

地图数字化数据处理的相关平差与精度分析

余晓红¹

(1 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉市徐东路 174 号, 430077)

摘要: 根据地图数字化坐标转换方法、转换所得地面坐标平差方法, 得到数字化数据处理的几种方案, 对不同方案的计算结果进行比较, 讨论了相关性对平差结果的影响, 并对数字化数据的精度评定进行了分析。

关键词: 地图数字化; 坐标转换; 相关平差

中图法分类号: P207.2; P282.2

文献[1]列出了按相似变换进行地图数字化坐标变换的一般变换法以及附有参数的条件平差法公式, 得出了在旋转参数为微小量时, 两种方法计算所得转换参数一致及经过坐标转换后得到的数字化点在地面坐标系中坐标相关的结论。地图数字化坐标转换为地面坐标后可进行平差处理, 一般将它们作为观测值进行平差。文献[2]列出了数字化数据的直角与直线模型、平行线模型、距离模型、面积模型等基本平差模型, 并给出了计算结果, 其中平差时是将这些观测值作为相互独立的同精度观测值。而在文献[1]中的讨论表明, 这些观测值具有较大的相关性, 因此应根据地图数字化坐标转换的方法, 以及转换后所得地面坐标平差的模型分析数字化数据处理的不同方案, 比较不同方案下的结果差异, 讨论相关性对平差结果的影响, 并分析数字化数据的精度。

1 地图数字化数据坐标变换的相似变换模型

设 k 点在地面坐标系中的坐标为 (x_k, y_k) , 相应的数字化坐标为 (ξ_k, η_k) , 采用相似变换进行坐标转换, 其转换关系为:

$$\begin{aligned} x_k &= a_0 + a\xi_k - b\eta_k \\ y_k &= b_0 + b\xi_k + a\eta_k \end{aligned} \quad (1)$$

对于 (x_k, y_k) , 其误差方程为:

$$\begin{bmatrix} v_{x_k} \\ v_{y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_k & -\eta_k \\ 0 & 1 & \eta_k & \xi_k \end{bmatrix} \Delta \lambda - \begin{bmatrix} l_{x_k} \\ l_{y_k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中, $\Delta \lambda$ 是作为未知参数的转换参数 $[a_0 \ b_0 \ a \ b]$ 的改正数, 其近似值为 $[a_0^0 \ b_0^0 \ a^0 \ b^0]$ 。为了求定转换参数, 需要有几个已知地面坐标的点(简称已知点), 通常选取格网点或已知的控制点, 已知点的个数至少为 2 个, 通常为 4 个或 9 个。得到它们的数字化坐标后, 利用这些已知点来求定转换参数的估计值。设已知点地面坐标的协因数为 q_x , 数字化坐标的协因数为 q_ξ , 各点坐标互不相关。对于所有的观测值, 有误差方程:

$$V = \mathbf{B} \Delta \lambda - \mathbf{l}_X \quad (3)$$

组成法方程可解得:

$$\Delta \lambda = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{l}_X \quad (4)$$

在这里, 形式上是将已知点地面坐标当作有误差的观测值, 而将它们的数字化坐标当作无误差的数值。这样, 可以根据式(4)得到转换参数估值的协因数阵:

$$\mathbf{Q}_\lambda = q_x (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \quad (5)$$

求得转换参数后, 可以将任意一点的数字化坐标转换为地面坐标。对于任意点 i , 若其数字化坐标为 (ξ_i, η_i) , 其协因数仍为 q_ξ , 则将它们转换为地面坐标的微分公式为:

$$\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 d\xi_i - b^0 d\eta_i \\ b^0 d\xi_i + a^0 d\eta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_i & -\eta_i \\ 0 & 1 & \eta_i & \xi_i \end{bmatrix} d\lambda \quad (6)$$

令 $\mathbf{B}_{x_i} = [1 \ 0 \ \xi_i \ -\eta_i]$, $\mathbf{B}_{y_i} = [0 \ 1 \ \eta_i \ \xi_i]$, 则

$$\left. \begin{array}{l} q_x = (a^0 + b^0) q_\xi + \mathbf{B}_{x_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{x_i}^T \\ q_y = (a^0 + b^0) q_\xi + \mathbf{B}_{y_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{y_i}^T \\ q_{xy} = \mathbf{B}_{x_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{y_i}^T = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

对于任意点 $i(x_i, y_i)$ 、 $j(x_j, y_j)$ ，它们两点之间的协因数为：

$$\begin{bmatrix} q_{x_i x_j} & q_{x_i y_j} \\ q_{y_i x_j} & q_{y_i y_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{x_j}^T & \mathbf{B}_{x_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{y_j}^T \\ \mathbf{B}_{y_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{x_j}^T & \mathbf{B}_{y_i} \mathbf{Q} \mathbf{B}_{y_j}^T \end{bmatrix} \neq 0 \quad (8)$$

