

# 利用二维 DLT 及光束法平差进行数字摄像机标定

张永军<sup>1</sup> 张祖勋<sup>2</sup> 张剑清<sup>2</sup>

(1) 武汉大学 GPS 工程研究中心, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2) 武汉大学遥感信息工程学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

**摘要:** 利用共线方程和二维 DLT 之间的对应关系导出了由二维 DLT 的 8 个参数表达的主纵线方程式, 讨论了主点初值的求解方法, 给出了单张像片摄像机参数分解不惟一性及临界序列的证明。详细推导了利用二维 DLT 参数分解摄像机外方位元素初值的实用算法, 论述了利用光束法平差进行摄像机标定的数学模型。实际图像数据实验取得了很好的结果, 验证了本文所提出的摄像机标定算法的可行性。

**关键词:** 二维 DLT; 光束法平差; 共线方程; 平面格网; 摄像机标定

中图法分类号: P232; P231.2

检查和校准摄像机的内方位元素和光学畸变参数的过程称为摄像机标定, 对于日益广泛使用的非量测摄像机来说, 标定是从二维图像获取三维信息必不可少的步骤<sup>[1~2]</sup>。随着摄影测量和计算机视觉理论的发展, 许多学者对摄像机标定技术进行了深入的研究<sup>[1~9]</sup>。计算机视觉界最近提出了利用主动视觉技术进行摄像机自标定的一些算法, 不过在少数情况下, 自标定技术得到的解不是惟一的, 即使在图像噪声很小时, 求解的值与实际值也有较大的差别<sup>[9]</sup>。Bill Triggs 提出利用绝对二次曲线原理进行摄像机自标定<sup>[5]</sup>, 但该方法的初始化比较困难。张正友提出了利用旋转矩阵的正交性条件和非线性最优化进行摄像机标定, 其标定精度为 0.35 像素左右<sup>[1]</sup>。

直接线性变换 (direct linear transformation, DLT) 是建立像点坐标和物点坐标直接线性关系的算法, 处理时不需要摄像机内外方位元素的初值, 因而在近景摄影测量中被广泛使用。国际上

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -f [a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)] / [a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)] \\y - y_0 &= -f [a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)] / [a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)]\end{aligned}$$

式中,  $x_0, y_0, f$  为摄像机的内方位元素;  $(X_s, Y_s, Z_s)$  为摄站坐标;  $(X, Y, Z)$  为物方空间坐标;  $(x, y)$  为相应的像坐标;  $\mathbf{R} = \{a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3\}$  为摄影测量中常用的旋转角  $\varphi, \omega, \kappa$  ( $Y$  为主

利用三维 DLT 进行摄像机标定已经有较多的文献<sup>[6~10]</sup>, 但到现在为止还没有见到利用二维 DLT 进行摄像机标定的算法。

## 1 二维 DLT 及内外方位元素初值

二维 DLT 可表示为:

$$\begin{aligned}x &= \frac{h_1X + h_2Y + h_3}{h_7X + h_8Y + 1} \\y &= \frac{h_4X + h_5Y + h_6}{h_7X + h_8Y + 1}\end{aligned}\quad (1)$$

式中,  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$  为二维 DLT 的 8 个变换参数  $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)^T$ ;  $X, Y$  为平面控制(格网)点空间坐标( $Z$  坐标为零);  $x, y$  为相应的像坐标, 当像片点数大于 4 个时, 可将式(1)进行适当变换, 则二维 DLT 参数可通过解超定方程  $A\mathbf{H}=0$  求得。

摄影测量中最常用的共线方程为<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned}&x - x_0 = -f [a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)] / [a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)] \\&y - y_0 = -f [a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)] / [a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)]\end{aligned}\quad (2)$$

