

地图符号视觉变量数学定义的研究

魏文展¹ 钟业勋¹ 黄仁涛² 彭月英¹

(1 广西师范学院数学与信息科学研究所, 南宁市明秀路 175 号 530001)

(2 武汉大学资源与环境科学学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

摘 要: 根据拓扑学、图论和集合论的有关定义, 对形状、尺寸、方向、密度、亮度、结构、颜色和位置等 8 种视觉变量给出了数学定义。组合公式表明, 由有限的视觉变量组成像元, 再由有限的像元组成地图符号, 可以获得大量的地图符号, 从而说明设计与创造地图符号蕴含巨大的潜力。

关键词: 视觉变量; 图像元素; 地图符号; 组合

中图法分类号: P283.1

地图符号是地图的语言, 它是各种基本图像元素变化组合的结果。这些能引起视觉差别的最基本的图形和色彩变化因素叫做“视觉变量”或“图形变量”。最早研究视觉变量并把它引入地图学的是法国人贝尔廷, 他提出了 6 个视觉变量: 形状、方向、尺寸、明度、密度和颜色^[1]。美国地图学家鲁宾逊等在《地图学原理》一书中提出的“基本图形要素”是形状、尺寸、方向、图案、明度和颜色。前苏联地图学家萨里谢夫把变量称之为“绘图方法”, 包括形状、尺寸、颜色、方向、明度、结构, 其中“结构”的概念也与密度不同。俞连笙等则认为, 视觉变量应包括形状、尺寸、方向、明度、密度、结构、颜色和位置^[2]。笔者认为, 俞连笙关于视觉变量的划分更为全面。

1 像元——点与符号的中介

Taylor 认为可视化是地图学的核心。地图可视化目前已成为地理信息系统和现代地图学的研究热点^[3]。可视化归根结底是通过符号的视觉识别而达到理解其指代事物, 从而达到获取空间地理信息的目的, 而符号间质与量的差异往往要通过构成符号的基本元素——像元的差异来表达。图式规定图上最小点为 0.15mm, 而单一的圆点(除高程点等特殊情况下)无法使用其视觉变量来表达多种事物的质量和数量特征, 这就需要先由圆点构造像元。显然, 作为点集的像元可以

通过视觉变量的不同组合, 构造具有各种各样表达功能的地图符号, 使之能对客观世界的各种事物和现象进行有效的反映。文献[2]中对像元的强调, 其意义也正在这里。

2 视觉变量的数学定义

2.1 形状

对于点状符号来说, 形状就是符号的外形; 对于线状和面状符号, 是指构成线和面的像元的形状。由于像元是单一形状和大小(0.15mm 的圆点)的点的集合, 因此可以对其轮廓定义形状。

定义 1 异形变换。存在着基础点集 A 和构形点集 B , 若目标点集 Q 满足:

$$Q = A - B \quad (1)$$

则称 Q 为 A 的异形变换。如图 1 所示。

图 1 表明, 基础点集 A 与构形点集 B 的差集为 Q , B 的任意性可使目标点集 Q 获得任意形状。

定义 2 同形变换。存在着基础点集 A 和构形点集 B , 若满足式(1)的目标点集 Q 成为 A 的映射 $f: A \rightarrow Q, \forall i, i \in A, \exists f(i) = i', f(j) = j' \in Q$, 使其满足:

$$\frac{d(i, j)}{d(i', j')} = k \mid k \text{ 为常数} \quad (2)$$

则称 Q 为 A 的同形变换。如图 1(f)。

当 $k < 1$ 时为缩小变换($B \neq \emptyset$); $k = 1$ 时为等大变换($B = \emptyset$)。使基础点集 A 放大 k 倍后

