

测地坐标系的优良性质及其在大城市精密定位中的应用

施一民¹

(1 同济大学测量与国土信息工程系, 上海市四平路 1239 号 200092)

摘要: 为真正实现大城市中的精密定位, 提出了直接采用区域性椭球面上的测地坐标代替高斯平面直角坐标以作控制网点平面位置的表述, 分析了测地坐标系的优良性质, 阐述了采用测地坐标系实现大城市精密定位的原理和方法, 初步探索了其应用的可行性。

关键词: 投影面; 区域性椭球面; 测地坐标系

中图法分类号: P258

为避免高斯投影变形, 现有的一种做法是将小范围内的高精度工程控制网点直接定位在某个水准面上, 将其看作为平面, 对方向和边长亦不再作高斯投影改正, 其事实上采用的是一般的平面直角坐标系, 以此使平面控制点间的边长与该水准面上的实际平距相接近。显然, 其所属的坐标系与所在城市的高斯坐标系并不一致, 由此会产生一些弊端, 而不能适应现代大城市发展的需要。本文对从控制网的建立到实际应用的一系列问题进行了分析和探讨。

1 区域性椭球面的定义和确定

建立城市控制网的一个基本原则是使由控制点平面坐标反算的边长与实测平距尽可能地接近。大多数城市控制网都是选择测区的平均高程面作为边长归算的高程基准面(以下称为投影面), 而将实测边长直接归算至该投影面上。于是可定义并采用这样一个区域性椭球面, 使它在测区范围内与投影面充分地接近^[1, 2], 因而可认为两空间点在投影面上的平距与在该区域性椭球面上两投影点之间的大地线长度是相等的。

在以往常规测量的技术条件下, 无法实现该区域性椭球的定位并测定其元素, 而如今利用 GPS 技术, 就能确定与测区投影面密切吻合的区域性椭球

面的元素及其空间位置, 并能得出 GPS 网中各点在区域性椭球面上的大地经纬度和大地高^[3, 4]。

2 测地坐标系的建立和性质

众所周知, 在椭球面上按大地经纬度进行点间相对位置及控制加密计算十分不便。在实际应用中, 需将大地坐标或椭球面上的边长、方向等投影在平面上, 但由此不免产生投影变形。为了能直接在区域性椭球上作简便的计算, 可以采用文献[5, 6]定义的区域性椭球面上的测地坐标系。

欲在区域性椭球面上建立测地坐标系, 如图 1 所示, 可在测区中心附近选择控制点 P_0 作为其坐标原点 $(0, 0)$, 设其已知的大地经纬度为 (B_0, L_0) 。作为曲线坐标系的两个坐标轴分别为过点 P_0 的经线及过点 P_0 且与该经线正交的大地线。与该起始经线正交的一族大地线及与此族大地线均正交的一族测地平行线(其中包括起始经线), 就构成了椭球面上的一个坐标格网, 则区域性椭球面上任一点 P 的位置即可用测地坐标 (s_x, s_y) 来表述。为此, 过点 P 作大地线 PP_x 与该经线正交, 设交点为 P_x , 则点 P 的测地纵坐标 s_x 即为纵坐标轴上由点 P_0 至点 P_x 的经线上的弧长, 而测地横坐标 s_y 则由点 P 至点 P_x 的大地线长

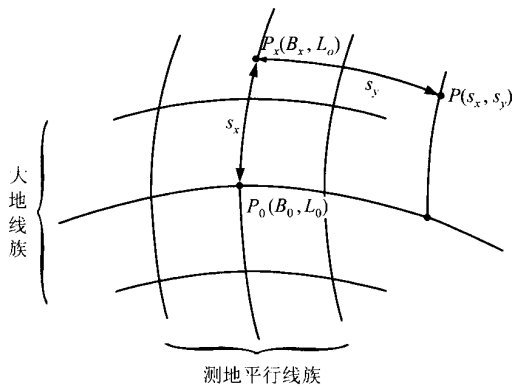


图 1 测地坐标系的表示

Fig. 1 Indication of Geodesic Coordinate System

度, (s_x, s_y) 就可作为这两族互为正交的坐标曲线的参数。与大地坐标系相比, 以此来表述地球椭圆面上的点位具有如下优点:

1) 同经纬线一样, 这两族坐标曲线亦互为正交, 但两个坐标参数 s_x, s_y 均为长度量, 不同于大地坐标系中的两个坐标参数 B, L (均为角度量)。

2) 在坐标格网中, 任意两条作为坐标曲线的测地平行线所截取的大地线段的弧长均相等, 这正是微分几何中所定义的测地平行线的固有性质^[5, 6]; 但作为坐标曲线的大地线却并不具有测地平行线的这种性质, 任意两条大地线之间的测地平行线弧长并不相等, 以起始经线上的弧长为最长, 在其东西两侧, 呈对称的、有规律可循的减小趋势。这种趋势可用文献[5]中所提出的测地平行线长度归化因子 n 来描述, n 定义为某一测地平行线上微分弧长 ds'_x 与起始经线上相应的微分弧长 ds_x 之比, 并已推证得出其足够精确的表示式为 $n = (1 - s_y^2) / (2R^2)$, R 可取坐标原点 P_0 处的平均曲率半径。

3) 测地坐标系与大地坐标系之间可互作转换, 区域性椭圆面上一点的测地坐标与大地坐标存在着一一对应的确定关系, 可进行换算^[7]。

4) 采用区域性椭圆面上的测地坐标, 可按简便的测地主题正反解公式^[8, 9]来进行椭圆面上的有关计算, 且足以满足局部区域内确定大地线长度与角度的精度要求。

对于长度小于 15km 的大地线, 可采用式(1)来计算两点间的大地线长度:

$$S_{12} = \sqrt{\Delta s_{y_{12}}^2 + \Delta s_{x_{12}}^2 \cdot n_{12}^2} \quad (1)$$

将它与按大地主题反解所得结果相比, 最大差异不超过 1mm。式(1)中, $\Delta s_{x_{12}}, \Delta s_{y_{12}}$ 分别为大地线起终点 1、2 的测地纵、横坐标差, 即

$$\Delta s_{y_{12}} = s_{y_2} - s_{y_1}, \Delta s_{x_{12}} = s_{x_2} - s_{x_1} \quad (2)$$

测地平行线归化因子 n_{12} 可由 1、2 两点的测地横坐标的平均值 $s_{y_{12}}$ 求得:

$$n_{12} = 1 - s_{y_{12}}^2 / (2R^2) \quad (3)$$

式中, R 仍可取测地坐标系原点 P_0 处的平均曲率半径。类似于大地坐标系中的大地方位角, 测地坐标系中一点上的大地线的方向角 α_{12} , 是以该点的测地平行线方向 (近似指北) 作为起始方向。对于长度小于 10km 的大地线, 可采用式(4)计算方向角:

$$\alpha_{12} = \arctan \frac{\Delta s_{y_{12}}}{\Delta s_{x_{12}} \cdot n_{12}} \quad (4)$$

可证所舍去的微小项的影响最大亦不超过 $\pm 0.05''$ 。

由式(1)、式(4)不难看出, 在一定范围内, 在椭圆面上按测地坐标作点间的相对位置解算的公式十分简便, 类似于平面解算公式, 只是增加了一个测地平行线归化因子 n_{12} 。这就为不需经过高斯投影, 直接在椭圆面上计算点位坐标或确定点间的相对位置关系创造了条件。

3 控制网点测地坐标的求解

3.1 首级控制网中网点测地坐标的确定

如果首级控制网的建立采用了 GPS 定位技术, 则不难确定密切吻合于测区投影面的区域性椭圆面^[3], 据此可平差得出其上各网点的大地经纬度 (B_i, L_i) 和大地高 H_i 。由各网点相对于投影面的水准高程与大地高之间差异的大小, 还可考察该椭圆面与投影面的吻合程度。

借助于测地坐标系坐标原点 P_0 的大地经纬度 (B_0, L_0) 的已知值, 采用文献[6]所述的算法和公式, 即可将 (B_i, L_i) 转换为测地坐标 (s_{x_i}, s_{y_i}) 。

3.2 GPS 加密控制网点测地坐标的求定

由于 GPS 测定的是 WGS84 中的三维坐标差, 直接在二维的测地坐标系中对三维基线向量的观测值进行平差会有所不便, 因此可将已知点 (至少 3 个) 在区域性椭圆面上的大地经纬度 (B_i, L_i) 和大地高 H_i 作为固定数据, 基于区域性椭圆面或基于与其相应的三维直角坐标系进行附合网平差^[1], 从而得出加密点的大地经纬度, 再参照 (B_0, L_0) , 即可将加密点的大地经纬度转换为测地坐标。

4 测地坐标系中边角网的平差解算

对于面积不大、精度要求甚高的城市工程控

制网,边角网仍有很大的应用价值。对某些重大工程,除了布设 GPS 网外,有时还兼布边角网,以作校核。投影面上的边长、方向观测值即可看作区域性椭球面上的边长、方向观测值^[1]。只需再加入表征测地坐标系的基准数据,就可直接在

$$S_{ki} + v_{S_{ki}} = \sqrt{(s_{y_i}^0 + \delta s_{y_i} - s_{y_k}^0 - \delta s_{y_k})^2 + (s_{x_i}^0 + \delta s_{x_i} - s_{x_k}^0 - \delta s_{x_k})^2 (n_{ki}^0)^2} \tag{5}$$

$$v_{S_{ki}} = c_{S_{ki}} \delta s_x + d_{S_{ki}} \delta s_y - c_{S_{ki}} \delta s_{x_i} - d_{S_{ki}} \delta s_{y_i} + l_{S_{ki}} \tag{6}$$