轴)构成的旋转矩阵。对于平面格网而言, 一般将坐标系建立在格网中心,  $X, Y$  轴在平面内, 此时所有格网点的  $Z$  坐标为零。

式(2)可转化与式(1)类似的形式:

$$\begin{aligned}x &= \left( f \frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_3}{\lambda} x_0 \right) X + \left( f \frac{b_1}{\lambda} - \frac{b_3}{\lambda} x_0 \right) Y + \left( x_0 - \frac{f}{\lambda} (a_1 X_s + b_1 Y_s + c_1 Z_s) \right. \\&\quad \left. - \frac{a_3}{\lambda} X - \frac{b_3}{\lambda} Y + 1 \right) \\y &= \left( f \frac{a_2}{\lambda} - \frac{a_3}{\lambda} y_0 \right) X + \left( f \frac{b_2}{\lambda} - \frac{b_3}{\lambda} y_0 \right) Y + \left( y_0 - \frac{f}{\lambda} (a_2 X_s + b_2 Y_s + c_2 Z_s) \right. \\&\quad \left. - \frac{a_3}{\lambda} X - \frac{b_3}{\lambda} Y + 1 \right)\end{aligned}\quad (3)$$

式中,  $\lambda = (a_3 X_s + b_3 Y_s + c_3 Z_s)$ 。

比较式(1)和式(3)可知:

$$\begin{cases} h_1 = fa_1/\lambda - a_3 x_0/\lambda \\ h_2 = fb_1/\lambda - b_3 y_0/\lambda \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} h_4 = fa_2/\lambda - a_3 y_0/\lambda \\ h_5 = fb_2/\lambda - b_3 y_0/\lambda \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} h_3 = x_0 - f(a_1 X_s + b_1 Y_s + c_1 Z_s)/\lambda \\ h_6 = y_0 - f(a_2 X_s + b_2 Y_s + c_2 Z_s)/\lambda \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} h_7 = -a_3/\lambda \\ h_8 = -b_3/\lambda \end{cases} \quad (7)$$

$$(h_1 - h_7 x_0) \circ (h_2 - h_8 x_0)/f^2 + (h_4 - h_7 y_0) \circ (h_5 - h_8 y_0)/f^2 + h_7 h_8 = 0 \quad (11)$$

$$\text{则有: } f = \sqrt{-(h_1 - h_7 x_0) \circ (h_2 - h_8 x_0) - (h_4 - h_7 y_0) \circ (h_5 - h_8 y_0)}/h_7 h_8 \quad (12)$$

当主点  $(x_0, y_0)$  已知或者通过某种方法求得后, 即可通过式(12)求出焦距  $f$ 。

将式(8)、式(9)、式(10)上下两式分别自乘并

$$\frac{(h_1 - h_7 x_0)^2 - (h_2 - h_8 x_0)^2 + (h_4 - h_7 y_0)^2 - (h_5 - h_8 y_0)^2}{f^2} + (h_7^2 - h_8^2) = 0 \quad (13)$$

利用式(11)和式(13)消去焦距即可得:

$$F_h = (h_1 h_8 - h_2 h_7)(h_1 h_7 - h_7^2 x_0 + h_2 h_8 - h_8^2 x_0) + (h_4 h_8 - h_5 h_7)(h_4 h_7 - h_7^2 y_0 + h_5 h_8 - h_8^2 y_0) = 0 \quad (14)$$

不考虑镜头畸变影响时, 摄像机的实际未知数为 9 个( $f, x_0, y_0, \varphi, \omega, \kappa, X_s, Y_s, Z_s$ ), 而二维 DLT 共有 8 个参数, 则必然无法惟一分解出摄像机的 9 个未知参数。事实上, 在给定二维 DLT 的 8 个参数时, 主点  $(x_0, y_0)$  可在主纵线上自由移动, 从而造成外方位元素分解的不惟一性。

证明: 现取用以  $Z$  轴为主轴的  $A, v, \kappa$  转角系统<sup>[10]</sup>, 有  $\tan \kappa = \frac{c_1}{c_2}$ , 其中  $\kappa$  角为像片上主纵线

