

# 非心摄动引力的快速计算方法研究

张传定<sup>1</sup> 吴晓平<sup>1</sup>

(1 郑州信息工程大学测绘学院, 郑州市陇海中路 66 号, 450052)

**摘要:** 给出了球谐函数不含阶次( $n, m$ )调制的递推公式, 推导出非心引力矢量、引力张量的快速计算格式, 给出了相应的算法。该算法优于传统正常化递推求和算法, 减少了运算次数, 使计算速度提高了 5 倍。对低轨卫星预报、卫星重力测量反演、动力法定轨等的响应时间都具有重要贡献。

**关键词:** 引力矢量; 引力张量; 摄动力; 球谐函数; 右函数

中图法分类号: P227.1

在卫星轨道数值解和动力法定轨中, 右函数的计算方法是制约计算速度的主要因素。在右函数的计算中, 地球非心引力的计算所占计算时间是主要的, 尤其是对低轨道卫星而言, 需要的阶次高, 计算时间就长, 计算方法就显得极为重要。另一方面, 动力法反演地球重力场时, 偏导数的计算也需要频繁地调用球函数及其一阶、二阶梯度。为此, 本文重点研究卫星精密定轨中有关球函数和引力及其梯度的计算方法, 以期给出较为高效的算法。

## 1 地球非球形引力摄动位

地球非球形引力摄动位  $\delta V$  可表示为:

$$\delta V(r, \varphi, \lambda_G) = \frac{GM_e}{a_e} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1}.$$

$$P_{nm}(\sin \varphi) \left( C_{nm} \cos m\lambda_G + S_{nm} \sin m\lambda_G \right) \quad (1)$$

式中,  $GM_e$  是地心引力常数;  $a_e$  是地球参考椭球的长半径;  $(r, \varphi, \lambda_G)$  是卫星在地固坐标系中的球坐标, 即地心向径、地心纬度和从格林尼治子午方向起算的经度;  $(C_{nm}, S_{nm})$  为正常化地球引力位系数;  $P_{nm}(\sin \varphi)$  为正常化球函数。由于

$$\| P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda_G \| = \sqrt{4\pi} \quad (2)$$

故引力摄动位  $\delta V$  的球面平均范数为:

$$\| \delta V \| = \frac{GM_e}{a_e} \sqrt{\sum_{n=2}^N \left( \frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} \sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2)} =$$

$$\frac{GM_e}{a_e} \sqrt{\sum_{n=2}^N \left( \frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} K_n} \quad (3)$$

式中,  $K_n$  为位系数的阶方差, 它可由位系数模型计算给出。有时为了分析问题方便, 当  $n > 2$  时也可由地面重力异常的阶方差模型给出。如利用常用的 6 参数重力异常阶方差模型可以写出:

$$K_n = \frac{10^{-12}}{n-1} \left( \frac{\alpha_1}{n+A} S_1^{n+2} + \frac{\alpha_2}{(n-2)(n+B)} S_2^{n+2} \right) \quad (4)$$

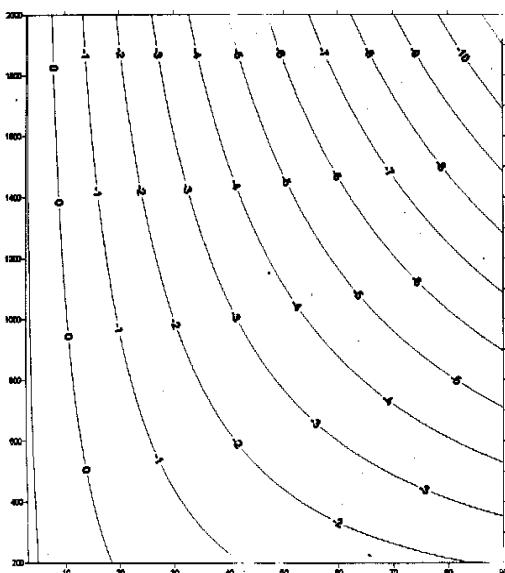
其中,  $\alpha_1, \alpha_2, S_1, S_2$  为实常数,  $A, B$  为整常数。取  $\alpha_1 = 3.405$ ,  $\alpha_2 = 140.03$ ,  $S_1 = 0.998006$ ,  $S_2 = 0.914232$ ,  $A = 1$ ,  $B = 2$ 。折合成长度量纲, 则卫星高度  $n$  阶摄动位的贡献为:

