

文章编号: 1671-8860(2003)03-0340-05

文献标识码: A

地形对确定高精度局部大地水准面的影响<sup>\*</sup>罗志才<sup>1</sup> 陈永奇<sup>2</sup> 宁津生<sup>1</sup>

(1 武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 香港理工大学土地测量与地理资讯学系, 香港九龙红磡)

**摘要:**以计算香港大地水准面为例, 着重研究了以下几点: ①DTM 的分辨率对地形改正的影响; ②质量柱体地形模型与质量线地形模型对计算地形改正的差异; ③采用 Helmert 凝聚改正法, 计算地形对大地水准面的间接影响; ④比较经典 Stokes-Helmert 方法与 Sjoberg 方法计算地形对大地水准面的影响。

**关键词:**地形模型; 地形改正; 直接影响; 间接影响; 大地水准面

**中图法分类号:** P223.0

物理大地测量的理论与实践表明, 地形起伏反映了重力场的不规则变化, 精确确定地形对地球重力场影响的研究是至关重要的, 如重力数据和航空重力数据的归算和格网化(拟合推估), 利用移去-恢复技术联合地面重力数据、航空重力数据、数字地形模型(DTM)和全球重力场模型确定高精度局部大地水准面等。应用 Stokes 公式计算大地水准面的前提是大地水准面外部不存在质量, 这就要求对地面重力数据或航空重力数据等进行归算。移去大地水准面外部地形质量的影响称为地形的直接影响(如经典地形改正); 而恢复地形质量带来的影响称为间接影响, 其中应包括大地水准面与调整大地水准面的差异。确定大地水准面中地形影响的误差主要来源于: ①DTM 的精度和分辨率的影响; ②地形改正方法的不同和计算模型的近似处理造成的误差; ③地壳密度的不均匀性(密度异常)引起的误差。就地形改正方法而言, 均衡改正、Helmert 凝聚改正、残差地形模型(RTM)和 Helmert/RTM 组合法更贴近于物理大地测量实际, 其中除 Helmert 凝聚改正方法以外, 其他 3 种方法得到的均是似大地水准面, 因此应顾及大地水准面与似大地水准面之间的差异。文献[1]的研究和计算表明, 尽管利用经典 Helmert 改正、RTM 和 Helmert/RTM 组合法计算的结果均与 GPS 水准数据符合较好, 但这 3 种方法计算结果之间的符合度在一般山区只有 5cm, 最大差值达到 26cm。Helmert/RTM 组合法的结果最好。这

说明在局部大地水准面的计算中, 所采用的地形改正方法很重要。此外, 文献[2]对某一山区(该地区地壳密度变化达 10%)的试算表明, 地壳密度的横向不均匀变化对地面重力异常的影响为几个 mGal, 对大地水准面差距的影响可达 cm 级。因此, cm 级局部大地水准面的确定应仔细研究和确定地形的影响。

## 1 计算方法与模型

## 1.1 地形改正

计算某地面点 $(x_i, y_j)$ 的地形改正公式为<sup>[3]</sup>:

$$c(i, j) = -G \int_E \int_{h_{ij}}^{h_y} \frac{\rho(x, y, z)(h_{ij} - z)}{r^3(x_i - x, y_j - y, h_{ij} - z)} dx dy dz \quad (1)$$

式中,  $G$  为地球引力常数;  $\rho(x, y, z)$  是流动点的地壳密度;  $h_{ij}$  为地面点 $(x_i, y_j)$ 的高程;  $E$  代表积分区域;  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

设地壳密度为常数, 对式(1)中  $z$  积分得:

$$c(i, j) = G \rho \left[ \int_E \frac{1}{r(x_i - x, y_j - y, 0)} - \frac{1}{r(x_i - x, y_j - y, h_{ij} - z)} \right] dx dy \quad (2)$$