与  $y$  轴的夹角。将下文的式(22)代入可得  $\tan \kappa = \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} = \frac{a_2/a_3 - b_2/b_3}{b_1/b_3 - a_1/a_3}$ , 将式(21)的相

应项代入可得  $\tan \kappa = \frac{h_4 h_8 - h_5 h_7}{h_1 h_8 - h_2 h_7}$ 。显然, 式(14)

可表达为直线  $y_0 = Ax_0 + C$  的形式, 其中  $A = \frac{h_1 h_8 - h_2 h_7}{h_4 h_8 - h_5 h_7}$  为直线的斜率,  $\alpha$  为直线与  $x$

轴的夹角。不难看出,  $\tan \kappa = 1/\tan \alpha$ , 即  $\kappa =$

由式(4)、式(5)、式(7)得:

$$\begin{cases} (h_1 - h_7 x_0)/f = a_1/\lambda \\ (h_2 - h_8 x_0)/f = b_1/\lambda \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} (h_4 - h_7 y_0)/f = a_2/\lambda \\ (h_5 - h_8 y_0)/f = b_2/\lambda \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -h_7 = a_3/\lambda \\ -h_8 = b_3/\lambda \end{cases} \quad (10)$$

将式(8)、式(9)、式(10)上下两式分别相乘并相加, 顾及  $a_1 b_1 + a_0 b_2 + a_3 b_3 = 0$ , 得:

相加, 顾及  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  和  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$  并消去  $\lambda$  得:

$90^\circ - \alpha$ , 可见式(14)实质上就是主纵线在图像坐标系下的表达式。因而只要主点  $(x_0, y_0)$  的位置在主纵线  $y_0 = Ax_0 + C$  上, 所有分解出的摄像机参数都满足投影关系, 这也说明单张像片无法利用平面控制网进行摄像机标定。主纵线方程式

(14)也可表示为  $(L_x, L_y) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = L_c$  的形式, 下文简写为  $LX = c$ , 其中的各个系数可由式(14)得出。

并且摄像机的主点必定位于主纵线上<sup>[11]</sup>, 也即主点  $(x_0, y_0)$  必然满足方程  $LX = c$ 。因此, 如果有两张或两张以上像片, 就可以利用多条主纵线通过解超定方程  $LX = c$  求得主点  $(x_0, y_0)$  的坐标。

值得注意的是, 在利用超定方程  $LX = c$  求解主点  $(x_0, y_0)$  时应该避免所谓的临界运动序列(critical motion sequences)<sup>[8]</sup>。当摄像机固定而标定格网只绕其  $Z$  轴作旋转时, 各像片的二维 DLT 参数之间线性相关, 此时各主纵线互相重合, 因而无法求出主点的位置。

证明如下。采用齐次坐标, 针孔(pinhole)模型下的平面投影关系可表示为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = A(r_1, r_2, t) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中,  $A$  为内方位元素矩阵;  $r_1, r_2$  和  $t$  分别为旋转矩阵的前两列和平移向量;  $H = A(r_1, r_2, t)$  称为同形矩阵(homography)。不难看出, 利用像点齐次坐标的第三行消去比例因子  $s$  后的式(15)就是二维 DLT 方程, 因此, 二维 DLT 参数实际上与计算机视觉中常用的同形矩阵(第 9 个元素取 1 时)等价。现取用同形矩阵的表达形式, 当格网只绕  $Z$  轴旋转  $\theta$  角时, 两张像片的旋转矩阵间存在如下关系:

$$R_2 = R_1 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$h_1^{(2)} h_8^{(2)} - h_2^{(2)} h_7^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \cos \theta + h_2^{(1)} \sin \theta \\ -h_1^{(1)} \sin \theta + h_2^{(1)} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_7^{(1)} \cos \theta + h_8^{(1)} \sin \theta \\ h_7^{(1)} \sin \theta + h_8^{(1)} \cos \theta \end{pmatrix} = h_1^{(1)} h_8^{(1)} - h_2^{(1)} h_7^{(1)} \quad (19)$$