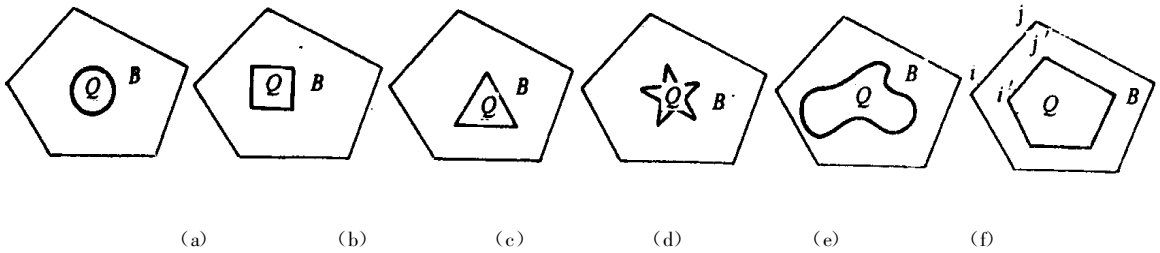


图 1 形状变换示意图
Fig. 1 Sketch of Form Transformation

再实施同形变换, 可得 A 的放大变换 Q 。

2.2 尺寸

在 n 维度量空间 R^n 中, 存在着度量单位 a 和度量对象 B, C , 且 $a, B, C \in R^n$ 。 B, C 对 a 的商称 B, C 称为 B, C 的尺寸, 即

$$B = B/a, C = C/a \mid a, B, C \in R^n \quad (3)$$

当 $B \geq C$ 时, 称为 B 的尺寸大于或等于 C , 反之亦然。

- 1) 当 $n=1$ 时, B, C 称为 B 与 C 的长度(或宽度、高度、深度);
- 2) 当 $n=2$ 时, B, C 称为 B 与 C 的面积;
- 3) 当 $n=3$ 时, B, C 称为 B 与 C 的体积。

由于地图研究的对象常常只涉及 1、2、3 维空间, 故本文的尺寸的定义域也仅限于这三类空间。

2.3 方向

定义 3 方向变换。设向量 \vec{a}_α 为方位角 α 的向量, 若使向量 \vec{a}_α 的方位角 α' 满足:

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha \mid \Delta\alpha \in [0^\circ, 360^\circ] \quad (4)$$

则称 $\vec{a}_{\alpha'}$ 为 \vec{a}_α 的方向变换。

- 1) 当且仅当 $\Delta\alpha=0$ 时, 称为同向变换;
- 2) 当 $\Delta\alpha \neq 0$ 时, 称为异向变换, 式(4)中, $\Delta\alpha$ 的多值性可使 \vec{a}_α 变换为任何方向。

2.4 密度

点线符号(含注记)是地图的主体, 它们构成了地图的图形图像, 其性质定义为 $i \neq 0$; 而面状域构成图形的背景, 其性质定义为 $i=0^{[4]}$ 。由于此文讨论的是阳像图, 其密度也应以阳像图上的点线符号密度为准。

定义 4 密度。在单位面积 S 内, 存在点线符号的集合 $S_i = \{P_i \mid i \neq 0\}$, S_i 与 S 之比的百分数称为密度, 即

$$D_i = (S_i/S) \times 100\% \quad (5)$$

如地图制印中网线的比例 10%、20% 即为其密度。

2.5 明度

定义 5 明度。在单位面积 S 内, 点线符号密度 D_i 的倒数与明度系数 C 的乘积, 称为明度。

即

$$E_i = \frac{C}{D_i} \quad (6)$$

式(6)中, 明度系数 C 与线划和底色的用色及对比度有关, 它遵循色彩明度变化的规律。例如, 用黄色底或白底时, 明度就大(在线划色不变的情况下); 用紫色、棕色等为底则明度要小些。

点线密度和明度系数的可变性, 可使符号获得不同的明度值。

2.6 结构

1) 图的定义。有序三重集合 $G = \{V(G), E(G), \psi\}$ 称为一个图, 其中 $V(G) \neq \emptyset$, 叫做顶点集合, $V(G)$ 的元素叫做图 G 的顶点; $E(G)$ 叫做边的集合, $E(G)$ 的元素叫做边; $V(G) \cap E(G) = \emptyset$; ψ 叫做关联函数, 其定义域是 $E(G)$, $\forall e \in E(G)$, \exists 惟一的顶对 $u, v \in V(G)$, 使得 $\psi(e) = uv$; 当 u 与 v 无序时, G 叫做无向图; 当 u, v 有序时, G 叫做有向图。记 $|V(G)| = v, |E(G)| = e$, 当 $v+e < +\infty$ 时, G 叫做有限图, 否则为无限图^[3]。