若将已知点地面坐标 (x_k, y_k) 和数字化坐标 (ξ_k, η_k) 都当作观测值，按附有参数的条件平差法进行坐标转换，则可以得到附有参数的条件方程^[1]：

$$\left. \begin{array}{l} -v_{x_k} + a^0 v_{\xi_k} - b^0 v_{\eta_k} + \delta x + \\ \xi_k \delta x - \eta_k \delta y - l_{x_k} = 0 \\ -v_{y_k} + b^0 v_{\xi_k} + a^0 v_{\eta_k} + \delta y + \\ \eta_k \delta x + \xi_k \delta y - l_{y_k} = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

由条件方程组成法方程，可解得：

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{l}_X - \mathbf{B} \delta \mathbf{x})$$

$$\delta \mathbf{x} = [\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{l}_X \quad (10)$$

式中， \mathbf{K} 是相应于条件方程的联系数向量； \mathbf{Q}_i 是由已知点 $(x_k, y_k, \xi_k, \eta_k)$ 构成的观测值的协因数阵。则 \mathbf{l}_X 的协因数阵为：

$$\mathbf{Q}_l = [q_x + (a^0 + b^0) q_\xi] \mathbf{I} \quad (11)$$

式中， \mathbf{I} 表示单位阵。令 $\mathbf{M} = [\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}_i \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}]^{-1}$ ， $\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}_i \mathbf{A}^T)^{-1}$ ，则有：

$$\mathbf{Q}_k = [q_x + (a^0 + b^0) q_\xi] \mathbf{M} \mathbf{M}^T \quad (12)$$

对于任意点 (ξ_i, η_i) ，将它们转换为地面坐标的公式及协因数式同式(6)、式(7)。

当旋转参数为微小量时，可以设转换参数的近似值 $a_0 = 1, b_0 = 0$ 。这样，按照附有未知参数的条件平差求定转换参数的式(10)可以简化为式(4)^[1]。这就是说，由式(3)按一般的间接平差求定转换参数时，虽然形式上是以各点地面坐标作为观测值，但与将各点地面坐标和数字化坐标都当作观测值，按附有参数的条件平差法进行坐标转换的计算结果相同。

2 地图数字化数据的相关平差

地图数字化后，得到了数字化点在地面坐标系统中的坐标值 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$)。为了消除观测误差带来的矛盾以及合理地评价数字化数据质量，可以将这些坐标值作为观测值进行平差。

数字化数据的基本平差条件有直角、直线条件、平行线条件、面积条件等^[2]，本文以直角房屋为例讨论数字化数据的相关平差。

直角房屋普遍存在于地图数字化中，对于每一个直角，可以列出一个条件方程。设 i, j, k 三点构成已知的角度 β ，则有 $\hat{\alpha}_{ik} - \hat{\alpha}_{ij} = \beta$ ，并可得如下的条件式：

$$\begin{aligned} a_{ik} v_{x_k} + b_{ik} v_{y_k} - (a_{ij} - a_{ik}) v_{x_i} - \\ (b_{ik} - b_{ij}) v_{y_i} - a_{ij} v_{x_j} - b_{ij} v_{y_j} + \omega_i = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

对于一幅图中的所有直角条件，可以列出如下的条件方程：

$$\mathbf{AV} + \mathbf{W} = 0 \quad (14)$$

可求得坐标观测值的改正数及平差值：

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Q} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{W}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{V} = \mathbf{L} - \mathbf{Q} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{W} \quad (15)$$

平差值协方差阵为：

$$\mathbf{D}_L = \hat{\sigma}_0^2 [\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}] \quad (16)$$

式中， $\hat{\sigma}_0^2 = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} / r$ ， r 是所有房屋角度条件的个数； \mathbf{Q} 是观测值的权逆阵，可以根据式(7)计算出。以前计算时通常都取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ，即将数字化坐标转换后得到的地面坐标值作为独立的观测值进行平差计算。此时得到的是非相关平差的结果。而根据前述的分析可知，这些观测值之间是非独立的，其协因数阵是根据转换参数的协因数计算所得，所以应采用相关平差进行数据处理。为了比较相关平差与非相关平差计算结果的差异，选用了以下的数字化数据平差处理方案。

设数字化坐标的协因数 $q_\xi = 1$ ，已知点的分布见图 1，选取不同的已知点以及地面坐标协因数，对一幅图中的所有直角条件分别进行非相关与相关平差计算。具体方案如下：