在实际计算时, DTM 通常以规则格网数据表示, 并假定每个格网内的地形用一个质量均匀分

\* 收稿日期: 2003-01-25。

项目来源: 国家测绘局测绘科技发展基金资助项目(98013); 香港 RGC 资助项目(B. 34.37. Q.328)。

布而高程不变的棱柱体代替(图 1(a)), 则得到用质量棱柱(MP)地形模型表示的地形改正公式为:

$$c(i, j) = G^0 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} [x \ln(y + r(x, y, z)) + y \ln(x + r(x, y, z)) - z \cdot \arctan \frac{xy}{zr(x, y, z)}] \Big|_{x_i - (x_n + \Delta x \Delta)}^{x_j - (x_n + \Delta x \Delta)} \Big|_{y_j - (y_m + \Delta y \Delta)}^{y_j - (y_m - \Delta y \Delta)} \Big|_{h_j - h_{nm}} \quad (3)$$

在上述质量棱柱地形模型中, 如果假设地形质量集中分布于柱体中心线上(图 1(b)), 则用质量线(ML)地形模型表示的地形改正公式为:

$$c(i, j) = G^0 \Delta x \Delta y \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} [ \frac{1}{r(x_i - x, y_j - y, 0)} - \frac{1}{r(x_i - x, y_j - y, h_j - h_{nm})} ] \quad (4)$$

地形改正可利用二维 FFT 计算<sup>[4,5]</sup>。对式(3)和式(4)作级数展开, 并写成统一的谱表达式为:

$$c(i, j) = \beta c_0(i, j) + c_1(i, j) + c_2(i, j) + c_3(i, j) + \dots \quad (5)$$

式中各量的具体表达式及含义见文献[5]。实际计算时, 计算点设在格网中心, 中央区域的计算、谱泄漏和奇异积分的处理可见文献[3~5]。

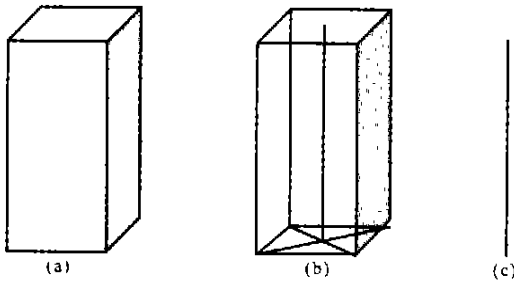


图 1 质量棱柱地形模型与质量线地形模型  
Fig. 1 Topographic Models of Mass Prism and Mass Line

### 1.2 直接影响

将地形改正应用于 Stokes 公式, 某地面点(φ<sub>P</sub>, λ<sub>P</sub>)上地形对大地水准面的直接影响为:

$$\delta N_{dir}(\varphi_P, \lambda_P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \delta g(\varphi, \lambda) \cdot S(\varphi_P, \lambda_P, \varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad (6)$$

式中, γ 为平均正常重力; S(φ<sub>P</sub>, λ<sub>P</sub>, φ, λ) 为 Stokes 函数; δg(φ, λ) 为延拓到大地水准面上的地形改正, 其严密定义和计算表达式见文献[2,6]。此外, 地形对大地水准面的直接影响也可按式(8)的解析式来表示<sup>[2,6]</sup>, 在理论上并无差异。

考虑到高程立方项对大地水准面的影响, 忽略更高次项的影响, 则式(6)还可写成球谐展开式

的形式<sup>[7]</sup>, 即

$$\delta N_{dir}(\varphi_P, \lambda_P) = -\frac{2\pi G^0}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+2}{2n+1} (h^2)_{nm} Y_{nm}(P) - \frac{2\pi G^0}{R\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(n+2)(n+1)}{3(2n+1)} (h^3)_{nm} Y_{nm}(P) \quad (7)$$

式中, (h<sup>ν</sup>)<sub>nm</sub> =  $\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} Y_{nm} d\sigma$ , ν = 2, 3; Y<sub>nm</sub> 为完全规格化的球谐函数。