同理可得:  $h_4^{(2)} h_8^{(2)} - h_5^{(2)} h_7^{(2)} = h_4^{(1)} h_8^{(1)} - h_5^{(1)} h_7^{(1)}$ 。由此可知两张像片的主纵线斜率相等,

由式(17)不难得出,  $C^{(2)} = C^{(1)}$ 。由此可知两张像片的主纵线完全重合, 当然无法求交点(即主点)。因而在实践中应设法消除二维 DLT 参数之间的相关性, 最简单的方法是手持摄像机, 每次拍摄时都采用 3 个不同的旋转角进行像片拍摄, 使旋转矩阵之间失去相关性, 从而使主纵线的斜率间有较大差异, 以便稳定地计算主点位置。

以上详细讨论了摄像机内方位元素初值  $(x_0, y_0)$  及  $f$  的求解方法及实践中应该注意的临界序列问题, 下文将讨论外方位元素的分解。将式(10)分别代入式(8)、式(9)可得:

$$\begin{aligned} a_1/a_3 &= -\left\{ h_1 - h_7 x_0 \right\} / f h_7 \\ b_1/b_3 &= -\left\{ h_2 - h_8 x_0 \right\} / f h_8 \\ a_2/a_3 &= -\left\{ h_4 - h_7 y_0 \right\} / f h_7 \\ b_2/b_3 &= -\left\{ h_5 - h_8 y_0 \right\} / f h_8 \end{aligned} \quad (21)$$

由  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$  可得:

$$b_3^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{h_2 - h_8 x_0}{f^2 h_8^2} \right)^2 + \left( \frac{h_5 - h_8 y_0}{f^2 h_8^2} \right)^2}$$

在以  $Y$  为主轴的转角系统下,  $\tan \kappa = \frac{b_1}{b_2}$ , 由式(21)知,  $\tan \kappa = \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_2 - h_8 x_0}{h_5 - h_8 y_0}$ , 此式可惟一确定  $\kappa$  角。

在求解  $\omega$  角时,  $b_3$  的值在开平方后首先取正

用上标(1)、(2)分别表示对应于第一和第二张像片的同形矩阵元素, 将式(16)代入  $H = A(r_1, r_2, t)$  得:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_4^{(2)} \\ h_7^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_4^{(1)} \\ h_7^{(1)} \end{pmatrix} \cos \theta + \begin{pmatrix} h_2^{(1)} \\ h_5^{(1)} \\ h_8^{(1)} \end{pmatrix} \sin \theta \\ \begin{pmatrix} h_2^{(2)} \\ h_5^{(2)} \\ h_8^{(2)} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_4^{(1)} \\ h_7^{(1)} \end{pmatrix} \sin \theta + \begin{pmatrix} h_2^{(1)} \\ h_5^{(1)} \\ h_8^{(1)} \end{pmatrix} \cos \theta \end{aligned} \quad (17)$$

主纵线可表示为  $y_0 = Ax_0 + C$  的形式, 若设  $\alpha$  为直线与  $x$  轴的夹角, 则直线的斜率为:

$$\tan \alpha = (h_1 h_8 - h_2 h_7) / (h_4 h_8 - h_5 h_7) \quad (18)$$

将式(17)中的相应项代入式(18)中可得:

$$\begin{aligned} h_1^{(1)} h_8^{(1)} - h_2^{(1)} h_7^{(1)} &= \left[ h_1^{(1)} \cos \theta + h_2^{(1)} \sin \theta \right] \left[ -h_7^{(1)} \sin \theta + h_8^{(1)} \cos \theta \right] - \\ &\quad \left[ -h_1^{(1)} \sin \theta + h_2^{(1)} \cos \theta \right] \left[ h_7^{(1)} \cos \theta + h_8^{(1)} \sin \theta \right] = h_1^{(1)} h_8^{(1)} - h_2^{(1)} h_7^{(1)} \end{aligned} \quad (19)$$