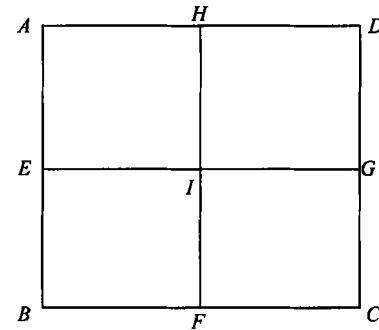


图 1 已知点分布图

Fig. 1 Distribution of Known Points

方案一：取 A, B 两点作为已知点， $q_x = 0$ ，可得两种计算结果。

方案二：取 A, B, C, D 四点作为已知点， q_x 分别为 $0, 0.2, 0.5$ ，可得 6 种计算结果。

方案三: 取 A 至 I 9 点作为已知点, q_x 分别为 0.0.2.0.5, 可得 6 种计算结果。

3 不同方案结果比较

为了分析上述数字化数据处理的不同方案对计算结果的影响, 选择一幅有解析坐标的 1:500 地籍图进行数据处理与比较。

3.1 三种方案所得转换参数比较

按相似变换计算转换参数, 分别采用三种方案中的 2 个、4 个、9 个已知点计算转换参数, 根据不同的已知点数求得的 4 个转换参数列于表 1。

表 1 转换参数计算结果

Tab. 1 Results of Transformation Parameters

转换参数	2 点转换	4 点转换	9 点转换
\hat{a}_0	516 172.528 1	516 172.501 6	516 172.603 0
\hat{b}_0	427 961.422 5	427 961.508 1	427 961.498
\hat{a}	0.998 995 31	0.999 274 80	0.999 199 22
\hat{b}	-0.006 713 29	-0.007 510 23	-0.007 212 57

从表 1 中可以看出, 转换参数与已知点选择有较大的关系。求定转换参数最少需要两个已知点, 若此 2 点坐标没有误差, 求得的转换参数也没有误差, 但事实上已知点都存在误差。为了提高转换参数的精度, 保证数字化数据的质量, 已知点至少取 4 个。但已知点的个数并不是越多越好, 求得的转换参数的精度还与已知点的精度有关, 故应选择高精度的已知点。

3.2 同一种方案中相关平差与非相关平差结果比较

在图 1 中选择了 25 个直角房屋分别按照前述的方案进行平差计算。在两点转换中, 因为已知点的个数就是求定转换参数的必要点数, 所以坐标的改正数皆作为 0, 直接求得转换参数, 然后计算得到转换参数的方差。计算结果表明, 在同一种方案下取不同的协因数及采用相关与非相关平差计算出的各房屋角点地面坐标的平差值都有差别。表 2 列出了方案二、方案三中相关平差与非相关平差所得地面坐标平差值的最大差值。

表 2 不同方案中相关与非相关地面坐标平差值最大差值/mm

Tab. 2 Maximum Difference of Adjustment Results in Different Schemes

协因数	方案二(4 已知点)	方案三(9 已知点)
$q_x=0, q_z=1$	0.32	0.22
$q_x=0.2, q_z=1$	0.39	0.26
$q_x=0.5, q_z=1$	0.49	0.33

计算结果还表明, 采用相关平差时, 在同一种方案中取不同协因数计算所得的坐标平差值差别不大。如在方案二中采用相关平差时, $q_x=0, q_z=1$ 与 $q_x=0.2, q_z=1$ 时计算所得的地面坐标平差值差值最大为 0.1mm。

3.3 不同方案所得坐标平差值比较

分别采用 2 点、4 点、9 点转换计算各房屋角点的地面坐标。在 $q_x=0.5, q_z=1$ 的情况下, 采用相关平差计算得到各房屋角点平差后的地面坐标, 并计算了 2 点、9 点转换所得坐标平差值与 4 点转换所得平差值的差值, 将差值按大小排列并划分为一定的区间, 统计差值落在各区间的个数, 结果见表 3。

表 3 采用不同已知点转换的坐标平差值差值统计

Tab. 3 Differences of Adjustment Results by Transformation of Different Known Points

差值区间	2 点与 4 点转换平差值之差		9 点与 4 点转换平差值之差	
	X 坐标个数	Y 坐标个数	X 坐标个数	Y 坐标个数
-0.10 ~ 0.01	0	36	93	62
-0.01 ~ 0	0	1	7	20
0 ~ 0.01	0	8	0	18
0.01 ~ 0.10	43	55	0	0
0.10 ~ 0.25	57	0	0	0

从表 3 中可以看出, 取不同的已知点进行坐标转换, 因为所求得的转换参数有较大差异, 转换后所得的地面坐标也差别较大, 导致地面坐标平差后也有较大的差异。其中 2 点转换与 4 点转换的差值中, X 坐标有 57 个达到了 dm 级, 这说明用于求定转换参数的已知点坐标是非常重要的, 为了保证数字化数据成果的质量, 应该合理地选取已知点。

4 数字化数据精度的评定

数字化数据的精度评定是数字化数据处理的重要组成部分。精度估计式为:

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{[d_{x_i} d_{x_i}]}{n}} \quad \sigma_{y_i} = \sqrt{\frac{[d_{y_i} d_{y_i}]}{n}} \quad (17)$$

式中, $d_{x_i} = \bar{x}_i - x_i$, $d_{y_i} = \bar{y}_i - y_i$, 其中 \bar{x}_i, \bar{y}_i 是已知坐标, x_i, y_i 是数字化坐标。由于所有点的已知坐标实际上不可能全部获得, 因此式 (17) 只适用于理论分析, 在实际工作中, 可以利用地面坐标平差后所得的改正数, 按照 $\sigma_0^2 = V^T P V / r$ 计算单位权方差。若采用非相关平差, 则可根据 $\sigma_0^2 = V^T V / r$ 计算单位权方差, 然后分别按 $\sigma_z^2 = q_z \sigma_0^2$, $\sigma_x^2 = q_x \sigma_0^2$

计算地面坐标与数字化坐标的方差。

采用前述的三种方案计算单位权中误差即数字化坐标的中误差 σ_0 , 在不同的方案下, 相关与非相关平差计算所得的 σ_0 都一致, 为 $\sigma_0=0.060\text{ 4m}$ 。在非相关平差中, 通常将它们看作转换后的地面坐标的精度, 每个坐标的点精度相同且相互独立。事实上, 转换后的地面坐标是相关的, 任意一点地面坐标的中误差可以通过下式计算得到:

$$\sigma_i = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{x_i} + q_{y_i}} \quad (18)$$

表 4 列出了不同方案下坐标转换后得到的 4 个点的地面坐标的中误差。此外, 还计算了平差后房屋角点坐标的中误差。在方案二、方案三中, 当采用非相关平差时, 坐标平差值的中误差均为 0.067 54m , 采用相关平差时则有区别。选择其中 4 个点的相关平差计算得到的坐标平差值的点位中误差列于表 4。

表 4 点位中误差比较

Tab. 4 Errors of Coordinates

点号	方案二相关平差(4 已知点)			方案三相关平差(9 已知点)		
	$q_x=0$	$q_x=0.2$	$q_x=0.5$	$q_x=0$	$q_x=0.2$	$q_x=0.5$
	$q_z=1$	$q_z=1$	$q_z=1$	$q_z=1$	$q_z=1$	$q_z=1$
地面坐标	1 0.101 21	0.104 08	0.108 24	0.094 10	0.095 74	0.098 15
	2 0.100 65	0.103 42	0.107 45	0.093 70	0.095 27	0.097 57
	3 0.100 43	0.103 16	0.107 14	0.093 54	0.095 08	0.097 34
	4 0.101 00	0.103 84	0.107 95	0.093 95	0.095 56	0.097 94
地面坐标平差值	1 0.086 65	0.089 98	0.094 77	0.078 23	0.080 19	0.083 06
	2 0.085 98	0.089 21	0.093 85	0.077 73	0.079 62	0.082 36
	3 0.085 73	0.088 92	0.093 50	0.077 55	0.079 40	0.082 10
	4 0.086 39	0.089 69	0.094 42	0.078 04	0.079 97	0.082 79

表 4 数据表明, 采用相关平差时, 所得到的转换后的地面坐标的精度、地面坐标的平差值的精度与非相关平差是不相同的。因此, 为了合理地评价数字化数据的精度, 应该采用相关平差模型。

参 考 文 献

1 黄加纳. 地图数字化的坐标转换及数据的精度与相关性. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(3): 213~216

- 2 刘大杰. GIS 空间数据的精度分析与质量控制. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1999
- 3 黄幼才, 刘文宝. GIS 空间数据误差分析和处理. 武汉: 中国地质大学出版社, 1995
- 4 崔希璋. 广义测量平差. 北京: 测绘出版社, 1992

作者简介: 余晓红, 工程师, 博士。现从事 GIS 数据质量控制研究。

E-mail: yxh196869@sina.com

Correlation Adjustment and Accuracy Analysis in Map Digitization Data Processing

YU Xiaohong¹

(1 Institute of Geodesy and Geophysics Chinese Academy of Sciences, 174 Xudong Road, Wuhan, China, 430077)

Abstract: The methods for the transformation of map digitized coordinates to ground coordinates include conform method, affine method and project method. Based on these transformation methods, map digitized data are processed by transforming these data into the ground coordinates. And these coordinates are treated as independent observations with the same accuracy. Several schemes of map digitized data adjustment are presented. The results are then analyzed and compared. The influence of digitized data correlation on the adjustment results are further discussed. The accuracy estimation of digitized data is analyzed in the end.

Key words: map digitization; coordinate transformation; correlation adjustment; accuracy analysis

About the author: YU Xiaohong, engineer, Ph. D. She is engaged in the research on the quality control of GIS Data.

E-mail: yxh196869@sina.com

(责任编辑: 袁丰)