$$\zeta_n = \frac{\| \delta V_n \|}{GM_e / r^2} = a_e \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n-1} \sqrt{K_n} \quad (5)$$

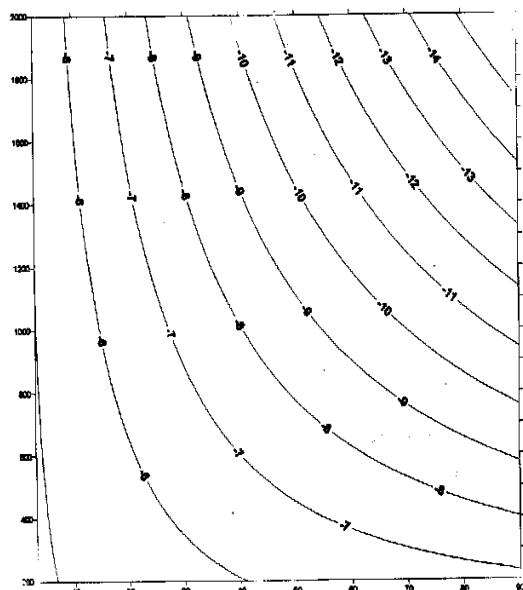
$\zeta_n$  表示  $n$  阶摄动位对位置的敏感度。图 1 给出了直到 90 阶次摄动位  $\lg \zeta_n$  的等值线。图中,  $x$  轴对应球谐函数的阶次;  $y$  轴对应于卫星的高度, 以 km 为单位; -1 相当于 dm 级, -2 相当于 cm 级。也就是说, 扣除中心引力位和二阶带谐项, 该图反映了 3 阶以上摄动位对轨道位置的要求。单从位能看, 不同高度的卫星高阶项位能对轨道位置的要求不是很高, 这也是改进的 PECE 算法只计算中心引力位和二阶带谐项的原因之一。

同理, 可以求得摄动力在卫星高度处  $n$  阶的贡献相对于中心引力的比为:

$$\epsilon_n = \frac{\| \nabla \delta V_n \|}{GM_e / r^2} = \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sqrt{(n+1)(2n+1)K_n}$$

图1 直到90阶次摄动位 $\lg \xi_n$ 的等值线Fig. 1 Contour of  $\lg \xi_n$  till Degree and Order 90

由此可以求得不同高度处 $n$ 阶摄动位的量级,为精密轨道确定选定模型的阶次提供依据。图2给出了直到90阶次摄动引力在不同高度上的相对量级 $\lg \epsilon_n$ 。 $x$ 、 $y$ 轴含义同图1。 $-6$ 相当于 $O(J_2^2)$ 量级。若计算至 $O(J_2^3) \approx 10^{-9}$ 量级,从图中可以查得不同高度卫星所需要的最高阶次。

图2 直到90阶次摄动引力在不同高度上的相对量级 $\lg \epsilon_n$ Fig. 2 Contour of  $\lg \epsilon_n$  at Different Altitudes till Degree and Order 90

## 2 球函数的改进递推算法

地球引力位及其引力矢量、引力张量的计算速

度取决于式(1)中球函数的表达形式。众所周知,球函数的表达形式有自然形式、物理大地测量中常用的正常化表达形式、正交归一化复数球函数表示3种。在轨道理论中,前两种形式同时使用。显然,地球引力位模型通常以正常化形式给出,计算时有些软件将其恢复成自然形式计算,有些软件使用正常化形式计算。正常化球函数的递推公式为:

$$P_{n, m}(x) = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}} x P_{n-1, m}(x) - \sqrt{\frac{(2n+1)(n-1+m)(n-1-m)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}} P_{n-2, m}(x) \quad (n \geq 2; 0 \leq m < n-1) \quad (6)$$

$$P_{n, n}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \sqrt{1-x^2} P_{n-1, n-1}(x) \quad (n \geq 2)$$