也即主纵线互相平行。而且, 由式(14)知, 常数项  $C$  可表示为:

$$C = [(h_1 h_8 - h_2 h_7)(h_1 h_7 + h_2 h_8) + (h_4 h_8 - h_5 h_7)(h_4 h_7 - h_5 h_8)] / (h_7^2 + h_8^2) \quad (20)$$

号, 将已确定的  $\kappa$  角与通过  $b_3$  求得的  $b_1, b_2$  算出的  $\kappa$  相比较, 若  $\kappa \neq \kappa$  则说明  $b_3$  应取负号, 然后重新计算  $b_1, b_2$  的值。通过  $\sin \omega = -b_3$  即可计算出  $\omega$  角。

据旋转矩阵的正交性可得:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

因为  $\tan \varphi = -\frac{a_3}{c_3} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_3} b_2 - \frac{a_2}{a_3} b_1}$ ,  $b_1, b_2$  已在求  $\omega$

角时确定, 而  $\frac{a_1}{a_3}$  和  $\frac{a_2}{a_3}$  可由式(21)确定, 因而  $\varphi$  角也可惟一确定。

可以看出, 在求解  $\varphi, \omega, \kappa$  角时, 并没有计算整个旋转矩阵中的所有 9 个元素, 因而在计算  $X_S, Y_S, Z_S$  的初值时, 需利用如上计算出的角  $\varphi, \omega, \kappa$ , 重新计算旋转矩阵的各元素。由式(8)、式(9)、式(10)求平均可得到  $\lambda$ , 则  $X_S, Y_S, Z_S$  的初值可通过解如下线性方程组获得:

$$\begin{cases} h_3 = x_0 - \frac{f}{\lambda} (a_1 X_S + b_1 Y_S + c_1 Z_S) \\ h_6 = y_0 - \frac{f}{\lambda} (a_2 X_S + b_2 Y_S + c_2 Z_S) \\ \lambda = a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S \end{cases} \quad (23)$$

## 2 利用光束法平差进行摄像机标定

解算出摄像机的内外方位元素初值后, 即可

$$\begin{aligned} x - x_0 - \Delta x &= -f_x \frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} = -f_x \frac{X}{Z} \\ y - y_0 - \Delta y &= -f_y \frac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} = -f_y \frac{Y}{Z} \end{aligned} \quad (24)$$

式中,  $f_x, f_y$  分别为  $x, y$  两个方向的焦距, 此处假设其有效值可能不相等。

$$\begin{aligned} \Delta x &= (x - x_0)(K_1 r^2 + K_2 r^4) + P_1(r^2 + 2(x - x_0)^2) + 2P_2(x - x_0)(y - y_0) \\ \Delta y &= (y - y_0)(K_1 r^2 + K_2 r^4) + P_2(r^2 + 2(y - y_0)^2) + 2P_2(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial_x}{\partial X_S} \Delta X_S + \frac{\partial_x}{\partial Y_S} \Delta Y_S + \frac{\partial_x}{\partial Z_S} \Delta Z_S + \frac{\partial_x}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial_x}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial_x}{\partial \kappa} \Delta \kappa + \frac{\partial_x}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial_x}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial_x}{\partial Z} \Delta Z + \frac{\partial_x}{\partial f_x} \Delta f_x + \frac{\partial_x}{\partial f_y} \Delta f_y + \frac{\partial_x}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial_x}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial_x}{\partial K_1} \Delta K_1 + \frac{\partial_x}{\partial K_2} \Delta K_2 + \frac{\partial_x}{\partial P_1} \Delta P_1 + \frac{\partial_x}{\partial P_2} \Delta P_2 - l_x \\ v_y &= \frac{\partial_y}{\partial X_S} \Delta X_S + \frac{\partial_y}{\partial Y_S} \Delta Y_S + \frac{\partial_y}{\partial Z_S} \Delta Z_S + \frac{\partial_y}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial_y}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial_y}{\partial \kappa} \Delta \kappa + \frac{\partial_y}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial_y}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial_y}{\partial Z} \Delta Z + \frac{\partial_y}{\partial f_x} \Delta f_x + \frac{\partial_y}{\partial f_y} \Delta f_y + \frac{\partial_y}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial_y}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial_y}{\partial K_1} \Delta K_1 + \frac{\partial_y}{\partial K_2} \Delta K_2 + \frac{\partial_y}{\partial P_1} \Delta P_1 + \frac{\partial_y}{\partial P_2} \Delta P_2 - l_y \end{aligned} \quad (26)$$