### 1.3 间接影响

采用 Helmert 凝聚改正法, 则地形对某点(φ<sub>P</sub>, λ<sub>P</sub>)大地水准面的间接影响计算式为<sup>[8]</sup>:

$$\delta N_{ind}(\varphi_P, \lambda_P) = -\frac{\pi G^0}{\gamma} h_P^2 - \frac{G^0}{6\gamma} \iint_E \frac{h^3 - h_P^3}{r^3} dx dy + \frac{3G^0}{40\gamma} \iint_E \frac{h^5 - h_P^5}{r^5} dx dy + \dots \quad (8)$$

类似式(7), 地形对大地水准面的间接影响也可写成如下球谐展开式<sup>[7,9]</sup>:

$$\delta N_{ind}(\varphi_P, \lambda_P) = -\frac{2\pi G^0}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n-1}{2n+1} (h^2)_{nm} Y_{nm}(P) + \frac{2\pi G^0}{3R\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n-1)}{2n+1} (h^3)_{nm} Y_{nm}(P) \quad (9)$$

由式(7)和式(9)可导出地形对大地水准面的总影响, 仅顾及高程平方项的影响则有<sup>[10]</sup>:

$$\delta N_{total}(\varphi_P, \lambda_P) = -\frac{2\pi G^0}{\gamma} h_P^2 \quad (10)$$

式(10)表明, 地形对大地水准面的总影响与高程的平方成正比。与传统的计算方法相比, 该方法更加简洁, 而且便于计算。

实际计算时, 因式(6)和式(7)只能在有限范围内积分, 而全球 DTM 的分辨率又有限, 式(7)和式(9)只能展开到一定阶次, 因此如果有全球 DTM 数据, 则建议将经典的 Stokes 积分与球谐展开相结合, 即计算区域的内区仍然采用 Stokes 积分, 而外区则按球谐展开模型计算。

## 2 试算结果与分析

本文首先利用香港 16 幅 1:2 万的数字地形图建立了分辨率分别为 100m、500m 和 1 000m 的 DTM, 范围为 50km×70km, 其中 500m 和 1 000m 分辨率的 DTM 可直接由数字地形图建立, 也可利用 100m 分辨率的 DTM 取平均得到。估计 100m 分辨率 DTM 的精度为 m 级。图 2 是由分辨率为 100m 的 DTM 绘制的香港地区的地形示意图(HK80 格网坐标, 等值线间隔为 150m)。该地区高程最大值为 945m, 最小值为 -32m, 平均高程为 60m, 地形起伏较大。然后利用所建立的 DTM 对

上述计算方法和模型进行如下数值试验。因试算区域本身较小,因此,下面所有的积分运算均对整个计算区域积分。

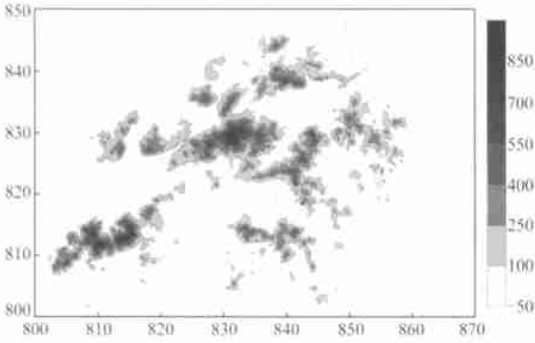


图2 香港地区的地形示意图  
Fig. 2 Topography of Hong Kong

### 2.1 地形模型的比较

质量柱体地形模型理论上比质量线地形模型更符合实际,而后的计算相对简单。为了比较两者对计算地形改正的差异及其对大地水准面的影响,本文采用二维FFT和100%填零技术,利用分辨率为100m的DTM和式(5)进行了试算

(计算至二次项),其结果列于表1。从表1可以看出,地形改正的最大差值约为0.3mGal,均方根为0.048mGal;这种差异对大地水准面的影响最大值为2mm,均方根为1mm,对于确定cm级大地水准面,此项误差可以忽略。图3为地形改正误差的等值线图(等值线间隔为0.10mGal)。比较图2和图3可以看出,地形改正误差与地形本身强相关,地形起伏越大的地区其地形改正的误差也越大,在高山区,此项误差值得重视。