递推的初始值为:

$$P_{0, 0}(x) = 1, P_{1, 0}(x) = \sqrt{3}x, \quad (7)$$

$$P_{1, 1}(x) = \sqrt{3} \sqrt{1-x^2}$$

从式(6)可以看出,球谐函数的递推系数是阶次 $(n, m)$ 的函数,这就增加了递推的计算工作量。尽管编程时可以采用其他措施,但其乘法运算次数仍然较高。为此,引入新的球函数的定义,使其递推尽可能简化。

由球函数的积分公式,可以写出:

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n e^{imu} d\theta = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!} P_{n, m}(\cos \theta) \quad (8)$$

分解后,得:

$$\frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!} P_{n, m}(\cos \theta) = \cos \theta \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^{n-1} e^{imu} d\theta + \frac{i}{2} \sin \theta \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^{n-1} (e^{i(m+1)u} + e^{i(m-1)u}) du \quad (9)$$

从而可以求得:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n+m)!} P_{n, m}(\cos \theta) = & \cos \theta \frac{(n-1)!}{(n-1+m)!} P_{n-1, m}(\cos \theta) - \\ & \frac{1}{2} \sin \theta \left[ \frac{(n-1)!}{(n+m)!} P_{n-1, m+1}(\cos \theta) - \right. \\ & \left. \frac{(n-1)!}{(n-2+m)!} P_{n-1, m-1}(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

定义非正常化球谐函数与球谐函数的关系为:

$$P_{n, m}(\cos \theta) = \frac{2^n n!}{(n+m)!} P_{n, m}(\cos \theta) \quad (11)$$

则由式(11)不难写出其递推关系为:

$$P_{n, m}(\cos \theta) = \cos \theta P_{n-1, m}(\cos \theta) - \sin \theta \cdot$$

$$[P_{n-1, m+1}(\cos\theta)/4 - P_{n-1, m-1}(\cos\theta)] \quad (12)$$

当下标为-1时, 有:

$$P_{n, -1}(\cos\theta) = -\frac{1}{4}P_{n, +1}(\cos\theta) \quad (13)$$

如此, 利用式(12)和(13)可以快速实现非正常化球谐函数  $P_{n, m}$  的递推。该递推公式的乘系数与阶次  $(n, m)$  无关, 且绝对值小于 1, 故是绝对稳定的。但要注意, 在球函数的递推计算中, 恒有  $P_{nm}(x) = P_{nm}(x) = P_{nm}(x) = 0, m > n$ 。

相应地, 非正常化地球引力位系数  $(C_{nm}, S_{nm})$  与正常化系数  $(C_{nm}, S_{nm})$  的关系为:

$$(C_{nm}, S_{nm}) = \sqrt{2n+1}N_{n, m}(C_{nm}, S_{nm}) \quad (14)$$

其中,

$$N_{n, m} = \sqrt{(2m)! \frac{(n-m)! (n+m)!}{2^m n! 2^m n!}} \quad (15)$$

其递推公式为:

$$\begin{aligned} N_{n, m} &= \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2} N_{n-1, m}} \\ (n \geq 2; 0 \leq m < n-1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$N_{n, n} = \sqrt{1 - \frac{1}{2n} N_{n-1, n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$N_{0, 0} = N_{1, 0} = N_{1, 1} = 1$$

利用式(14)~(16)将地球引力位系数转换后, 摆动位  $\delta V$  又可表示为:

$$\begin{aligned} \delta V(r, \varphi, \lambda_G) &= \frac{GM_e}{a_e} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \\ P_{nm}(\sin\varphi) \left( C_{nm} \cos m\lambda_G + S_{nm} \sin m\lambda_G \right) \end{aligned} \quad (17)$$