2) 结构的定义。设定域内点线符号构成图 G , 经变换后定域内的构图为 G' , G 与 G' 满足图的定义且为有限图。若 G 与 G' 各自的顶点集合 $V(G), V(G')$ 和边的集合 $E(G), E(G')$ 至少有一项不相等或均不相等, 即满足

$$V(G) \neq V(G') \vee E(G) \neq E(G') \quad (7a)$$

$$V(G) \neq V(G') \wedge E(G) \neq E(G') \quad (7b)$$

则称 G' 为 G 的异构变换, 或称 G' 与 G 结构不同。

图 2 中, a 与 d, b 与 c, d 与 e 满足式(7a); a, b, e, f 或 a, c, d, f 则满足式(7b)。这 6 个图彼此的结构都不同。定域内点线符号构图多样性使结构变换具有多样性。

2.7 颜色

颜色是地图符号的一种重要表象特征。它的颜色可以通过表象特征值 j 的计算和比照色序表确定。 j 值的计算式为^[6]:

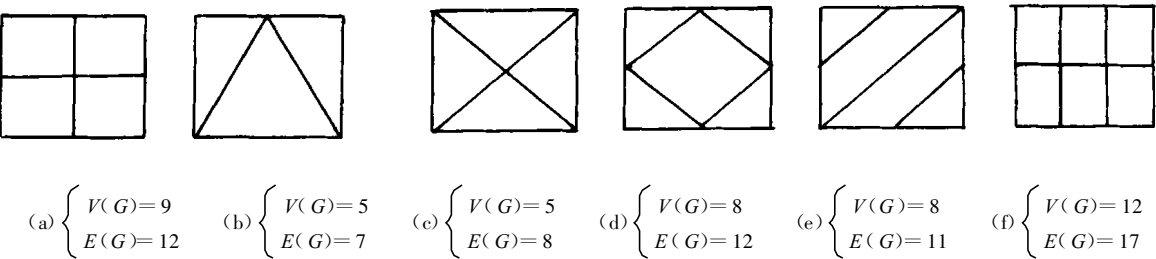


图 2 结构变换示意图

Fig. 2 Sketch of Constructure Transformation

$$j = 0.259\ 11\ \delta + 0.324\ 69\ \eta + 0.416\ 2\zeta$$
$$\delta\ \eta,\ \zeta \in [0, 1] \tag{8}$$

式中, $\delta\ \eta,\ \zeta$ 分别为配制具有表象特征值 j 的颜色所用的三原色油墨黄、品红、青的比例。

根据文献[7] 用色料三原色合成其他颜色的规律, 可得表象特征值 j 对应颜色的色序表(表 1)。从表 1 可见, 改变三原色黄、品红、青的比例, 还可以获得其他不同色相的颜色。表象特征值 j 的多值性使色彩变换具有多样性。

表 1 颜色及其表象特征值 j 序列

Tab. 1 Order of the Colour and Its Image Feature Value j

序号	颜色	表象特征值 j	δ	η	ζ
0	白	0	0	0	0
1	黄	0.259 11	1	0	0
2	品红	0.324 69	0	1	0
3	青	0.416 46	0	0	1
4	黄橙	0.421 46	1	0.5	0
5	红橙	0.454 24	0.5	1	0
6	黄绿	0.467 21	1	0	0.5
7	红紫	0.532 79	0	1	0.5
8	青绿	0.545 76	0.5	0	1
9	青紫	0.578 55	0	0.5	1
10	橙	0.583 80	1	1	0
11	绿	0.675 31	1	0	1
12	紫	0.740 89	0	1	1
13	黑	1.000 00	1	1	1

2.8 位置

所有地图皆与客观实际的两项基本要素有关, 即位置及其上面的特征。位置仅指二维平面上的位置, 例如用 x, y 坐标表示的地点。位置上面的特征是指某种性质或量值^[8]。位置为第一特征, 它关系到图形结构; 位置上面的特征为第二特征, 它表达其属性及其相关量值。显然, 前面提到的 7 种视觉变量在表达第二特征方面发挥着重要的作用。