误差方程式各项的系数均由共线方程求偏导数得到<sup>[10]</sup>。若控制点可认为无误差时, 则相应的误差方程式中消去  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  项。在进行光束法摄像机标定时, 大多情况下法方程的状态不良, 因而需要对内方位元素加以适当的权进行平差, 以保证解算的稳定性。

## 3 数据处理结果与分析

对于上文提出的数字摄像机标定算法, 笔者用一组实际图像进行了实验。平面标定格网大小约为 45cm×45cm, 共有 900 个设计格网点, 每个格网点的设计坐标均用坐标量测仪量测, 精度为 0.1mm 左右。实际上, 对于自检校光束法平差而言, 格网点完全不需要如此高的精度, 精确到 0.5 mm 已经足够, 而这对于工业制造等领域来说很容易做到。CCD 摄像机的像幅为 1 300 像素×1 030 像素, 标定格网置于水平转盘上, 每次都采用不同的旋转角度拍摄, 共拍摄了 8 张像片, 每张像片的可见格网点数约为 500 左右。

每个可见格网点的像坐标都通过直线特征提取后求交点得到, 精度高于 0.1 像素。如果将平面格网点的量测坐标作为已知值进行标定, 考虑

用摄影测量中常用的光束法平差进行摄像机标定。由于非量测数字摄像机镜头一般存在畸变, 标定时需求定畸变参数。引入畸变差后的共线方程为<sup>[12]</sup>:

式中,  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ ;  $K_1, K_2$  称为径向畸变差 (radial distortion);  $P_1, P_2$  称为偏心畸变差 (decentering distortion)。

用泰勒级数将式(24)线性化, 即可得到用于标定的误差方程式:

格网点像坐标的误差及空间坐标量测误差的综合影响, 标定后精度必然低于 0.3 像素, 无法满足应用要求。

严密的自检校光束法平差模型应该将格网点的设计坐标作为未知数, 并给以适当的权值进行平差, 以精确求解摄像机参数及格网点空间坐标。利用严密的自检校光束法平差模型进行标定后的单位权中误差为 0.08 像素, 内方位元素的标定值及其实际精度 (平差结果中给出的未知数中误差) 见表 1, 其中  $f_x, f_y$  分别为  $x, y$  两个方向的焦距,  $(x_0, y_0)$  为主点位置, 单位均为像素,  $K_1, K_2$  和  $P_1, P_2$  分别为径向和偏心畸变系数。图 1 所示为其中一张像片的匹配格网点及标定结果的投影格网点。

由表 1 可见, 该 CCD 摄像机的主点接近像片中心, 且标定精度在 0.1 像素以内, 摄像机的纵横比为 0.998 2, 也即像素非常接近于正方形, 焦距的标定精度在 0.2 像素左右, 完全可以满足高精度近景三维量测的要求。摄像机镜头的畸变大小是镜头加工质量的主要标志, 将表 1 中的畸变参数代入式(25)可知, 像幅内的最大畸变差约为 3 像素, 可见该摄像机的畸变较为明显。