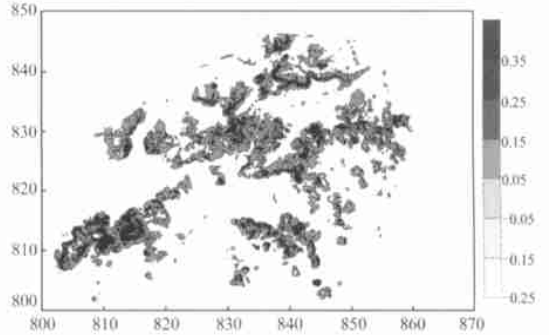


图3 质量棱柱地形模型与质量线地形模型计算地形改正的差异  
Fig. 3 Terrain Correction Differences Between Mass Prism Topographic Model and Mass Line Topographic Model

表1 不同地形模型对计算地形改正之差异及其对大地水准面的影响

Tab. 1 Effect of Different Topographic Models on Terrain Corrections and Geoid Undulations

地形模型	地形改正 /mGal				对大地水准面的影响 /m			
	最大值	最小值	平均值	RMS	RMS	最大值	最小值	平均值
MP	32.001	0.004	0.835	1.894	0.065	0.011	0.027	0.028
ML	31.778	0.004	0.815	1.853	0.064	0.011	0.026	0.028
MP-ML	0.326	-0.216	0.020	0.048	0.002	0.000	0.001	0.001

### 2.2 DTM分辨率的影响

首先对前面计算的分辨率为100m的地形改正取平均得到分辨率为500m和1000m的地形改正(表2中称为地改平均),然后将它们分别与由分辨率为500m和1000m的DTM计算的地形改正(表2中称为DTM结果)进行比较,可说明DTM的分辨率对计算地形改正的影响。表2的结果表明,DTM的分辨率对地形改正和大地水准面的影响较大,低分辨率的DTM损失了部分高频信息,此项误差在cm级大地水准面的确定中不容忽视。比较图4(等值线间隔为1.0mGal)和图2也可以看出,地形变化越激烈的地区,这种影响也越大。该试算结果说明,对于山区大地水准面的计算应尽可能地采用较高分辨率的DTM,用于计算地形改正的DTM的分辨率至少应该是要计算的大地水准面的分辨率的2倍甚至5倍。

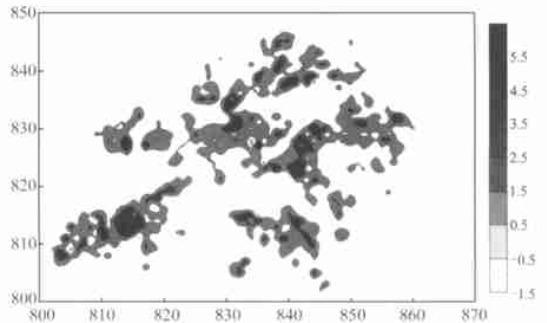


图4 DTM的分辨率对地形改正的影响  
Fig. 4 Effects of DTM on Terrain Corrections Due to Grid Spacing

### 2.3 地形对大地水准面的间接影响

采用100m分辨率的DTM和式(8)计算地形对大地水准面的间接影响(计算至二次项),其结果列

表 2 DTM 的分辨率对地形改正和大地水准面的影响

Tab. 2 Effects of the DTMs with Different Grid Spacing on Terrain Corrections and Geoid Undulations

格网间隔/m		最大值	最小值	平均值	RMS	STD
500	地改平均 /mGal	25.719	0.004	0.825	1.888	±1.698
	DTM 结果 /mGal	22.894	0.003	0.730	1.692	±1.527
	地形改正差值 /mGal	3.331	-0.818	0.095	0.304	±0.288
	大地水准面差值 /m	0.006	0.001	0.003	0.003	±0.001
1 000	地改平均 /mGal	25.719	0.004	0.807	1.864	±1.681
	DTM 结果 /mGal	20.643	0.003	0.597	1.428	±1.298
	地形改正差值 /mGal	5.076	-0.774	0.210	0.585	±0.546
	大地水准面差值 /m	0.014	0.003	0.007	0.007	±0.002