定义 6 位置变换。存在着 $P(x, y) \in X \times Y$, 若 $P'(x', y') \in X \times Y$ 且满足:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \Delta x \\ y' &= y + \Delta y \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

则称 $P'(x', y')$ 为点 $P(x, y)$ 的位置变换。

1) 当且仅当 $\Delta x = 0, \Delta y = 0 \Leftrightarrow x = x', y = y'$, 称点 P' 与 P 位置相同;

2) 当 $\Delta x \neq 0 \vee \Delta y \neq 0, \Delta x \neq 0 \wedge \Delta y \neq 0$ 时, 称点 P' 与 P 位置不同。

在式(9)中, 通过改变 $\Delta x, \Delta y$ 可以使 P' 变换到地图的任何位置上。位置变换的巨大空间, 为构建多种形状的地图符号并通过符号的相互依存关系和结构布局反映制图区域的地理特征和分布特点提供了数学工具。这也是地图可以反映任何形状特征的地理空间的原因所在。

3 用视觉变量构造像元的潜能

3.1 组合公式

从 m 个不同的元素里, 每次取出 n 个元素 ($1 \leq n \leq m$), 其所有不同组合的种数用符号 C_m^n 表示, 公式为:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \tag{10}$$

3.2 构造像元的元素

定义 7 构造像元的元素。设 x 为视觉变量, $x_i, x_i' \in x$, 当且仅当 $x_i \neq x_i'$ 时, 称 x_i 和 x_i' 为不同的元素。

例如, 对形状变量而言, 圆、三角形、正方形等都视为形状变量的不同元素; 对尺寸而言, 形状相同但大小不同的图形, 视为不同的元素; 对结构而言, 不同的结构视为结构变量中的不同元素等。

3.3 地图符号设计中构造像元常见的元素

在 8 个视觉变量中, 每个不同的取值都满足定义 7, 显然, 构造像元的元素无限多。但在制图实践中, 往往只取有限的元素。

1) 形状。形状是表达事物性质特征的重要变量, 几何符号有圆形、三角形、正方形、长方形、菱形及几何图形的组合; 形状的元素姑且设有 10 种。

2) 尺寸。尺寸是反映事物数量特征的重要变量, 常用的有大、中、小 3 种元素。

3) 方向。常取 5 种元素, 即 0° 、 30° 、 45° 、 60° 和 90° 。

4) 密度。一般取密、中、疏 3 种元素。

5) 明度。一般取亮、中、暗 3 种。

6) 结构。结构是反映事物质量特征的重要变量, 这里只假定常用的结构为 10 种。

7) 颜色。地图上常用的颜色(含消色类)有红、黄、蓝、绿、棕、灰、黑、白等 8 种。

8) 位置。由于位置变量与符号的定位相关, 它决定于事物的空间分布。真正与符号的性质特征相关的, 实际上只涉及前面 7 个变量。因此, 这里不把位置变量视为构造像元的元素。

3.4 地图符号常规设计蕴含的巨大潜能

像元实质上是由若干视觉变量的元素组合生成。例如, 符号 \triangle 包含形状(三角形)、尺寸(中)、结构、颜色四要素。任意改变其中某一要素, 像元的意义都会随之改变。

设像元平均由 4 个元素构成。§3.3 中提出的构造像元的常见元素共有 42 个(未含位置变量), 即 $m=42$, $n=4$, 代入式(10), 得 $C_m^n = C_{42}^4 = 111\ 930$ 。这一结果表明, 选用有限个视觉变量元素进行有限的组合, 其生成的像元数量十分巨大。

像元是构成地图符号的中介, 虽然它们本质上同是点的集合, 但显然存在着包容关系, 即像元总是符号的子集。用 42 个视觉变量的元素, 选用 4 种元素组合方式, 同样可生成 111 930 种地图符号, 在这巨量的地图符号内填充不同的像元, 显然会赋予其不同的涵义。这样, 按一种符号和一种像元的组合, 即取 $m_1=111\ 930$, $n_1=2$ 的组合数 $C_{m_1}^{n_1} = \frac{111\ 930 \times 111\ 929}{2} = 6\ 264\ 106\ 485$, 可生成 62 亿多种符号。这一结果表明, 用有限的视觉变量元素进行有限的组合构成像元, 再进而生成地图符号蕴含着巨大的潜能。