这样不仅便于摄动位的计算, 而且更有利于摄动力的高效计算。

### 3 引力矢量、引力梯度张量的球谐展开式

采用非正常化球谐函数表示摄动位后, 利用位函数坐标方向上的导数仍然是调和函数的特性, 可以证明在地固坐标系下, 摆动力的级数展开式为:

$$\begin{aligned} \delta V_x &= \frac{GM_e}{a_e^2} \sum_{n=2}^{N+1} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} P_{nm}(\sin\varphi) \circ \\ &\quad \left( C_{nm}^x \cos m\lambda_G + S_{nm}^x \sin m\lambda_G \right) \\ \delta V_y &= \frac{GM_e}{a_e^2} \sum_{n=2}^{N+1} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} P_{nm}(\sin\varphi) \circ \\ &\quad \left( C_{nm}^y \cos m\lambda_G + S_{nm}^y \sin m\lambda_G \right) \\ \delta V_z &= \frac{GM_e}{a_e^2} \sum_{n=2}^{N+1} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} P_{nm}(\sin\varphi) \circ \\ &\quad \left( C_{nm}^z \cos m\lambda_G + S_{nm}^z \sin m\lambda_G \right) \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $x$  坐标轴方向的系数为:

$$\begin{cases} \left( C_{n+1, 1}^x, S_{n+1, 1}^x \right) = -\frac{2n+1}{2} \left( C_{n, 0}, S_{n, 0} \right); \\ \text{for } (m = 1; m \leq n; m++) \\ \left( C_{n+1, m-1}^x, S_{n+1, m-1}^x \right) = \\ \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{n+1} \left( C_{n, m}, -S_{n, m} \right); \\ \text{for } (m = 1; m \leq n; m++) \\ \left( C_{n+1, m+1}^x, S_{n+1, m+1}^x \right) = \\ \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{4(n+1)} \left( C_{n, m}, -S_{n, m} \right) \end{cases} \quad (19)$$

$y$  坐标轴方向的系数为:

$$\begin{cases} \left( C_{n+1, 1}^y, S_{n+1, 1}^y \right) = \frac{2n+1}{2} \left( S_{n, 0}, -C_{n, 0} \right); \\ \text{for } (m = 1; m \leq n; m++) \\ \left( C_{n+1, m-1}^y, S_{n+1, m-1}^y \right) = \\ \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{n+1} \left( S_{n, 0}, -C_{n, 0} \right); \\ \text{for } (m = 1; m \leq n; m++) \\ \left( C_{n+1, m+1}^y, S_{n+1, m+1}^y \right) = \\ \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{4(n+1)} \left( S_{n, 0}, -C_{n, 0} \right) \end{cases} \quad (20)$$

$z$  坐标轴方向的系数为:

$$\begin{cases} \text{for } (m = 0; m \leq n; m++) \\ \left( C_{n+1, m}^z, S_{n+1, m}^z \right) = \\ -\frac{(n+1+m)(n+1-m)}{n+1} \left( C_{nm}, S_{nm} \right) \end{cases} \quad (21)$$

这 3 个公式中, 假定系数数组元素已经清零。

按照式(19)~(21)的逻辑关系, 可以写出引力梯度的级数展开的谱系数。如  $zx$  轴上引力梯度分量的级数展开式为:

$$\begin{aligned} \delta V_{zx} &= \frac{GM_e}{a_e^3} \sum_{n=2}^{N+2} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+3} P_{nm}(\sin\varphi) \circ \\ &\quad \left( C_{nm}^{zx} \cos m\lambda_G + S_{nm}^{zx} \sin m\lambda_G \right) \end{aligned} \quad (22)$$

其中, 系数关系式参照式(21)得:

$$\begin{cases} \text{for } (m = 0; m \leq n; m++) \\ \left( C_{n+1, m}^{zx}, S_{n+1, m}^{zx} \right) = \\ -\frac{(n+1+m)(n+1-m)}{n+1} \left( C_{nm}^x, S_{nm}^x \right) \end{cases}$$