于表 3, 图 5 为间接影响的等值线图(等值线间隔为 0.005m)。比较图 5 和图 2 可以看出, 间接影响也与地形具有很强的相关性, 地形起伏越大其影响也越大; 在平坦地区, 该项影响可忽略, 而在山区则必须考虑此影响。因地形对大地水准面的间接影响包括局部(内区)影响(高频信息)和全球(外区)影响(中低频信息), 因此, 在有全球 DIM 的前提下, 应结合式(8)和式(9)进行严密计算。

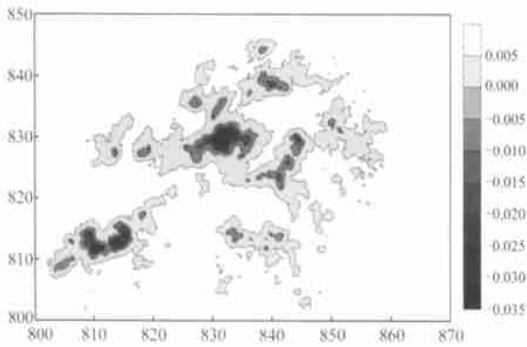


图 5 地形对大地水准面的间接影响

Fig. 5 Indirect Effect of Terrain on Geoid Undulations

表 3 地形对大地水准面的间接影响 /m

Tab. 3 Indirect Effects of Terrain on Geoid Undulations/m

最大值	最小值	平均值	RMS	STD
0.005	-0.033	-0.001	0.002	±0.002

### 2.4 经典 Stokes-Helmert 方法与 Sjöberg 方法

应用经典 Stokes-Helmert 方法, 首先根据式(6)和式(8)分别计算地形对大地水准面的直接影响和间接影响, 从而得到地形对大地水准面的总影响。然后将该结果与式(10)的计算结果进行比较, 其统计结果列于表 4, 图 6 反映了总地形影响差异的变化趋势。比较图 6 和图 2 可知, 地形起伏越大, 这种差异也越大。表 4 的结果表明, 经典 Stokes-Helmert 方法存在严重的偏差, 这主要是由于忽视中长波地形影响(外区影响)和经典方法

中模型近似误差引起的, 这种影响在 cm 级大地水准面的计算中不容忽视。

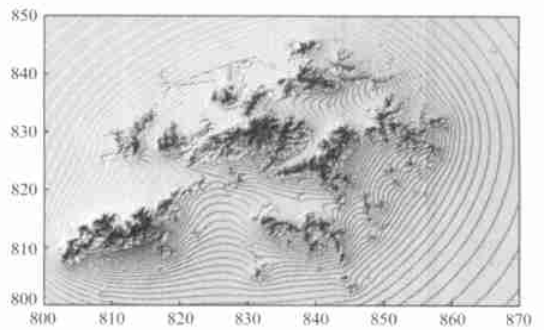


图 6 Sjöberg 方法与经典 Stokes-Helmert 方法计算地形对大地水准面总影响的差异

Fig. 6 Differences of Total Terrain Effect on Geoid Undulations by Sjöberg Method and Classical Stokes-Helmert Method

## 3 结论与建议

以确定 cm 级大地水准面为目标, 精确确定地形对大地水准面的影响显得尤为重要。本文的试算结果表明: ①质量棱柱地形模型和质量线地形模型对计算地形改正的差异在平坦地区可以忽略, 但在山区值得重视; ②应尽可能采用较高分辨率的 DTM 计算地形改正。一般说来, 在山区, DTM 的分辨率至少为大地水准面分辨率的 2 倍甚至 5 倍以上; ③经典 Stokes-Helmert 方法存在明显的偏差, 应采用更加严密的计算方法和模型, 如利用式(6)、(7)计算地形的直接影响, 利用式(8)、(9)计算地形的间接影响。