4 结 论

本文对构造地图符号的最小单元——像元的

8 个视觉变量一一给出了数学定义, 从而使这些只局限于定性描述的概念获得了精密的数学形式和定量的描述。每个视觉变量均可在其定义域内任意取值而使构造像元的元素数量极大。但制图实践和计算表明, 对有限个元素(本例为 42)进行有限的组合(本例为 4)即可生成数以万计的像元。像元与等量的定域符号两两组合, 又可生成数亿种不同意义的地图符号。现代地图上丰富多彩的地图符号, 既是视觉变量组合生成地图符号潜能的展现, 又体现着地图表现和反映客体现实的巨大功能。毫无疑问, 充分发挥地图科学工作者的智慧和才能, 进一步挖掘视觉变量构造像元和地图符号的潜力, 对于地图的设计和创新具有深远的意义。

参 考 文 献

- 1 祝国瑞, 苗先荣, 陈丽珍. 地图设计. 广州: 广东省地图出版社, 1993
- 2 俞连笙, 王 涛. 地图整饰. 北京: 测绘出版社, 1995. 111~114
- 3 张燕燕, 胡毓钜. 地图可视化. 测绘工程, 2001, 10(1): 27~29
- 4 钟业勋, 胡毓钜. 地图的集合模型(表达式)及比较应用初探. 武汉测绘科技大学学报, 1990, 15(1): 58~65
- 5 王权禾. 图论及其算法. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1990
- 6 钟业勋. 地图易读性的度量研究. 武汉测绘科技大学学报, 1994, 19(4): 346~351
- 7 段体学, 王 涛. 地图整饰. 北京: 测绘出版社, 1985. 37
- 8 罗宾逊 A H. 地图学原理(第五版). 李道义, 刘耀珍译, 高 俊校. 北京: 测绘出版社, 1989
- 9 谷超豪. 数学词典. 上海: 上海辞书出版社, 1992. 39

作者简介: 魏文展, 教授。现主要从事 Banach 空间几何理论、地图学的数学原理研究。代表成果: 复空间几何性质及其鞅刻, 地图符号系统为布尔代数系的证明及其应用。

E-mail: weiwz@mail.gxgc.edu.cn

Mathematical Definition on the Visual Variables of the Cartographic Symbols

WEI Wenzhan¹ ZHONG Yexun¹ HUANG Rentao² PENG Yueying¹

(1 Institute of Mathematics and Information Science, Guangxi Teachers' College, 175 Mingxiu Road, Nanning, China, 530001)

(2 School of Resource and Environment Science, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: Cartographic symbols are composed of different basic picture elements. According to the definitions in the topology and theory of set, the mathematical definitions of eight of visual variables which are form, size, direction, density, lightness, construction colour and place, are given in this paper.

Key words: visual variable; picture element; cartographic symbol; combination

About the author: WEI Wenzhan, professor. His main research orientations are geometrical theory of Banach space and the mathematical elements of cartography. His main achievements include research of geometrical properties of complex space and its martingale characterization, and the proof of cartographic symbol sytem belonging to Boolean algebraic one and its application.

E mail: weiwz@mail.gxtc.edu.cn

(上接第 498 页)

services of theirs is assessed; ③this paper establishes a multi-dimension controlling model of optimization of land use structure. Especially, a mathematic model of ecological optimization based on green equivalent is built. In addition, a multi-objective linear programming model for optimization of land use structure is designed. In the end , this paper tests and verifies this theory of ecological optimization based on green equivalent and the optimal forest-coverage rate with Qonghai City in Hainan Province as an example. This research is significant for rationality of land use structure and sustainable land use.

Key words: land use structure; forest-coverage rate; green equivalent; value of ecosystem services; multi-dimension optimization; multi-objective linear programming

About the author: LIU Yanfang, professor. She is mainly concentrated on the research and education in the urban environment studies, land evaluation and land use plaming. Her typical achevements of researches include assessment on urban anti-disaster ability and urban tourism resources, land use planning, land evaluation modelling and GIS applications, etc.

E mail: yfliu610@sohu.com