在实际计算时, 阶次  $n$  从零开始, 没有的系数用零填充即可, 这样便于编程。

## 4 实用算法格式

无论是摄动位,还是引力矢量单分量等计算量,它们的调和级数式求和可统一表示为:

$$f(r, \varphi, \lambda_G) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_m(r, \varphi) \cos m\lambda_G + B_m(r, \varphi) \sin m\lambda_G \right] \quad (23)$$

即先将与  $(r, \varphi)$  有关的  $n$  变量求和,然后再对与经度有关的  $m$  变量求和。并且对于三角函数存在简单的递推算法,只需计算一对三角函数值  $\cos \lambda_G$  和  $\sin \lambda_G$  就可直接按代数运算过程给出  $\cos m\lambda_G$  和  $\sin m\lambda_G$  ( $m \geq 2$ ),递推公式如下:

$$\cos m\lambda_G = 2\cos \lambda_G \cos(m-1)\lambda_G - \cos(m-2)\lambda_G$$

$$\sin m\lambda_G = 2\cos \lambda_G \sin(m-1)\lambda_G - \sin(m-2)\lambda_G$$

对于摄动力的  $x$  分量,  $A_m(r, \varphi)$  和  $B_m(r, \varphi)$  的表达式为:

$$\begin{cases} A_m(r, \varphi) \\ B_m(r, \varphi) \end{cases} = \frac{GM_e}{a_e^2} \sum_{n=2+1}^{N+1} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+2} P_{nm}(\sin \varphi) \begin{cases} C_{nm}^x \\ S_{nm}^x \end{cases}$$

即将位系数装入内存后,按式(14)转换得  $(C_{nm}, S_{nm})$ ,再按式(19)求得  $(C_{n,m}^x, S_{n,m}^x)$  并保存在内存空间,按式(12)快速递推球函数,累加求得  $A_m(r, \varphi)$  和  $B_m(r, \varphi)$ ,再由式(17)递推三角函数,从而可快速完成右函数等的计算工作,加速后

续数据的处理。

## 参 考 文 献

- 1 Koop R. Global Gravity Field Modelling Using Satellite Gravity Gradiometry. Netherlands Geodetic Commission, New Series Delft, 1993, 38
- 2 Rummel. Spherical Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry. Netherlands Geodetic Commission, New Series, Delft, 1993, 39
- 3 陈俊勇, 魏子卿, 等. 迈入新千年的大地测量学. 测绘学报, 2000(1)
- 4 陈俊勇. 现代低轨卫星对地球重力场探测的实践和进展. 测绘通报, 2001
- 5 宁津生, 邱卫根, 陶本藻. 地球重力场模型理论. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1990
- 6 罗志才, 宁津生, 晁定波. 卫星重力梯度分量的球谐综合. 武汉测绘科技大学学报, 1996, 21(2)
- 7 张传定. 卫星重力测量——基础、模型化方法与数据处理算法: [博士论文]. 郑州: 郑州信息工程大学, 2000
- 8 沈云中. 利用 CHAMP 卫星星历恢复地球重力场: [博士论文]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2000

第一作者简介: 张传定, 教授。主要研究方向: 卫星重力测量。

E-mail: 13607665382@163.net

## Fast Computation Method of Non-central Perturbation Force

ZHANG Chuanding<sup>1</sup> WU Xiaoping<sup>1</sup>

(1 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University,  
66 Longhai Road Zhengzhou, China, 450052)

**Abstract:** Recursive formulae without degree and order ( $n, m$ ) are presented. Fast computation formulae of the non-central gravitational vector and gravity tensor are deduced and respective algorithms are proposed. The algorithms can fasten the computation time five times, compared to the conventional methods.

**Key words:** gravitational vector; gravity tensor; perturbing forces; spherical harmonics; right function

About the first author: ZHANG Chuanding, professor. His major research interest is satellite gravimetry.

E-mail: 13607665382@163.net