为了检验标定结果的实际精度, 利用标定得

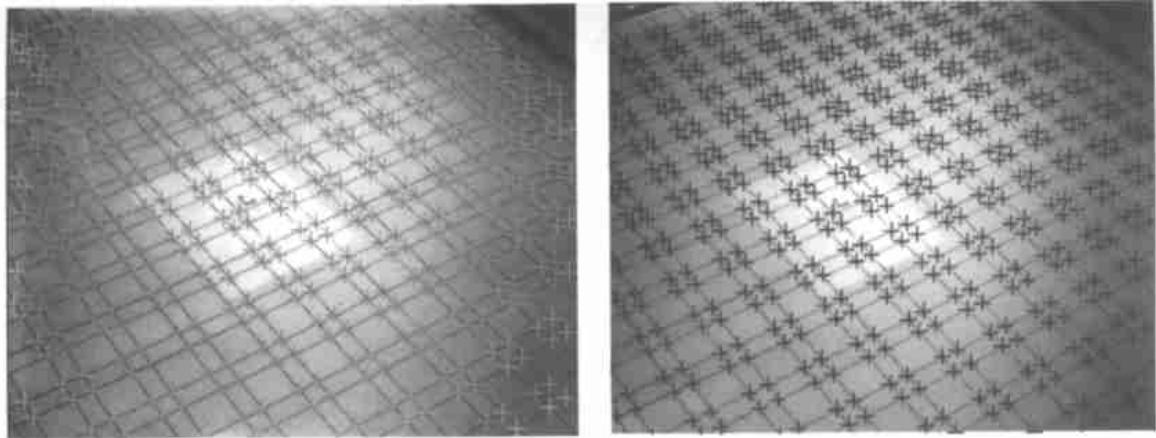


图1 匹配格网点和标定结果的投影格网点

Fig. 1 Matched Image Points and Projected Ones with Calibration Result

表1 实际图像标定结果统计表/像素

Tab. 1 Results of Camera Calibration with Real Images/ pixel

统计项目	$f_x$	$f_y$	$x_0$	$y_0$	$K_1$	$K_2$	$P_1$	$P_2$
标定值	4 426.135	4 418.137	652.120	514.730	$-7.416 \times 10^{-9}$	$-4.522 \times 10^{-15}$	$6.489 \times 10^{-7}$	$6.684 \times 10^{-7}$
中误差	0.201	0.228	0.085	0.087	$1.162 \times 10^{-10}$	$1.828 \times 10^{-16}$	$4.654 \times 10^{-8}$	$1.251 \times 10^{-8}$

到的内外方位元素及自检校光束法平差后的格网点空间坐标对每张像片都进行了投影，并将格网点的投影值与像片上通过直线求交得到的观测值求差，每张像片中二者差值的中误差都在 0.1 像素以下。本文提出的摄像机标定算法已成功地应用于工业零件的尺寸制造误差检测系统中，取得

了很好的结果。

为了全面评价本文提出的摄像机标定算法，利用张正友<sup>[1]</sup>提供的测试数据（共 5 张像片，每张像片有 256 个角点）进行了实验，如表 2 所示。从表 2 可以看出，焦距和主点都有 2~3 像素的变化，而未知数的标定精度有很大提高。

表2 张正友算法与本文算法的结果比较/像素

Tab. 2 Comparision Between Zhang's and Our Calibration Algorithm/ pixel

统计项目	$f_x$	$f_y$	$x_0$	$y_0$	$mf_x$	$mf_y$	$mx_0$	$my_0$
张正友算法	832.50	832.53	303.96	206.59	1.41	1.38	0.71	0.66
本文算法	829.64	829.26	301.74	207.04	0.22	0.23	0.10	0.09

张正友在其文章中指出，像片点观测值和根据非线性最优化后的内外方位元素及控制点的坐标进行投影后得到的投影点之间的偏差中误差为 0.335 像素<sup>[1]</sup>。为了比较，利用本文所述标定算法得到的内外方位元素及平差后的格网点空间坐标对每张像片都进行了投影，并将投影值与张正友提供的观测值求差，每张像片差值的中误差也都在 0.1 像素左右。