式中, $(s_{x_i}^0, s_{y_i}^0)$ 为各网点测地纵、横坐标的近似值,可由测地坐标系的基准数据出发,利用边长、方向观测值按测地主题正解公式^[8]依次推算得出; $c_{S_{ki}}$ 、 $d_{S_{ki}}$ 及 $l_{S_{ki}}$ 分别为边长误差方程的系数及常数项,其表示式为:

$$c_{S_{ki}} = - \frac{s_{x_i}^0 - s_{x_k}^0}{S_{ki}^0} (n_{ki}^0)^2 = - n_{ki}^0 \cos \alpha_{ki}^0$$
$$d_{S_{ki}} = - \frac{s_{y_i}^0 - s_{y_k}^0}{S_{ki}^0} = - \sin \alpha_{ki}^0, l_{S_{ki}} = S_{ki}^0 - S_{ki} \tag{7}$$

式中,

$$n_{ki}^0 = 1 - \frac{(s_{y_k}^0 + s_{y_i}^0)^2}{8R^2} \tag{8}$$

$$S_{ki}^0 = \sqrt{(s_{y_i}^0 - s_{y_k}^0)^2 + (s_{x_i}^0 - s_{x_k}^0)^2 (n_{ki}^0)^2} \tag{9}$$

4.2 方向观测值 L_{ki} 的误差方程式

由式(4)可得:

$$L_{ki} + v_{ki} + Z_k^0 + z_k =$$
$$\arctan \frac{(s_{y_i}^0 + \delta s_{y_i}) - (s_{y_k}^0 + \delta s_{y_k})}{[(s_{x_i}^0 + \delta s_{x_i}) - (s_{x_k}^0 + \delta s_{x_k})] n_{ki}} \tag{10}$$
$$v_{ki} = - z_k + a_{ki} \delta s_{x_k} + b_{ki} \delta s_{y_k} - a_{ki} \delta s_{x_i} - b_{ki} \delta s_{y_i} + l_{ki} \tag{11}$$

式(10)中, Z_k^0 就是 k 测站零方向(在此以 k_1 方向表示)方向角的近似值, z_k 为其改正数,称为定向角未知数。式(11)中,方向观测值 L_{ki} 的误差方程的系数 a_{ki} 、 b_{ki} 及常数项 l_{ki} 分别为:

$$a_{ki} = \frac{\rho(s_{y_i}^0 - s_{y_k}^0)n_{ki}^0}{(S_{ki}^0)^2} = \frac{\rho \sin \alpha_{ki}^0 n_{ki}^0}{S_{ki}^0} \tag{12}$$

$$b_{ki} = - \frac{\rho(s_{x_i}^0 - s_{x_k}^0)n_{ki}^0}{(S_{ki}^0)^2} = - \frac{\rho \cos \alpha_{ki}^0}{S_{ki}^0}$$

$$l_{ki} = \arctan \frac{s_{y_i}^0 - s_{y_k}^0}{(s_{x_i}^0 - s_{x_k}^0)n_{ki}^0} - L_{ki} - Z_k^0 \tag{13}$$

$$Z_k^0 = \alpha_{k1}^0 = \arctan \frac{s_{y_1}^0 - s_{y_k}^0}{(s_{x_1}^0 - s_{x_k}^0)n_{ki}^0}$$

在式(6)、式(11)中,为简便起见,对于测线中点的测地平行线归化因子,并未将其近似值 n_{ki}^0

区域性椭球面上进行平差来求定各网点的测地坐标。

4.1 边长观测值 S_{ki} 的误差方程式

因测地平行线长度归化因子 n 仅含测地横坐标的二阶小项,由式(1)可得:

的改正值作为待定参数。为消除 n_{ki}^0 不准确所产生的影响,可采用迭代平差的方法,将初次平差后所得的网点测地坐标再取为近似坐标,并由此对各测线求得更准确的近似值 n_{ki}^0 ,重复进行平差,必能将平差收敛至惟一的确定值。

综合全部边长及方向观测值的误差方程式并消去定向角未知数后,可将边角网的误差方程组写成:

$$V = A \delta X + L \tag{14}$$

式中,待定参数 δX 中包含所观测的全部网点的测地坐标近似值的改正值;系数矩阵 A 是秩亏矩阵。

4.3 基准数据的引入

若将两个或两个以上已知点的测地坐标作为固定值,可将其排除在待定参数 δX 以外,则相应的系数矩阵的列数减少了 4 个或 4 个以上,即可进行满秩的间接平差,由此实现在上级网控制下对加密网所作的附合网平差。