此外, 因本文的计算区域较小, 没考虑积分半径对计算地形改正和大地水准面的影响, 这种影响在大范围的大地水准面计算中值得重视。地壳密度异常对大地水准面的影响需进一步研究。

表4 经典 Stokes-Helmert 方法与 Sjöberg 方法计算地形总影响的差异/m  
Tab. 4 Differences of Total Terrain Effect on Geoid Undulations by Sjöberg Method and Classical

Stokes-Helmert Method/m					
计算方法	最大值	最小值	平均值	RMS	STD
Stokes-Helmert (1)	-0.011	-0.096	-0.027	0.029	±0.011
Sjöberg (2)	0.000	-0.102	-0.001	0.005	±0.005
(2)-(1)	0.060	-0.040	0.026	0.028	±0.009

## 参 考 文 献

- Oman O C D, Forsberg R. How to Handle Topography in Practical Geoid Determination: Three Examples. *Journal of Geodesy*, 2000(74): 458~466
- Martinez Z. *Boundary Value Problems for Gravimetric Determination of Precise Geoid*. New York: Springer-Verlag, 1997
- Heiskanen W A, Moritz H. *Physical Geodesy*. San Francisco: W H Freeman and Company, 1967
- Forsberg R. Gravity Field Terrain Effect Computation by FFT. *Bulletin Geodesique*, 1985(59): 342~360
- Li Y C. Optimized Spectral Geoid Determination. UGGE Report No. 20050. Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, 1993
- Nahavandchi H. The Direct Topographical Correction in Gravimetric Geoid Determination by the Stokes-Helmert Method. *Journal of Geodesy*, 2000(74): 488~496
- Nahavandchi H, Sjöberg L E. Precise Geoid Determination Over Sweden Using the Stokes-Helmert Method and Improved Topographic Corrections. *Journal of Geodesy*, 2001(75): 74~88
- Wichiencharoen C. The Indirect Effects on the Computation of Geoid Undulations. OSU Report No. 336. Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA, 1982
- Sjöberg L E, Nahavandchi H. On the Indirect Effect in the Stokes-Helmert Method of Geoid Determination. *Journal of Geodesy*, 1999(73): 87~93
- Sjöberg L E. The Total Terrain Effect in Gravimetric Geoid Determination. *Boll. Sci. Affini.*, 1997(2): 209~222

第一作者简介: 罗志才, 教授, 博士生导师。研究方向为物理大地测量。代表成果: 卫星重力梯度边值问题的理论和方法。

E-mail: zhcluo@sgg.wtusm.edu.cn

## Effect of Terrain on the Determination of High Precise Local Gravimetric Geoid

LUO Zhicai<sup>1</sup> CHEN Yongqi<sup>2</sup> NING Jinsheng<sup>1</sup>

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China 430079)

(2 Department of Land Surveying and Geo-informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Kowloon, Hong Kong)

**Abstract:** For the determination of high precise (centimeter level) local gravimetric geoid, it is very important to determine the terrain effects on geoid undulations. The effect of grid spacing of digital topographic model on terrain corrections and geoid undulations and the indirect terrain effect on geoid undulations are studied, as well as the effect of mass prism and mass line topographic models on terrain corrections. And the differences of the total terrain effect on geoid undulations by classical Stokes-Helmert method and Sjöberg's method are discussed and compared. Finally, some practical conclusions and suggestions are drawn from the test results of Hong Kong geoid determination.

**Key words:** topographic model; terrain correction; direct effect; indirect effect; geoid

**About the first author:** LUO Zhicai professor, Ph. D supervisor. He is engaged in teaching and studying physical geodesy. His representative achievement is Theory and Methodology on Satellite Gravity Gradiometry Boundary Value Problem.

E-mail: zhcluo@sgg.wtusm.edu.cn

(责任编辑: 平子)