## 参 考 文 献

- Zhang Z Y. A Flexible New Technique for Camera Calibration. Microsoft Research, Redmond, 1998
- 冯文灏. 关于近景摄影机检校的几个问题. 测绘通报, 2000(10): 1~3
- 常本义. 关于非量测数字相机内外方位元素和像差的测

定与改正. 西安测绘研究所学报, 1999(2): 9~13

- 4 马颂德, 张正友. 计算机视觉——计算理论与算法基础. 北京: 科学出版社, 1998
- 5 Triggs B. Autocalibration from Planar Scenes. 1998 European Conference on Computer Vision, Freiburg, 1998
- 6 Chen F J. Application of Least-Squares Adjustment Technique to Geometric Camera Calibration and Photogrammetric Flow Visualization. ISA 43rd International Instrumentation Symposium, Orlando, 1997
- 7 Batista J. Explicit Monoplane Camera Calibration. Institute of Systems and Robotics, Department of Electrical Engineering University of Coimbra, Portugal, 1996
- 8 Sturm P, Stephen J M. On Plane-Based Camera Calibration: A General Algorithm, Singularities, Applications. CVPR, fort collins, 1999
- 9 邱茂林. 计算机视觉中摄像机定标综述. 自动化学报,

- 2000, 26(1): 43~55
- 10 王之卓. 摄影测量原理. 北京: 测绘出版社, 1980
- 11 朱肇光, 孙 护, 崔炳光. 摄影测量学(修订本). 北京: 测绘出版社, 1995
- 作者简介: 张永军, 博士生。主要研究方向为数字摄影测量、计算机视觉等。  
E-mail: yjzhang@supresoft.com.cn

## Camera Calibration Using 2D-DLT and Bundle Adjustment with Planar Scenes

ZHANG Yongjun<sup>1</sup> ZHANG Zuxun<sup>2</sup> ZHANG Jianqing<sup>2</sup>

(1 GPS Research Center, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(2 School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

**Abstract:** A flexible camera calibration technique using 2D-DLT and bundle adjustment with planar scenes is proposed in this paper. The equation of principal vertical line under image coordinate system represented by 2D-DLT parameters is worked out using the correspondence between collinearity equations and 2D-DLT. Proof of ambiguities in camera parameter decomposition with 2D-DLT parameters is given. Initial value of principal point can be obtained with at least two equations of principal vertical lines. Proof of critical motion sequences (CMS) is also given in detail. The practical decomposition algorithm of extrinsic parameters using initial values of principal point, focal length and 2D-DLT parameters is discussed elaborately. Planar-scene camera calibration algorithm with bundle adjustment (using collinearity equations) is addressed. For the proposed technique, either the camera or the planar pattern can be moved freely, and the motion need not be known. Very good results have been obtained with both computer simulations and real data calibration.

**Key words:** 2D-DLT; bundle adjustment; collinearity equations; planar grid; camera calibration

**About the author:** ZHANG Yongjun, Ph.D candidate. He is mainly engaged in the research on digital photogrammetry and computer vision.  
E-mail: yjzhang@supresoft.com.cn

### 欢迎订阅 2003 年《地球空间信息科学学报》

《地球空间信息科学学报》为我国唯一的英文版测绘专业学术期刊。其宗旨是:立足国内,面向国际,通过发表具有创新性和重大研究价值的测绘理论成果,促进国内外学术交流。本刊内容包括综述与展望、学术论文与研究报告、本领域重大科技新闻,涉及测绘研究的主要方面,尤其是数字摄影测量与遥感、全球定位系统、地理信息系统及其集成等。本刊为国际性期刊,按国际惯例运作,作者和读者均面向国内外测量界。主编为李德仁院士。

本刊国内外公开发行,读者对象为测绘及相关专业高级研究人员。本刊为季刊, A4 开本, 80 面,逢季末月 5 日出版。本刊为自办发行,定价 10 元/册,欢迎订阅。