若仅固定一个控制点的测地坐标及其至另一个控制点的方向角,此时可附加由基准点测地坐标及基准方向角所对应的 3 个基准方程式来进行独立边角网平差。设基准点 1 的测地坐标为 (s_{x_1}, s_{y_1}) ,基准方向角为 1、2 两点之间的方向角 α_{12} ,其基准方程式为:

$$G_B^T \delta X = 0 \tag{15}$$

式中,系数矩阵 G_B^T 的表达式见文献[10]。只要选取基准点 1 测地坐标的近似值为其坐标固定值,并在满足式(16)的条件下来选取点 2 的近似坐标,就能使 3 个基准方程式(15)的右端项为零。

$$\tan \alpha_{12} = \frac{s_{y_2}^0 - s_{y_1}^0}{(s_{x_2}^0 - s_{x_1}^0)} \cdot \left[\frac{8R^2}{8R^2 - (s_{y_2}^0 + s_{y_1}^0)^2} \right] \tag{16}$$

由式(14)附加基准方程式(15)即可平差解得测地坐标近似值的改正值:

$$\delta X = - (A^T P A + G_B G_B^T)^{-1} A^T P L \tag{17}$$

5 结 语

采用区域性椭球面上的测地坐标来表述控制

网点的平面位置, 完全免除了投影变形, 从而可精确地求定投影面上的水平距离和水平角度, 以满足工程设计和施工放样的高精度要求。在此, 水平角度可由两测线的方向角之差得出; 水平距离则由两点间的大地线长度得出。众所周知, 在地球椭球面上, 长达 10km 的大地线长度仅比两点之间的直线距离长 1mm, 因此用控制网点的测地坐标按式(1)和式(4)来计算所需的设计和放样数据是可行的。这就能在较大的区域内建立真正意义上的高精度的城市与工程平面控制网, 有利于大型工程的精密定位, 从而更好地服务于飞速发展的城市与交通建设事业。

参 考 文 献

1 施一民. 现代大地控制测量. 北京: 测绘出版社, 2003

2 施一民, 李 健, 张文卿, 等. 地方独立坐标系的性质与区域性椭球面的确定. 测绘通报, 2001(9): 4~5

3 施一民, 周拥军, 张文卿. 用定向定位调整法确定区域性椭球面. 测绘学报, 2002, 31(2): 118~122

4 施一民, 张文卿. 区域性椭球元素的最佳确定. 测绘工程, 2000, 9(3): 27~29

5 施一民, 冯 琰. 地球椭球面上另一种形式的测地坐标系的建立和应用. 同济大学学报, 2001, 29(11): 1 282~1 285

6 苏步青. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 1987. 135~160

7 施一民, 冯 琰. 两种测地坐标系之间的坐标转换. 测绘学报, 2002, 31(增刊): 22~26

8 施一民, 朱紫阳. 测地坐标系中大地线的微分方程及微分关系式. 同济大学学报, 2003, 31(1): 40~43

9 施一民, 朱紫阳. 测地主题正反解算. 测绘工程, 2003, 12(1): 9~12

10 施一民. 论测量控制网定位的各种处理方法. 同济大学学报, 2002, 30(11): 1 331~1 336

作者简介: 施一民, 教授, 博士生导师。现主要从事现代大地控制测量和测量数据处理理论与应用的研究和教学。代表成果: 全球定位系统(GPS)的原理与数据处理等。在国内外已发表论文 90 余篇。
E-mail: yimshi@citiz. net

Advantages of Geodesic Coordinate System and Its Application
to Exact Positioning of Large Cities

SHI Yimin¹

(1 Department of Surveying and Geoinformatics, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai, China, 200092)

Abstract: In order to realize the exact positioning of large cities, this paper puts forward a scheme in which the horizontal location of control points are denoted by geodesic coordinate system on the regional ellipsoidal surface, no more by Gauss coordinate system on Gaussian plane. The advantages of geodesic coordinate system are discussed. Then the principle and the procedures of applying geodesic coordinate system to the exact positioning of large cities are introduced.
Key words: regional ellipsoidal surface; projection surface; geodesic coordinate system

About the author: SHI Yimin, professor, Ph. D supervisor. He is concentrated on the research and education in modern geodetic and control survey, the theory and method of surveying data processing. His typical achievement is The Principle of Global Positioning System and Its Application, etc. His published papers at home and aboard are more than 90.
E-mail: yimshi@citiz. net

(责任编辑: 晓平)