺度检验		295.368	90.467	(3, 37)	77.007	引入尺度
$F_{0.1}(1, 37)=2.755$		$F_{0.1}(2, 37)=2.355$		$F_{0.1}(3, 37)=2.138$		

实例 2:以 46 个 IGS 参考站分别在 ITRF96 和 ITRF97 下的坐标为例,对尺度参数作假设检验,计算结果见表 3、表 4(双尺度检验结果略)。

需要说明的是,关于显著性水平 α 的选取,考虑到尺度参数数值的量级较小,对坐标转换的结果影响本身就不太大,因而 α 可取得稍微大一点(α=0.1)。

由上述计算结果,可以得出如下结论:

1) 表 1 的计算结果表明,例 1 的坐标转换模型选用多尺度参数模型要比单尺度模型好,而在

三尺度模型和双尺度模型间，选用双尺度模型要好，其中以 $f_2=f_3$ 即 Z 坐标和 Y 坐标尺度相等最好（因为 F 值远小于 F_α）。表 2 的三尺度参数解算结果也显示 f_2 与 f_3 相差较小而与 f_1 相差较大。这说明例 1 中两坐标系统间尺度差异在空间上并非各向同性，若用单尺度模型，势必造成整个空间尺度的压缩或拉伸。

表 2　尺度参数解算结果/ 10^{-6}

Tab. 2　The Results of Scale Parameter Solution/ 10^{-6}

方案		f_1	f_2	f_3
单尺度		1.466	—	—
双尺度	$f_1=f_2$	1.611	—	0.892
	$f_2=f_3$	1.664	1.147	—
	$f_1=f_3$	1.632	0.718	—
三尺度		1.667	1.036	1.215

表 3　坐标转换模型尺度参数的假设检验

Tab. 3　The Hypothesis Testing of Scale Parameter in Coordinate Transformation Model

抉择方案	$S_{H残}$/ cm^2	$S_{残}$/ cm^2	自由度	F	最终抉择
单尺度检验	9.126	9.025	(2, 46)	0.847	单尺度
零尺度检验	55.213	9.025	(3, 46)	221.865	引入尺度
$F_{0.1}(2, 46)=2.344$			$F_{0.1}(3, 46)=2.126$		

表 4　尺度参数解算结果/ 10^{-9}

Tab. 4　The Results of Scale Parameter Solution/ 10^{-9}

方案	f_1	f_2	f_3
单尺度	−0.937	—	—
三尺度	−0.978	−0.971	−0.866

2）表 1 及表 3 的结果显示，在对两算例选择坐标转换模型时，尺度参数是必须引入的，因为比值 F 远大于 F_α。这说明尺度参数在坐标转换模型中的作用是显著的，因此尺度参数的选择也是非常有意义的。

3）表 3 显示，对于 ITRF-XX 系列间的坐标转换而言，因两系统尺度上相差很小（如 $10^{-8}\sim10^{-9}$ 量级），且两网在空间各个轴向上并无明显积累性误差，则三尺度模型解算结果并不优于单尺度结果，此时用单尺度模型即可。这种情况下若引入三尺度参数，在公共点较少时，可能由于引入参数过多反而降低参数解算结果。另外，虽然此时的尺度参数量级很小，但却不能在坐标转换模型中忽略尺度参数。尺度参数对转换模型而言是显著的。

4）本文所提供的检验方法对于坐标转换模型尺度参数的选择较为客观，也更直观且容易作抉择，但其缺点是缺少外部检核。因此，应将内外符合精度比较方法与该方法结合起来。

4　结　语

本文给出了坐标转换模型中尺度参数假设检验的统一模型，构造了相应的检验统计量，它能对尺度参数个数（单尺度、双尺度或三尺度）及尺度参数的显著性进行假设检验，从而能对尺度参数的选择作出客观的、量化的判别与评价。该检验方法是对有关尺度参数的选择原则和方法的充实与完善，若与内外符合精度比较方法相结合则可灵活地实现坐标转换模型中尺度参数的最佳选择。

参　考　文　献

1　熊　介，杨元喜. 三维大地网的转换与变形. 测绘学报，1988，17(1)：1～8

2　Yang Y. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation. Journal of Geodesy，1999，73：268～274

3　吴江飞. 相关 GPS 基线向量网的质量控制：[学位论文]. 郑州：郑州信息工程大学测绘学院，2000

4　吕志平，朱华统. 坐标转换模型的检验及统一表示. 测绘学报，1993，22(3)：161～168

5　朱华统，杨元喜，吕志平. GPS 坐标系统的变换. 北京：测绘出版社，1994. 82～86

6　Appelbaum L T. Geodetic Datum Transformation by Multiple Regression Equations. The Third International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, New Mexico，1982

7　方开泰. 实用回归分析. 北京：科学出版社，1987

8　王松桂. 线性模型的理论及其应用. 安徽：安徽教育出版社，1987

9　Kutterer H. Quality Aspects of a GPS Reference Network in Antarctica Simulation Study. Journal of Geodesy，1998，72：51～63

作者简介：徐天河，硕士生，现主要从事 GPS 数据处理与质量控制研究。

E-mail：xutianhe@sohu.com

The Hypothesis Testing of Scale Parameter in Coordinate Transformation Model

XU Tianhe[1] *YANG Yuanxi*[2]

(1 Institute of Surveying & Mapping, Information Engineering University of Zhengzhou, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou, China, 450052)

(2 Xi'an Research Institute of Surveying & Mapping, 1 Middle Yanta Road, Xi'an, China, 710054)

Abstract: As we know, the Bursa-Wolf coordinate transformation model is generally used in the transformation between two datum systems. This kind of model has a single scale parameter, which implies a hypothesis that the scale space is isotropic. The single scale parameter actually harmonizes the average scale of the three coordinate axis. When the precision of the three coordinate vectors has a large discrepancy, it is not wise to use the single scale parameter coordinate transformation model. Following this fact, we present a coordinate transformation model of three-scale parameters based on the hypothesis that the scale space is isotropic and analyze how to choose the scale parameter in coordinate transformation model theoretically. We also give its special instances, namely, the two-scale and non-scale parameter coordinate transformation models.

From the comparison of external and internal precision, we can make a decision on the choice of scale parameter. This method, however, does not provide an objective standard and rule. The reason is that the results of the external and the internal tests do not match each other sometimes, which brings some difficulties to the choosing. In this paper, an united hypothesis testing model of scale parameter is given and the corresponding statistic of testing is constructed. This thinking way comes from the regression testing with linear bound. We can express the three-scale parameter coordinate transformation model as a linear model, and express its special instances such as two-scale parameter, non-scale parameter as linear bounds. Then we can make hypothesis testing on the choice among the coordinate transformation models with one-scale, two-scale, three-scale and non-scale parameter.

There are three main steps in this hypothesis testing: ①giving the linear bound equation, namely, the hypothesis testing condition; ②constructing the statistic of testing and calculating its value; and ③ giving the significance level and deciding whether the zero hypothesis is accepted or not. Two numerical examples are given and some helpful conclusions are shown in the paper.

Key words: coordinate transformation; three-scale parameters coordinate transformation model; linear bound; hypothesis testing

---

About the author: XU Tianhe, master candidate. His main research fields are GPS data processing and quality control.
E-mail: xutianhe@sohu.com